

Ahoj!

Vítej v Jámě lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již šestnáctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

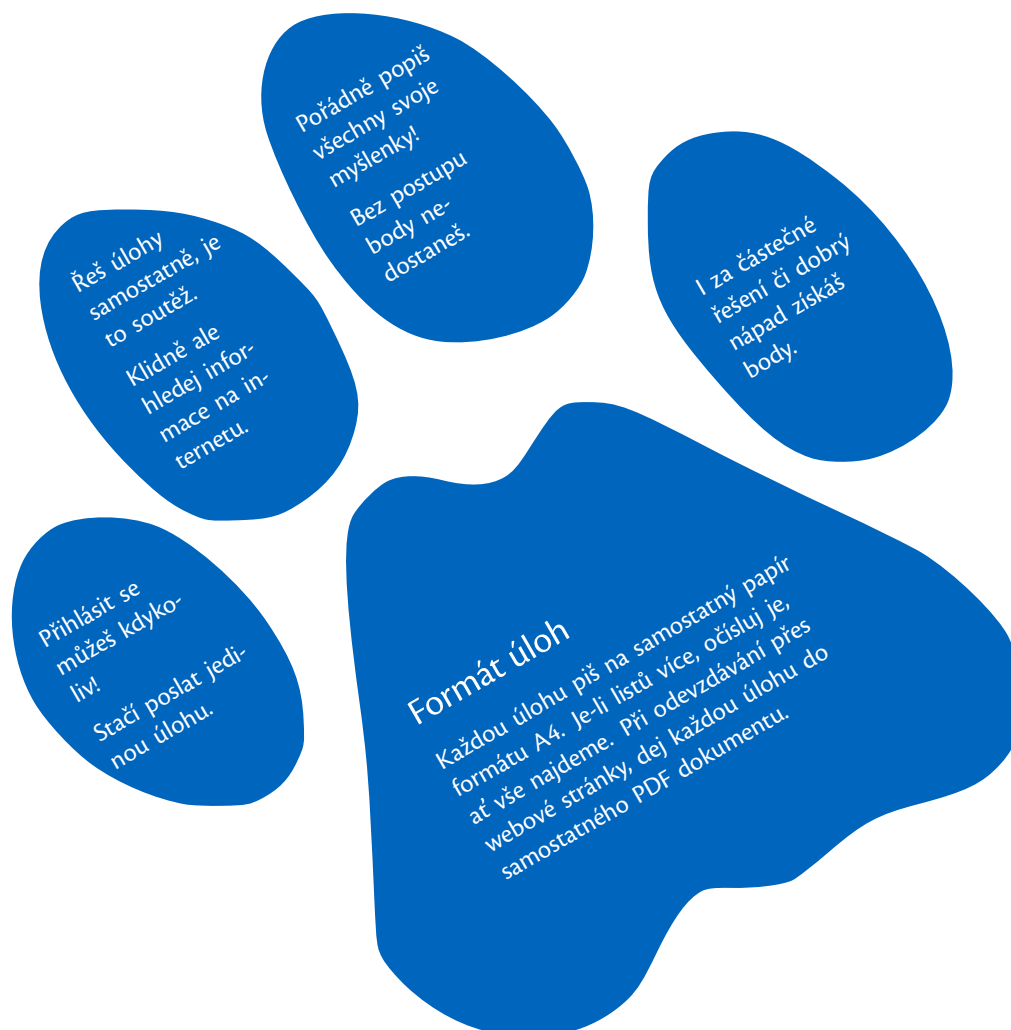
Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká několik záložných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama.lvova.cz> a dále na Facebooku a Instagramu.

Novinky v 16. ročníku

V letošním ročníku budeme až od druhého kola pokračovat v podobném duchu jako minule. Zadání každé kategorie se skládá z dvou kratších úloh a jedné rozsáhlejší úlohy, které budeme říkat *témátko*.

