

Kategorie mladší

Úloha 1A Tabulka čokolády

(6 bodů)



Zvířátka si chtějí rozdělit tabulku čokolády. Ta má tvar obdélníku a skládá se z několika dílků. Vědí, že na každé straně obdélníku jsou alespoň dva dílky a každá strana obdélníku se skládá z jiného počtu dílků. Nechce se jim počítat, kolik celkem dílků čokoláda má, ale vědí, že jich je méně než 100. Při dělení zvířátka ale narazila na problém. Nedokázala si čokoládu spravedlivě rozdělit, pokud se sešla ve dvou, třech, čtyřech ani pěti.

Porad' zvířátkům, kolik se jich nejméně musí sejít, aby si čokoládu mohla spravedlivě rozdělit. Najdi všechna možná řešení, tedy nějaký přepis nebo vzoreček, pomocí kterého jde každé řešení popsat.

Úloha 2A Špendlíky

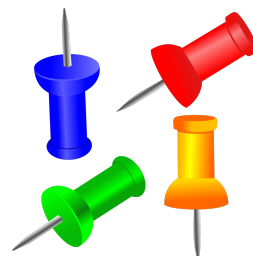
(7 bodů)

Ježek Jarek a dikobraz Derek mají zvláštní zálibu ve sbírání špendlíků. Aby se špendlíky neztratily, je potřeba každý z nich uložit do samostatné přihrádky speciální krabice. Vyrobit takovou krabici trvá přesně tolik minut, kolik má krabice přihrádek. Oba kamarádi odmítají mít svou sbírku špendlíků uloženou ve více krabicích, vždy když jim tedy dojde místo, musí vyrobit krabici novou. Jarek i Derek každý začínají s krabicí s jednou přihrádkou, mají ale různé přístupy k vyrábění nových krabic. Když Derekovi dojde místo na špendlíky, vyrobí krabici, která má o jednu přihrádku více, špendlíky přesune a starou nepotřebnou krabici zahodí. Naproti tomu Jarek, pokud mu dojde místo, vyrobí krabici, která má dvakrát více přihrádek než předchozí, špendlíky přesune a starou krabici opět zahodí.

Vložit nový špendlík do přihrádky trvá 1 minutu, přesunout špendlík (tedy vyjmout špendlík ze staré krabice a vložit do nové) trvá také 1 minutu. Oba začínají s nula špendlíky.

Jarek a Derek dostávají vždy každý jeden špendlík za rok. Derek se Jarkovi směje, že vyráběním krabiček dopředu ztrácí zbytečně moc času. V jakém roce poprvé stráví Jarek vyráběním a ukládáním špendlíků více času než Derek?

Jarek je ale přesvědčen, že ačkoliv některé roky stráví údržbou sbírky více času než Derek, celkově mu to zabere času méně. Kdo z kamarádů tedy v šestém roce strávil údržbou sbírky celkově více času? Dokážeš nějak obecně vyjádřit, v jakých letech stráví Jarek údržbou více času než Derek?



Témátko 3A Morseovka na míru

(celkem 10 bodů)

Hvozdík Hubert si rád čte předpovědi počasí. Získává je z převeliké vzdálenosti telegrafem a každý jeden přenesený znak nebo písmeno stojí peníze. Protože posílat jen jedničky a nuly je nejlevnější, chtěl by vymyslet kódy, kterými by informace o počasí zakódoval. Naštěstí je možných projevů počasí v jeho kraji jen pár a každý se vyskytuje s nějakou pravděpodobností.

- 10 %, že bude foukat
- 40 % bude hezky
- 5 % bude bouřka
- 10 % bude vedro
- 25 % bude mírně zataženo
- 10 % bude deštík

Podúloha i) (2 body)

Vymysli pro Huberta kód takový, aby ke každému počasí byla přiřazená posloupnost jedniček a nul (které budeme říkat kódové slovo) tak, že pokaždé, když dostane tuto posloupnost, bude přesně vědět, jaké to má být počasí.

Podúloha ii) (1 bod)

Hubert by si rád nechal posílat každý den předpověď na několik týdnů dopředu. Tedy bude posílat několik kódových slov najednou. Zajímalo by ho proto, jak bude průměrně dlouhá zpráva z kódových slov, která mu každý den přijde. Spočítej tuto pravděpodobnou průměrnou délku slova ze svého kódu z bodu 1) a pravděpodobností pro počasí.

