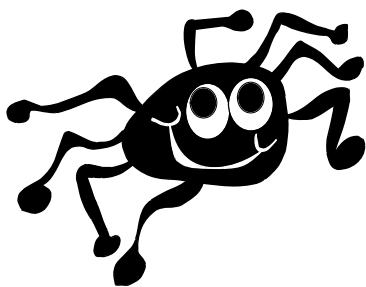


Kategorie mladší

Úloha 1A Pavoučí přezůvky

(6 bodů)



Pavoučci Pavlína a Patrik se radují z vánočních dárků - každý z nich dostal krásnou sadu bot na všech osm nožiček. Když si je ale zkoušeli, zjistili, že Patrikovi boty jsou dvakrát těžší než Pavlíniny. Patrika potom napadlo, že by se mohli s nazutými botami zvážit. U sebe zjistil, že zcela obutý váží celkem 82 mg, zcela obutá Pavlína oproti tomu vážila jen 66 mg. Bez bot přitom oba pavoučci váží stejně. Pavoučky by nyní zajímalo, kolik váží jedna bota z Pavlíniny sady a kolik ta z Patrikovi. Vysvětlíš jim, jak to mohou zjistit? A kolik tedy váží jedna bota z každé sady, a kolik váží samotní pavoučci?

Úloha 2A Pištivé piškvorky

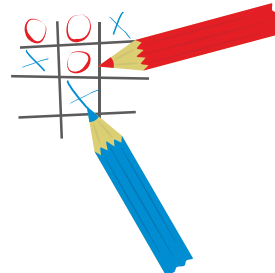
(7 bodů)

Myšky Majka a Mařka dostaly za úkol zahrát si piškvorky - a ne jen tak ledajaké. Hrají na tabulce 8×8 a za každých 6 znaků, které se podaří jedné z myšek vyskládat do řady, dostane kousek sýra. Pokud je v řadě 7 nebo 8 kousků, nic navíc už nedostane. Řady mohou být vodorovné, svislé i diagonální.

Majka a Mařka jsou myšky podšité, a proto se shodly předem, že nebudou hrát proti sobě. Naopak se pokusí zajistit, aby obě získaly co nejvíce sýra. Snaží se tak naplánovat, na jaká místa mají umístit své symboly (kolečko či křížek), aby byly splněny následující tři podmínky:

1. obě chtějí získat co nejvíce sýra,
2. obě dvě ve finále získají stejné množství sýra (tedy aby v tabulce bylo stejné množství zaplněných řad kolečky i křížky),
3. hra končí až ve chvíli, kdy je celá tabulka vyplněná, myšky se střídají po každém tahu, je tedy nutné, aby tabulka byla zaplněná celá a aby polovina políček obsahovala kolečka a polovina křížky

Dokážeš přijít s návrhem, který by uspokojil jejich požadavky? Poznámka: Klidně pošli i řešení, u kterého si nejsi jistý/á že je nejlepší možné. Myšky mají hlad, a nějakým tím bodíkem jistě ocení jakoukoli radu, díky které dostanou aspoň nějaký sýr - hlavně když ho obě dostanou stejné množství :-). Nezapomeň však popsat, jak ses k řešení dostal/a - tj. jaké myšlenky Tě k němu vedly.