Témátko se bude věnovat konkrétní oblasti matematiky, fyziky či informatiky a snažit se Ti ji přiblížit pomocí několika podúloh. Nicméně, v prvním kole se na úvod vrátíme ke klasickému formátu – čtyřem kratším úlohám.



Svá řešení nám pošli do **7. dubna 2024** prostřednictvím stránek soutěže.

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přeji

Alenka, Anet, Anička, Bětka, Honza, Honza, Káťa, Lenička, Linda, Láďa, Lída, Mája, Martin, Matěj, Matěj, Michal, Míla, Ondra, Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Závody

Antilopa Anička z Antverp, buvol Bruno z Brna, cibetka Cecilka z Cvrčovic, daněk Daník z Dálavy, emu Emanuel z Edinburghu, fenek Fanda z Frýdku a gazela Gertrúda z Geislingenu rádi běhají a chtěli by vědět, kdo z nich je nejrychlejší.

Uspořádali tedy několik závodů, ale každý se zúčastnil pouze některých. Zvířátka si také poznačila pouze výsledná pořadí závodů, nikoliv specifické časy.

Výsledky závodů (vždy zleva od 1. do 4. místa):

- 1. závod: C, B, A, G
- 2. závod: E, B, G, D
- 3. závod: C, E, G, F
- 4. závod: B, G, D, F

Jaké zvířátko je nejrychlejší? A co druhé nejrychlejší? Lze jednoznačně určit pořadí všech zvířátek?

(5 bodů)



Úloha 2A Barevné bakterie

(11 bodů)



Mravenec Mojmir je chovatelem zelených a červených bakterií v mravenčí kolonii. Potřebuje oba typy bakterií udržovat v počtech, které vždy určí královna. Jednoho dne spojil síly se svým kamarádem mravencem Metlou zběhlém v technice a společně se rozhodli, že si chov bakterií trochu zautomatizují.

Navrhli vhodnou dopravní trubičku a spolu s ní 4 základní stroje. Do těchto strojů vpusť jednu až dvě bakterie a stroj následně jednu či dvě vypustí, přičemž průchodem mohou bakterie změnit barvu, rozmnožit se nebo se dokonce spojit do jedné. Pro přehlednost si Mojmir s Metlou vedle nákresu zapsali do tabulek, co který stroj přesně dělá, podle toho, jaké bakterie do něj vpusť.

Důležitá poznámka: První a druhá bakterie jsou vždy na symbolech řazeny odshora dolů, vpusť se do stroje označeným žlutým čtverečkem zleva a stroj je vypouští žlutým čtverečkem vpravo. Šipky na symbolech pomáhají s určením orientace strojů.

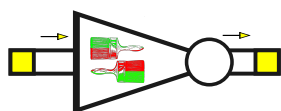
Typy strojů

Nejjednodušší je **Dopravní trubička**. Ta jenom posílá bakterii dál. Vžum!



Obrázek 1: Dopravní trubička

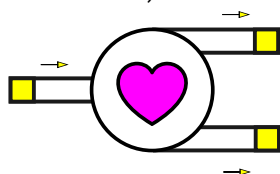
Prvním strojem je **Lakovna**. Přijímá jednu bakterii a změnil její barvu na opačnou – z červené udělá zelenou a ze zelené červenou. **Množirna** umí jakoukoli jednu bakterii rozmnožit na dvě. Barva zůstane zachována.



Obrázek 2: Lakovna (symbol)

1. vpuštěná bakterie	1. vypuštěná bakterie
zelená	červená
červená	zelená

Obrázek 3: Lakovna (tabulka)



Obrázek 4: Množirna (symbol)

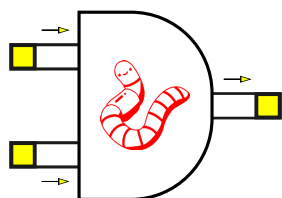
1. vpuštěná bakterie	1. vypuštěná bakterie	2. vypuštěná bakterie
zelená	zelená	zelená
červená	červená	červená