Podúloha iii) (3 body)

Hubert tráví příliš času dekódováním. Je to tím, že některá kódová slova se můžou (když jsou napsaná hned za sebou bez mezer) tvářit jako jiná kódová slova. Přepiš svůj kód tak, aby se žádné kódové slovo nedalo napsat jako jiné kódové slovo s přiřazenými znaky 0 a 1 na konci. Tím, když bude číst zleva doprava, bude Hubert ihned vědět, jakmile dočte nějaké kódové slovo a může ho rovnou dekódovat na počasí. A protože chce Hubert ušetřit, zkus zařídit, aby měl kód průměrnou délku jako v bodě 2) co nejkratší, ideálně nanejvýš 2,3.

Podúloha iv) (3 body)

Jak je z údajů o počasí zřejmé, v Hubertově kraji může pršet, dokonce i hřmít (dohromady 15% času!) - a to neblaze ovlivňuje přenos na telegrafní síti. Bylo by hezké, kdyby Hubert mohl nějak odhadnout, že se zpráva poškodila, obzvláště když mu přijde předpověď na delší časový úsek. Rozhodne se, že z každých (až) osmi nul a jedniček si nechá spočítat jednu nulu nebo jedničku navíc, říkejme jí třeba C.

Představme si zprávu, která vypadá následovně:

$$11000101\ 10111 = 13\ \text{znaků}$$

Po přidání kontrolního čísla pak nová zpráva bude vypadat:

$$11000101\ C_1\ 10111\ C_2 = 15\ \text{znaků}$$

Jakou informaci by si do C_x (kde x značí pořadí každé započaté osmice nul a jedniček) mohl schovat a jak by mu pomohla poznat, že je něco špatně? Přeci jen, pak by mohl zprávu telegrafní společnosti reklamovat, dostat ji znova a neplatit.

Podúloha v) (1 bod)

Hubert tedy vymyslel, jakou informaci do C schová. Přemýšlí však, kolik ho přidání jednoho čísla za každou započatou osmici bude stát.

Řekněme, že Hubert bude dostávat předpověď počasí na dva dny dopředu (tedy dvě kódová slova). Jaká bude průměrná délka zprávy i s kontrolní nulou/jedničkou? Pro výpočet můžete použít jakýkoli kód z úlohy 1) nebo 3).

Kategorie starší

Úloha 1B Únos

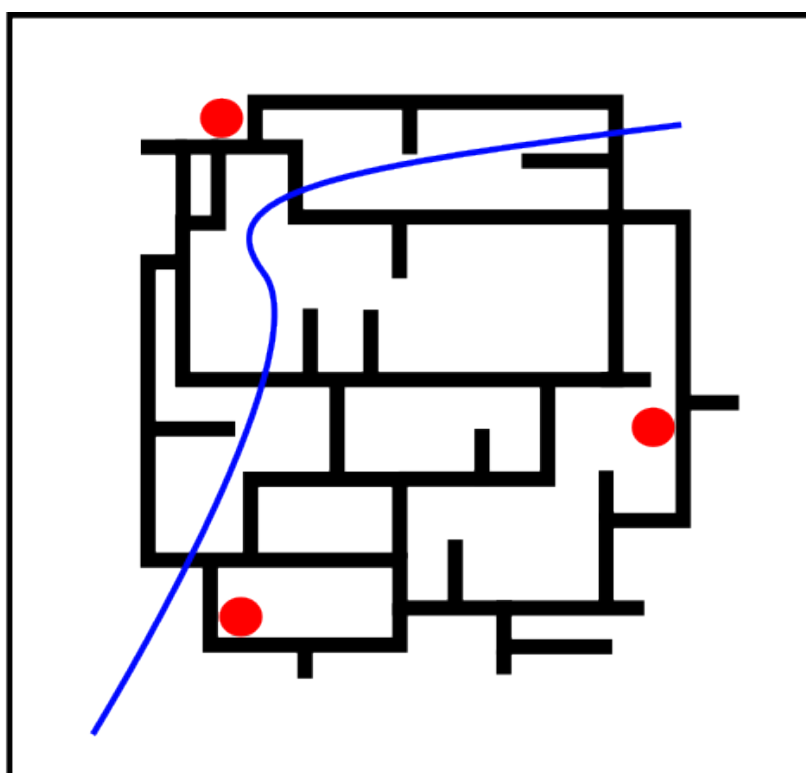
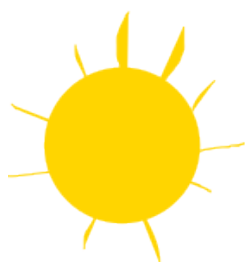
(5 bodů)