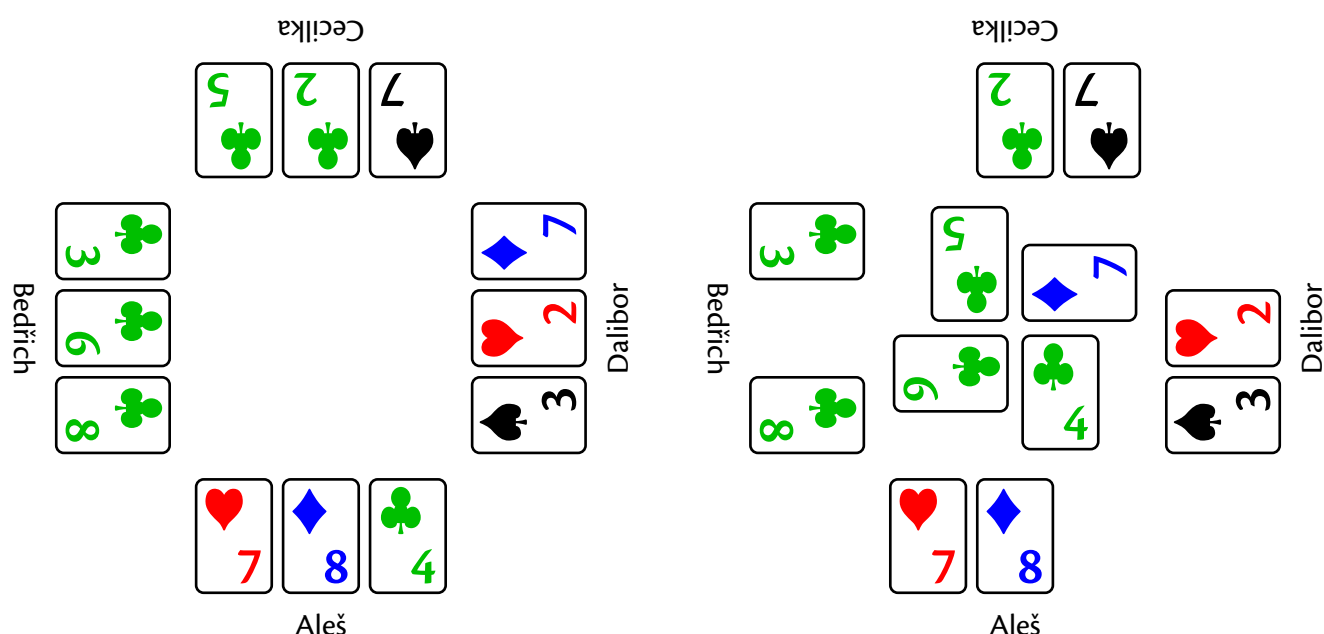
Témátka 3A Karetní

(celkem 10 bodů)

Aligátor Aleš, buvol Bedřich, cibetka Cecilka a dikobraz Dalibor si vymysleli karetní hru. Hrají s balíčkem 32 karet, v němž má každá karta jednu ze čtyř barev – piky (♠), srdce (♥), kára (♦) nebo kříže (♣) – a jednu z osmi hodnot (1 až 8). Hráči začínají každý s osmi kartami a postupně sehraji několik *štychů*: každý postupně vynesel jednu ze svých karet (podle pravidel níže), načež se na základě těchto karet pozná, který z hráčů tento štych sebere. Vynášení karet do štychů a jejich sbírání se řídí těmito pravidly:

- (i) Jeden z hráčů štych zahajuje. Ten si může zcela libovolně vybrat jednu z karet, které drží v ruce, a vynést ji. Barvu této první karty budeme nazývat *barvou štychu*. Postupně pak po směru hodinových ručiček vynášejí karty další hráči.
- (ii) *Kdo může ctít barvu, ctí barvu*: pokud hráč drží v ruce nějaké karty v barvě štychu, musí vynést kartu v této barvě. Pouze pokud už v ruce nedrží žádnou kartu v barvě štychu, může vynést libovolnou jinou kartu.
- (iii) *Kdo může přebíjet, přebíjí*: pokud hráč může v barvě štychu vynést nějakou vyšší kartu, než všechny dosavadní karty v barvě štychu v tomto štychu, musí tak učinit. Pokud má více karet, kterými lze přebít, vybere si některou z nich libovolně. Zdůrazněme, že toto pravidlo se týká pouze karet v barvě štychu: pokud hráč nemůže ctít barvu, pak už se na hodnotu karty nijak neohlídí, a naopak pokud ctí barvu, nemusí přebíjet hodnoty karet, které nejsou v barvě štychu.
- (iv) Jakmile každý z hráčů vynesl do štychu jednu kartu, štych sebere ten, kdo vynesl nejvyšší kartu v barvě štychu. Tento hráč pak zahájí následující štych. Karty ze sebraného štychu mizí zcela pryč ze hry – nikdo si je nebere zpět do ruky.
- (v) Hra končí poté, co se odehraje osm štychů a hráči již nemají v rukou žádné karty.

Pro ilustraci uvedme příklad štychu sebraného korektně podle pravidel. Pro jednoduchost uvažujme okamžik hry, hráči drží po třech kartách jako na obrázku 1a a nechť Cecilka zahajuje další štych.



(a) Nechť mají hráči na rukou tyto karty. Cecilka zahájí štych křížovou pětkou.