Obrázek 5: Množirna (tabulka)

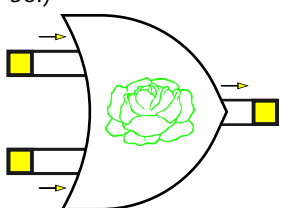
Červirna a **Zelirna** jsou trochu složitější. Do obou strojů vstupují dvě bakterie, spojí se v jeden roztomilý bakteriální blob a změnil barvičku podle následujících pravidel: *(pokračování na další straně)*

V **Červírně** stačí, když je alespoň jedna z bakterií na vstupu červená a dohromady vytvoří jednu červenou. Jenom když jsou obě bakterie zelené, vyjde z ní jedna zelená.

V **Zelírně** je to přesně naopak – když je alespoň jedna z bakterií na vstupu zelená, dohromady vytvoří jednu zelenou. Pouze dvě červené bakterie vytvoří jednu červenou.



Obrázek 6: Červírna (symbol)



Obrázek 8: Zelírna (symbol)

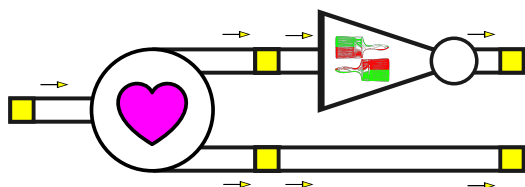
1. vpuštěná bakterie	2. vpuštěná bakterie	1. vypuštěná bakterie
zelená	zelená	zelená
červená	zelená	červená
zelená	červená	červená
červená	červená	červená

Obrázek 7: Červírna (tabulka)

1. vpuštěná bakterie	2. vpuštěná bakterie	1. vypuštěná bakterie
zelená	zelená	zelená
červená	zelená	zelená
zelená	červená	zelená
červená	červená	červená

Obrázek 9: Zelírna (tabulka)

Hned po úspěšné konstrukci zmíněných strojů Metlu s Mojmírem napadlo, že by mohli skládat přístroje za sebe a tím vynalézt přístroje zcela nové. Stačilo je chytrě zapojit do sebe, jako třeba v případě **Dvojbarevné množírny** níže. Ke konstrukci využívá pouze jednu **Lakovnu**, **Množírnu** a pomocnou **Dopravní trubičku**.



Obrázek 10: Dvojbarevná množírna (symbol)

1. vpuštěná bakterie	1. vypuštěná bakterie	2. vypuštěná bakterie
zelená	červená	zelená
červená	zelená	červená