Nebohá tapířice Tamara byla unesena! Večer se v poklidu procházela městem, když tu jí najednou někdo zavázal oči a naložil ji do auta. Vyděsila se natolik, že vůbec nebyla schopná sledovat, kam ji přivezli. Nicméně si je jistá, že město neopustili - to by museli projít přes kontrolní stanoviště na hranicích a to se určitě nestalo.

Tamara se ale jen tak nevzdá. Umyslela si, že příště bude dávat dobrý pozor, kudy pojedou. Příležitost k tomu dostala druhý den v podvečer, kdy ji někdo opět dovedl do auta. Slunce už skoro zapadalo, takže světlo přicházelo od západu.

Odbočili dvakrát po sobě doprava, pak doleva. Poté znovu dvakrát po sobě doprava a jednou doleva. Následovala zatáčka doprava - tehdy Tamara cítila, že mají slunce v zádech. Poté zabočili doleva a na této silnici po nějaké chvíli přejeli přes most přes řeku. Kousek za mostem zahrnuli doleva, po nějaké chvíli opět doleva a poté doprava. V tu chvíli měli po pravé ruce odbíjející hodiny. Následovala zatáčka doleva, poté doprava a poté dvě doleva. Pak překonali řeku a jen chvíli na to měla Tamara pocit, že po téhle cestě už jednou jeli. Stejně tak odbočka doleva byla povědomá, ale na následné odbočce doprava se zase vydali někam, kde to nepoznávala. Následovaly dvě odbočky doprava, dvě doleva a tam se nyní nachází.

V novém úkrytu se Tamaře podařilo najít telefon a rychle poslat všechny tyhle informace policejnímu důstojníkovi hafanovi Herculovi. Ten nyní sedí nad mapou a dumá, kde se Tamara nachází. Stejně tak by pro něj byla užitečná informace o tom, kde její cesta začínala - očividně si na to místo bude muset posvítit. Poradíš mu, kde se nachází oba úkryty a zakreslíš, kudy vedla jejich cesta?



Obrázek 1: Plán města

Úloha 2B Fascinující vitrážová okna

(8 bodů)

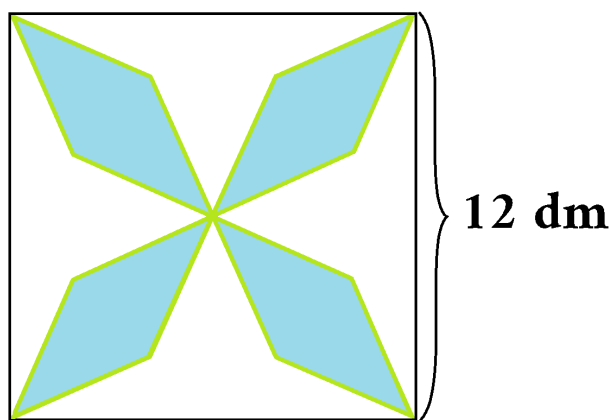
Nejoblíbenějším místem architekta šneka Šimona v celé zemi zvířátek je futuristický kostel Krále zvířat lva, který byl postaven velmi nedávno. Šimon je kostelem naprosto fascinován, často u něj sedává a prohlíží si jeho originální vitrážová okna.

Sám Šimon dostal za úkol vytvořit projekt nové radnice na náměstí Krále zvířat lva, která by se měla nacházet přímo naproti kostelu. Proto by šnek Šimon rád použil nějaké výrazné spojovací prvky, aby estetický dojem z celého náměstí byl jednotný. Nejvýraznější mu připadají právě vitrážová okna, a tak by potřeboval vědět, jaké rozměry takové vitrážové okno má.

Vidí, že okna kostela jsou ve tvaru čtverce a v každém okně se nachází vitráž modré barvy ve tvaru čtyř kosočtverců zdobená zeleným olemováním (viz obrázek).