(b) Štych proběhl takto. Sebere ho Bedřich svojí křížovou šestkou.

Obrázek 1

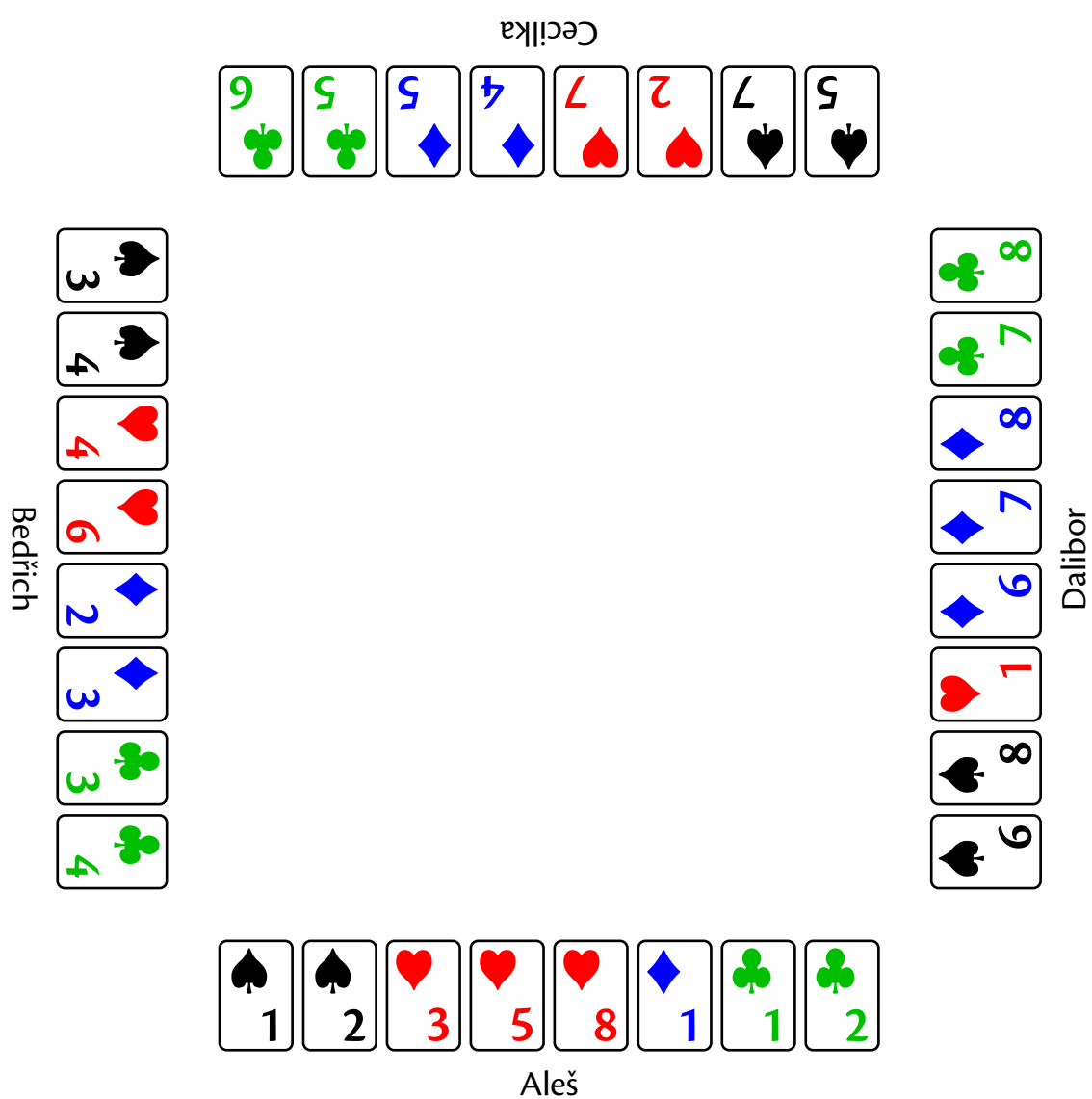
Dejme tomu, že zvolí křížovou pětku. Další na tahu je pak Dalibor, který v ruce nedrží žádné kříže. Nemůže tedy ctít barvu, proto může kartu k vynesení zvolit libovolně – a zároveň tak okamžitě ví, že touto kartou tento štych nesebere. Dejme tomu, že Dalibor zvolí svoji károvou sedmu. Nyní je na řadě Aleš, který v ruce drží přesně jednu křížovou kartu. Má tedy možnost ctít barvu, takže musí ctít barvu – musí vynést svou křížovou čtyřku. Všimněme si, že Aleš tímto nepřebíjí Cecilčinu křížovou pětku, protože v křížích přebíjet nedovede. Kárová sedma, kterou vynesl Dalibor, Aleše nijak neovlivňuje (ani svou barvou, ani svou hodnotou). Poslední přichází na tah Bedřich. Ten drží hned tři křížové karty, určitě tak bude muset ctít barvu. Dosud nejvyšší křížová karta ve štychu je pětku a Bedřich má karty vyšší než 5, takže bude muset přebíjet. To znamená, že si může vybrat mezi svou šestkou a osmičkou, protože obě přebíjí pětku. Na tom nic nemění ani Daliborova vynesená sedma, neboť ta není v barvě štychu, a nenutí tak Bedřicha, aby ji přebíjel. Má tak na výběr ze dvou karet, dejme tomu, že si vybere šestku.