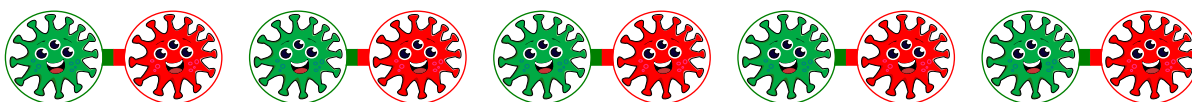
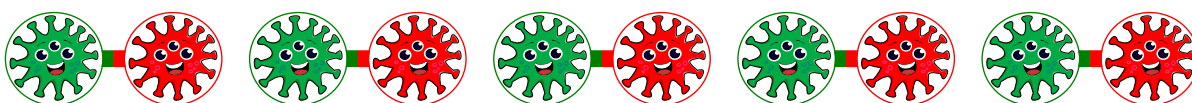
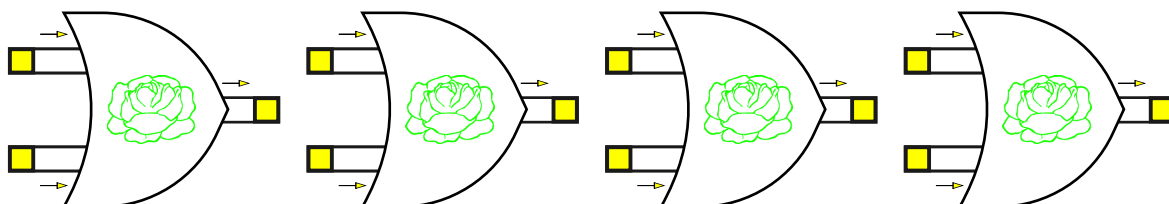
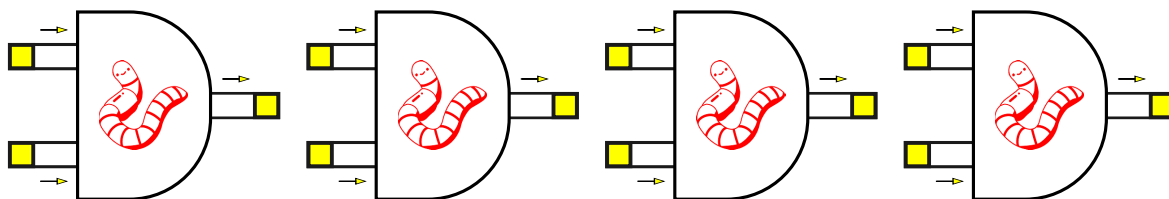
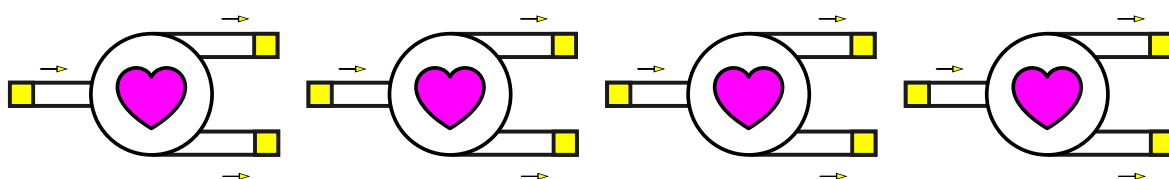
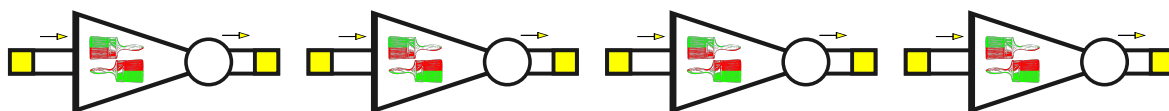
Obrázek 11: Dvojbarevná množírna

Mojmíra zajímá, jak vyrobit složený přístroj, který by udělal ze dvou červených bakterií právě jednu zelenou a ze všech ostatních možných dvojic právě jednu červenou? (4 body) *Nápověda: Postačí pouze dva stroje.*

Po měsíci se Mojmírovi v továrničce rozbila forma na výrobu Zelírny. Dokážeš mu poradit, jak ji vyrobit pouze s pomocí Lakoven, Množírny, a Červíren? (7 bodů) *Nápověda: Výsledek z prvního úkolu může práci hodně zjednodušit.*

Na další straně máš vystřihovánku, která by ti mohla s vymýšlením pomoci. Vytiskni si ji z PDF dostupného na našem webu barevně na A4, podle tvrdým papírem, vystřihni stroje, trubičky a bakterie podél obrysů (nezapomeň však na šipky). Pak už jen stačí bakterie v polovině přehnout, slepit k sobě a můžeš si pohrát s prebarvováním bakterií i zapojením strojů do sebe ve vyznačených žlutých čtvercích, po směru šipek. :) Pokud umíš s nějakým grafickým programem, můžeš použít ve Windows zkratku Win+Shift+S a „vystřihnout“ si co potřebuješ virtuálně.

Vystřihovánka



Témátko 3A Med-vědí banka – mladší**(celkem 11 bodů)**

Medvěd Míša si v lese založil 1. medovou banku pro včely, kde si mohou med bezpečně ukládat na horší časy. Dlouho banka fungovala na výbornou, Míša včelám za malou medovou provizi odháněl zloděje, zatímco včeličky měly kam zaletět i v chladnějších časech, když už nic nekvetlo.