Od stavitele kostela šimpanze Štefana se šnek Šimon dozvěděl, že strana okna je dlouhá přesně 12 dm. Štefan Šimonovi také prozradil, že celkově vitráže zabírají přesně 1/3 obsahu celého okna. Nic dalšího si však zapomnětlivý Štefan nepamatuje a plány kostela nemůže najít.

Poradíš Šimonovi, jak dlouhá je strana jednoho kosočtverce a kolik plechovek barvy bude Šimon potřebovat jen na olemování vitráže zelenou barvou, když jedním namočením štětce Šimon natře 3 dm hrany a jedna plechovka vystačí na 14 namočení štětce?



Obrázek 2: Vitrážové okno

Témátko 3B Morseovka na míru

(celkem 10 bodů)

Hvozdík Hubert si rád čte předpovědi počasí. Získává je z převeliké vzdálenosti telegrafem a každý jeden přenesený znak nebo písmeno stojí peníze. Protože posílat jen jedničky a nuly je nejlevnější, chtěl by vymyslet kódy, kterými by informace o počasí zakódoval. Naštěstí je možných projevů počasí v jeho kraji jen pár a každý se vyskytuje s nějakou pravděpodobností.

- 10 %, že bude foukat
- 40 % bude hezky
- 5 % bude bouřka
- 10 % bude vedro
- 25 % bude mírně zataženo
- 10 % bude deštík

Podúloha i) (2 body)

Vymysli pro Huberta kód takový, že ke každému počasí bude přiřazena posloupnost jedniček a nul (které budeme říkat kódové slovo) tak, že pokaždé když dostane tuto posloupnost, přesně bude vědět, jaké to má být počasí.

Podúloha ii) (1 bod)

Hubert by si rád nechal posílat každý den předpověď na několik týdnů dopředu. Bude tedy posílat několik kódových slov najednou. Zajímalo by ho proto, jak bude průměrně dlouhá zpráva z kódových slov, která mu každý den přijde. Spočítej tuto pravděpodobnou průměrnou délku slova ze svého kódu z bodu 1) a pravděpodobností pro počasí.

Podúloha iii) (3 body)

Hubert tráví příliš času dekódováním. Je to tím, že některá kódová slova se můžou (když jsou napsaná hned za sebou bez mezer) tvářit jako jiná kódová slova. Předělej svůj kód tak, aby se žádné kódové slovo nedalo napsat jako jiné kódové slovo s připsanými znaky 0 a 1 na konci. Tím, když bude číst zleva doprava, bude Hubert ihned vědět, jakmile dočte nějaké kódové slovo a může ho rovnou dekódovat na počasí. A protože chce Hubert ušetřit čas ještě více, zkus zajistit, aby měl kód průměrnou délku jako v bodě 2) dlouhou nanejvýš 2,3.

Podúloha iv) (3 body)

Jak je z údajů o počasí zřejmé, v Hubertově kraji může pršet, dokonce i hřmít (dohromady 15% času!) - a to neblaze ovlivňuje přenos na telegrafní síti. Bylo by hezké, kdyby Hubert mohl nějak odhadnout, že se zpráva poškodila, obzvláště když mu přijde předpověď na delší časový úsek. Rozhodne se, že z každých (až) osmi nul a jedniček si nechá spočítat jednu nulu nebo jedničku navíc, říkejme jí třeba C.

Představme si zprávu, která vypadá následovně:

$$11000101\ 10111 = 13\ \text{znaků}$$

Po přidání kontrolního čísla pak nová zpráva bude vypadat:

$$11000101\ C_1\ 10111\ C_2 = 15\ \text{znaků}$$

Jakou informaci by si do C_x (kde x značí pořadí každé započaté osmice nul a jedniček) mohl schovat a jak by mu pomohla poznat, že je něco špatně? Přeci jen, pak by mohl zprávu telegrafní společnosti reklamovat, dostat ji znovu a neplatit.

Podúloha v) (1 bod)

Hubert tedy vymyslel, jakou informaci do C schová. Přemýšlí však, kolik ho přidání jednoho čísla za každou započatou osmici bude stát.

Řekněme, že Hubert bude dostávat předpověď počasí na dva dny dopředu (tedy dvě kódová slova). Jaká bude průměrná délka zprávy i s kontrolní nulou/jedničkou? Pro výpočet můžete použít jakýkoli kód z podúlohy i) nebo iii). Vždy ale uveďte z jakého kódu jste při výpočtech vycházeli.