Tímto je štych ukončen a sestává se z Cecilčiny křížové pětky, Daliborovi kárové sedmy, Alešovi křížové čtyřky a Bedřichovi křížové šestky. Daliborova sedma se nepočítá, neboť není v barvě štychu, takže štych sebere Bedřich se svou křížovou šestkou a bude zahajovat další štych.

Pro zajímavost si zde rovnou můžeme rozmyslet, že Bedřich už nutně sebere i oba dva zbývající štychy, ať už budou zbylí tři hráči hrát jakkoliv. To je způsobeno tím, že Bedřich už drží pouze kříže, takže následující štych bude křížový. Mezi ostatními hráči však už zůstává

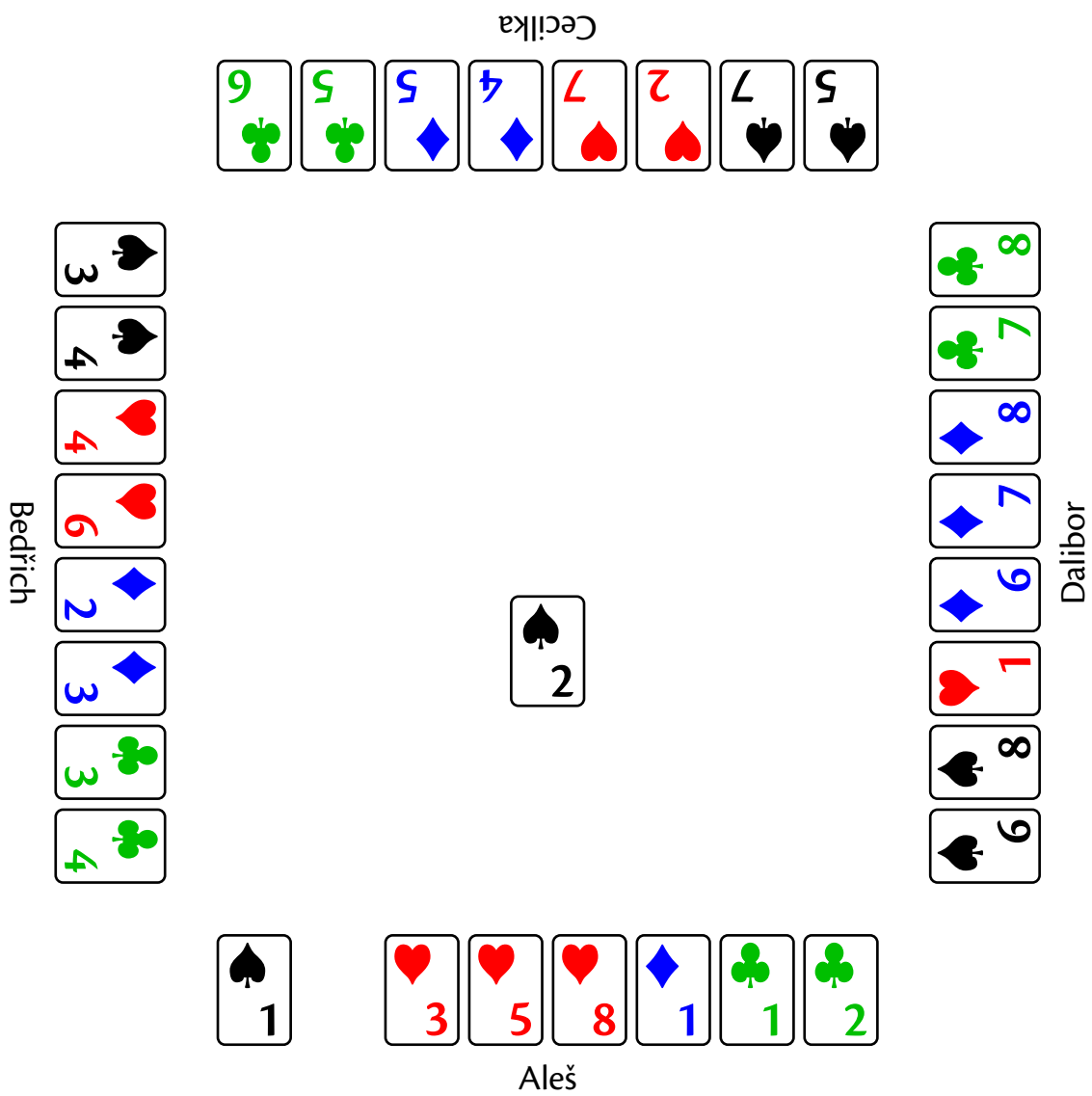
jen jedna křížová karta – Cecilčina křížová dvojka, která nedovede přebít ani Bedřichovu trojku, ani jeho osmičku. Další štych tak určitě bude muset sebrat Bedřich, stejně jako ten poslední, ve kterém vynese křížovou kartu a nikdo z ostatních nebude schopen ctít barvu.