Bohužel časem začaly včely (v)čelit velkému problému – vosy v přestrojení včel jim začaly vybírat jejich medové účty. Dohodly se proto s Míšou, že si svůj med zabezpečí heslem. Míša slíbil, že odvede svou med-vědí službu, a tak také učinil. Dva dny stloukal, pájel a třetí den měl hotový trezor, který se otevřel jen, když včelky jemně namačkaly správnou kombinaci čísel a znaků.

Poznámka: U všech úloh prosím uvádějte váš postup. Čisté vypsání všech možností nestačí a není doporučeno.

Úlohy jsou seřazeny v určitém myšlenkovém sledu, ale pokud vám některá nepůjde, můžete ji zkusit přeskočit.

Podúloha i)**(3 body)**

Včelka Vendy používá heslo, které se skládá pouze ze čtyř číslic. Kamarádky jí řekly, že to není moc rozumné, protože existuje velmi málo možných kombinací. Kdyby se ho někdo pokusil tipnout, neměl by moc práce. Poradíš jí, kolik takových hesel může existovat a za jak dlouho by je bylo možné všechny vyzkoušet, kdyby roj převlečených vos zkoušel každou sekundu 20 hesel?

Kombinací zde myslíme skupinu znaků složenou, respektive „zkombinovanou“, ze čtyř číslic od 0 po 9. V kombinaci tvoří heslo, ale závisí na jejich pořadí – takže „1, 4, 6 a 8“ je něco jiného, než „8, 4, 6, 1“. V podstatě se hesla včelek chovají stejně jako PIN u karty, nemůžete místo „1234“ zadat „4321“. Znaky (v našem případě číslice) se v kombinaci mohou opakovat.

Podúloha ii)**(3 body)**

Vendy se rozhodla, že si heslo změní. Chce, aby se nové heslo skládalo z číslic a velkých a malých písmen anglické abecedy (nemusí nutně ze všech najednou), bylo dostatečně bezpečné, ale nejkratší možné. Jak musí být minimálně dlouhé, aby pro danou délku hesla existoval bilion, tedy 1 000 000 000 000, možných kombinací hesel? Jak dlouho by trvalo vyzkoušet všechny kombinace, pokud by se vosy zesynchronizovaly lépe než kdy předtím a zvládly rychle mávajícím křídly zadat 100 hesel za sekundu?



Pozor, vosy předem neví, jestli si to Vendy nechtěla ulehčit. Proto budou zkoušet zadávat i hesla, kde se znaky opakují, stejně tak hesla pouze z číslic, pouze malých písmen apod.

Nemusíte se děsit velkých čísel, kalkulačka je váš kamarád a určitě udělá těžkou početní práci ráda za vás. Malá nápověda: Zkuste si nejdříve spočítat počet kombinací pro malou délku hesla, třeba pro jeden, nebo dva znaky, a pak teprve zkuste odvodit, jak to asi bude u delších.

Podúloha iii)**(2 body)**

Vendy si vytvořila nové heslo, aby splňovalo její požadavky z podúlohy ii). Po týdnu se jí ale přihodilo, že heslo zapoměla, pamatovala si pouze, z jakých znaků se skládá. Poradíš jí, kolik takových hesel může existovat, pokud každý znak použila nejvýše jednou? (Pokud se ti nepodařilo vyřešit ii), tak můžeš spočítat pro heslo z 8 různých znaků, třeba b, u, K, Z, 4, 5, 7, 8.)

Podúloha iv)**(2 body)****1. bzyky****2. bzzz****3. mávmáv****4. bzzzt**

Včelka Verča přišla mezitím s nápadem, že by pro taková hesla mohla použít několik nepozměněných slov ze slovníku spisovného včeliho jazyka. Slovník ve svém 412. rozšířeném vydání obsahuje 314 159 slov. Podobně jako v podúloze ii), kolik slovíček stačí, aby počet možných kombinací hesel pro předem daný počet slovíček přesáhl 1 000 000 000 000? Slova se v hesle mohou opakovat.