Taková jsou pravidla hry, kterou Aleš, Bedřich, Cecilka a Dalibor hrají. Dosud jsme ale neřekli, co je cílem. Ten se totiž může různit, podle toho, jak se hráči dohodnou, a podle toho lze hrát v mnoha variantách. Někdy může být cílem sebrat co nejvíc štychů nebo v nich sebrat nějaké konkrétní karty, jindy zase může být cílem brát štychů co nejméně. Zvířátka zrovna hrají jednu takovou: karty jsou rozdány jako na obrázku 2 a hraje se s odkrytými kartami, takže každý vidí i to, co mají všichni ostatní na ruce. Aleš vyzval své spoluhráče k *malé hře*: tvrdí, že dovede hrát tak, aby během hry nesebral žádný z osmi štychů. Tato výzva mu dává právo zahájit první štych, zatímco Bedřich, Cecilka a Dalibor potřebují vymyslet strategii, jak jej porazit a hrát tak, aby Aleš vynuceně sebral nějaký štych. Aleš mezitím zahájil štych svojí pikovou dvojkou, Bedřich, Cecilka a Dalibor se nyní musí rozhodnout, jaké karty vynést do prvního štychu (viz obrázek 3).



Podúloha i) (6 bodů)

Porad' Bedřichovi, Cecilce a Daliborovi, jak mají v situaci na obrázku 3 hrát, aby Aleše donutili sebrat nějaký štych. Nemusíš vymýšlet či vysvětlovat, jak by na to měla zvířátka přijít, nebo popisovat obecné strategie, stačí, když popíšeš, které karty postupně vynášet do jednotlivých štychů, dokud nedonutí Aleše sebrat štych. Pokud chceš, mohou tvoje rady zohledňovat to, jaké karty zahrál Aleš. Dbej na to, aby tvoje rady neporušovaly žádné z pravidel a aby Alešova prohra byla skutečně vynucená, tedy aby neměl žádný způsob, jak se sebrání štychu vyhnout.



Obrázek 3: Aleš zahajuje první štych pikovou dvojkou.