Podúloha v)**(1 bod)**

Pokud byste byli na místě včelek, jaké heslo byste si raději zvolili? Znakové jako v ii), nebo ze slovíček jako v iv)? Zkuste popsat proč.

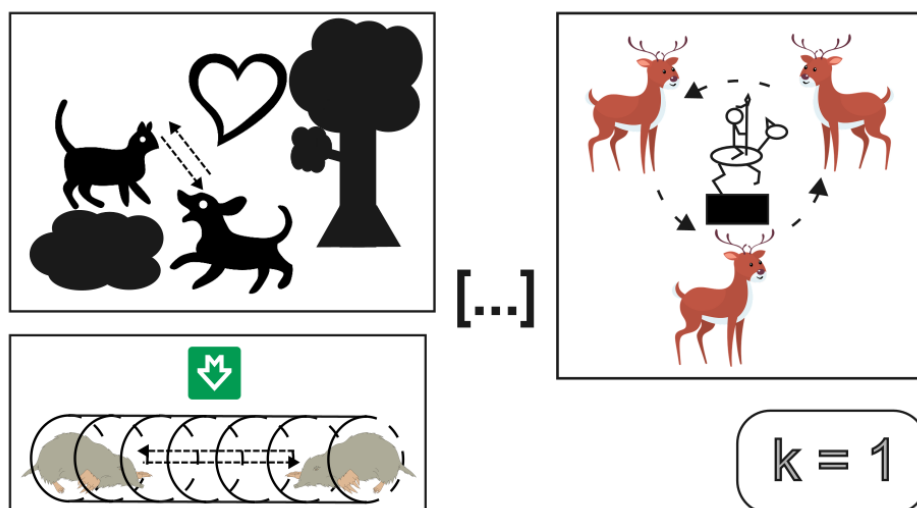
Kategorie starší

Úloha 1B Ztraceni v davu

(7 bodů)

Skupina 2025 zvířátek (z toho 9 krteků) se snaží projít davem turistů na Václavském náměstí. Aby se navzájem neztratila, domluvili se, že každý bude sledovat k jiných zvířátek ze skupiny.

Krtka Krtomíra na minulém výletě napadlo, že by stačilo hlídat jenom jedno další zvířátko, ale nakonec skončili tak, že se navzájem hlídaly dvojčky nejlepších kamarádů (jen občas trojičky, do trojúhelníku) a museli se stejně nakonec všichni složitě hledat.



Obrázek 12: Pěta s Kátou (Františkánské zahrady), krтки (Můstek, metro A), Jaromír s kamarády (Socha sv. Václava).
 Ilustrační obrázek.

Vedoucí dnešního výletu jelen Jaromír proto rozhodl, že každý musí sledovat alespoň tolik zvířátek, aby se i v nejhorším možném případě výprava nerozpojila.

Krtomíra by zajímalo, jaké je nejmenší možné k , aby se krтки navzájem neztratili, pokud by se dohodli, že krтки budou sledovat jenom krtky? **(3 body)**

Jaké nejmenší k musí vyhlásit Jaromír, aby to fungovalo pro celou výpravu? **(4 body)**

Ať už se rozhodneš pomoci jenom krtkům, nebo celé výpravě, popiš nám prosím alespoň přibližně svůj postup. (A jsme si zcela jistí, že zvířátka mají ráda obrázky, tak jimi můžeš své řešení také doplnit, pokud to pomůže k pochopení tvé úvahy. :))

Úloha 2B Zrající vinná réva

(9 bodů)

Srdečný lev Richard má na své anglické zahrádce vinnou révu, na které již dozrály všechny hrozny. Potřebuje je sesbírat co nejrychleji, aby mu všechny bobule nesezobli drzí kosáci.

Vinnou révu pěstuje na ploché konstrukci stojící podél plotu o rozměrech 4 metry do výšky a 6 metrů do šířky. Richard miluje pěstování rostlin do mřížky, což se mu povedlo i s trsy vinné révy. Trsy, které vyrostly na okrajích, jsou vzdálené od okraje 15 centimetrů. Vertikálně jsou vzdálené mezi sebou 74 cm a horizontálně 38 cm.

Lev Richard samozřejmě chodí po zadních a má lopatky ve výšce 1,5 metru. Když natáhne svojí tlapu, tak dosáhne na vzdálenost 70 centimetrů. Pro sběr trsů má i žebřík, který je vysoký 2 metry s celkem 9 stupínky s pravidelnými rozestupy. Na zádech má koš, kam hází utržené trsy.

Richardovi trvá přibližně 1 sekundu utrhnout jeden trs a další sekundu a půl dát ho do koše. Jeden stupínek na žebříku vyleze i sleze za 2 sekundy. Zvednout žebřík mu trvá půl minuty a stejně tak i položení žebříku. Přesunout žebřík mezi dvěma sloupci hned vedle sebe trvá 30 sekund. Žebřík staví přesně doprostřed mezi sloupce, které jde zrovna sbírat. Trsy, na které dosáhne, sebere ještě ze země. Shýbnutí mu trvá 2 sekundy. Žebřík může na začátku donést kamkoliv a zvednutí, přesun i položení mu trvá 3 minuty dohromady.

Kolik trsů je celkem na celé konstrukci? Jak dlouho potrvá, než lev Richard posbírá všechny trsy tak, aby to zvládl co nejefektivněji?



Témátka 3B Med-vědí banka – starší**(celkem 11 bodů)**

Medvěd Míša si v lese založil 1. medovou banku pro včely, kde si mohou med bezpečně ukládat na horší časy. Dlouho banka fungovala na výbornou, Míša včelám za malou medovou provizi odháněl zloděje, zatímco včeličky měly kam zaletět i v chladnějších časech, když už nic nekvetlo.

Bohužel časem začaly včely (v)čelit velkému problému – vosy v přestrojení včel jim začaly vybírat jejich medové účty. Dohodly se proto s Míšou, že si svůj med zabezpečí heslem. Míša slíbil, že odvede svou med-vědí službu, a tak také učinil. Dva dny stloukal, pájel a třetí den měl hotový trezor, který se otevřel jen, když včelky jemně namačkaly správnou kombinaci čísel a znaků.

Poznámka: U všech úloh prosím uvádějte váš postup. Čisté vypsání všech možností nestačí a není doporučeno.

Úlohy jsou seřazeny v určitém myšlenkovém sledu, ale pokud vám některá nepůjde, můžete ji zkusit přeskočit.

Podúloha i)**(2 body)**

Včelka Vendy používá heslo, které se skládá pouze ze čtyř číslic. Kamarádky jí řekly, že to není moc rozumné, protože existuje velmi málo možných kombinací. Kdyby se ho někdo pokusil tipnout, neměl by moc práce. Poradíš jí, kolik takových hesel může existovat a za jak dlouho by je bylo možné všechny vyzkoušet, kdyby roj převlečených vos zkoušel každou sekundu 20 hesel?

Kombinací zde myslíme skupinu znaků složenou, respektive „zkombinovanou“ ze čtyř číslic od 0 po 9. V kombinaci tvoří heslo, ale závisí na jejich pořadí – takže „1, 4, 6 a 8“ je něco jiného, než „8, 4, 6, 1“. V podstatě se hesla včelek chovají stejně jako PIN u karty, nemůžete místo „1234“ zadat „4321“. Znaky (v našem případě číslice) se v kombinaci mohou opakovat.

Podúloha ii)**(2 body)**

Vendy se rozhodla, že si heslo změní. Chce, aby se nové heslo skládalo z číslic a velkých a malých písmen anglické abecedy (nemusí nutně ze všech najednou), bylo dostatečně bezpečné, ale nejkratší možné. Jak musí být minimálně dlouhé, aby pro danou délku hesla existoval bilion, tedy 1 000 000 000 000, možných kombinací hesel? Jak dlouho by trvalo vyzkoušet všechny kombinace, pokud by se vosy zesynchronizovaly lépe než kdy předtím a zvládly rychle mávajícím křídly zadat 100 hesel za sekundu?



Pozor, vosy předem neví, jestli si to Vendy nechtěla ulehčit. Proto budou zkoušet zadávat i hesla, kde se znaky opakují, stejně tak hesla pouze z číslic, pouze malých písmen apod.

Nemusíte se děsit velkých čísel, kalkulačka je váš kamarád a určitě udělá těžkou početní práci ráda za vás. Malá nápověda: Zkuste si nejdříve spočítat počet kombinací pro malou délku hesla, třeba pro jeden, nebo dva znaky, a pak teprve zkuste odvodit, jak to asi bude u delších.

Podúloha iii)**(2 body)**

Vendy si vytvořila nové heslo, aby splňovalo její požadavky z podúlohy ii). Po týdnu se jí ale přihodilo, že heslo zapoměla, pamatovala si pouze, z jakých znaků se skládá. Poradíš jí, kolik takových hesel může existovat, pokud každý znak použila nejvýše jednou? (Pokud se ti nepodařilo vyřešit ii), tak můžeš spočítat pro heslo z 8 různých znaků, třeba b, u, K, Z, 4, 5, 7, 8.)

Podúloha iv)**(1 bod)****1. bzuky****2. bzzz****3. mávmáv****4. bzzzt**

Včelka Verča přišla mezitím s nápadem, že by pro taková hesla mohla použít několik nepozměněných slov ze slovníku spisovného včelího jazyka. Slovník ve svém 412. rozšířeném vydání obsahuje 314 159 slov. Podobně jako v podúloze ii), kolik slovíček stačí, aby počet možných kombinací hesel pro předem daný počet slovíček přesáhl 1 000 000 000 000? Slova se v hesle mohou opakovat.

Podúloha v)**(3 body)**

Chybu jako Vendy v podúloze i) udělalo až příliš mnoho včelek. Aby bylo zabráněno tak velkému úniku medu, jako doposud, rozhodla se královna Kateřina II. Včelík vydat listinu, v níž přikazuje, aby každé heslo mělo alespoň 6 znaků, obsahovalo alespoň dvě číslice a jedno velké písmeno. Po čase se ale začaly incidenty opět opakovat - vosy úspěšně vykradly polovinu včelích zásob v medvědí bance.

Královna vyslala trubce Tonda na průzkum, aby zjistil, jaká hesla včelky používají. K jeho nevíře se dozvěděl, že polovina včelek používala heslo v následujícím tvaru:

Slovo (5 znaků), po něm následuje číslo (1 znak)

Přičemž ve zvoleném slově dále jedno písmeno nahradily číslem a jedno písmeno udělaly velkým. Vosy tento tvar zřejmě tajně odpozorovaly u jedné ze včelek a k jejich radosti se jim podařilo zneužít, že tahle včelka nebyla zdaleka jediná. *(pokračování na další straně)*

Spočítáš, kolik možných hesel existuje, pokud včelky používají jen slova ze slovníku spisovného včelího jazyka délky 5 znaků? A jak dlouho potrvá vosám vyzkoušet všechna hesla, pokud zvládají za sekundu vyzkoušet 100?

Včelích slov o délce pěti znaků je dohromady 15 427. Aby si je včelky nepletly, každé takové slovo se liší od každého jiného alespoň o dva znaky. Takže se nestane, že by změnou jednoho písmena na číslo ve dvou různých slovech šlo vytvořit stejné slovo.

Podúloha vi)

(1 bod)

Pokud byste byli na místě včelek, jaké heslo byste si raději zvolili? Znakové jako v ii), nebo ze slovíček jako v iv)? Zkuste popsat proč.