Podúloha ii) (4 body)

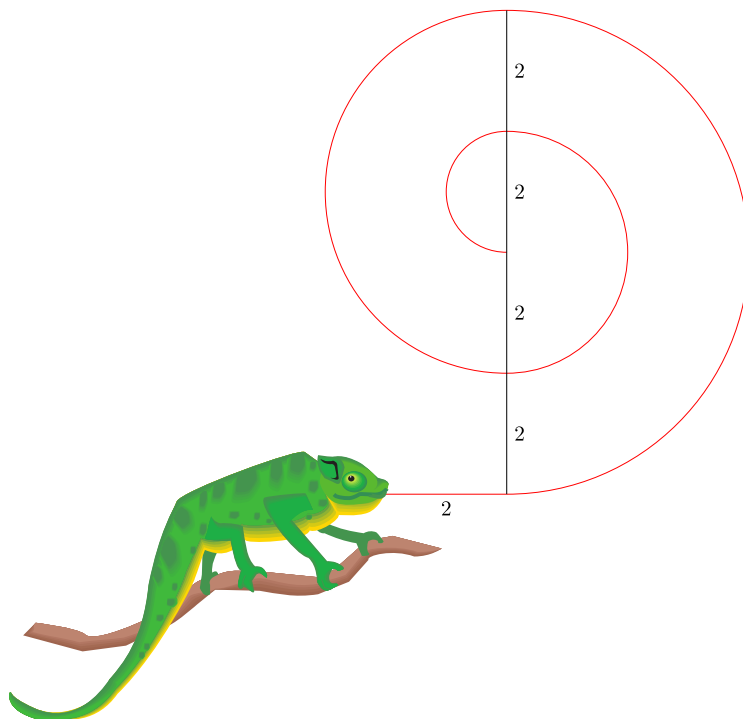
Z předchozí podúlohy vyplývá, že piková dvojka není pro Aleše správnou kartou pro první štych, pokud si chce zajistit výhru. Urči kartu, kterou má (v situaci z obrázku 2) zahájit první štych, aby vyhrál. Zdůvodni co nejlépe, proč už po zvoleném tahu nebudou Bedřich, Cecilka a Dalibor schopni Aleše přimět sebrat nějaký štych, ať už se budou snažit sebevíc.

Kategorie starší

Úloha 1B Chameleoní lov

(5 bodů)

Chameleon Chrudoš se rozhodl dovést k dokonalosti své lovecké dovednosti. K tomu by potřeboval spočítat délku svého jazyka - aby věděl, z jaké vzdálenosti může číhat na mouchy. Ví, že je svůj jazyk schopen seskládat tak, jak vidíte na obrázku. V takovou chvíli se skládá vlastně ze čtyř půlkružnic a jedné úsečky. Co se rozměrů týče, vzdálenost mezi stěnami jazyka ve svislé ose jsou vždy 2 centimetry (viz obrázek) a dvoucentimetrová je i závěrečná úsečka. Chrudoš je sice dobrý lovec, ale matematika mu vždycky unikala. Spočítáš tedy místo něj, jak dlouhý má jazyk?



Úloha 2B Telefon

(8 bodů)

Bělásek Benedikt je velký koumák a vymýšlí ostatním zvířátkům různé vynálezy. Teď zrovna zkouší zkonstruovat telefon, který by pracoval následujícím způsobem: Pokud je sluchátko položené, neprotéká telefonem elektrický proud a nic se neděje. Pokud je sluchátko vyvěšené (buď položené vedle telefonu, nebo pokud do něj někdo mluví), protéká telefonem proud a případně se přenáší zvuk. Vytáčení pak funguje pomocí krátkých elektrických impulzů, které typicky trvají 40-60 ms. Benedikt tedy potřebuje nějak odlišit vyvěšené sluchátko (dlouhodobě protékající proud) od vytáčení (proud protékající jenom velice krátkou dobu). To by chtěl udělat pomocí svého počítače. Benetiktův počítač má paměť, do níž lze uložit jedno takřka libovolně velké číslo, a ovládá několik velice jednoduchých příkazů:

- pamet=x — uloží do paměti počítače číslo x,
- pamet+x — přičte k číslu v paměti číslo x a výsledek uloží,
- pamet-x — odečte od čísla v paměti číslo x a výsledek uloží,
- pamet>x — porovná číslo v paměti s číslem x a rozhodne, zda je větší, či ne,
- pamet<x — porovná číslo v paměti s číslem x a rozhodne, zda je menší, či ne,
- proud — zjistí, zda telefonem protéká (1) či neprotéká (0) elektrický proud,
- impuls — vyšle telefonu signál, že právě proběhl elektrický impulz typický pro vytáčení,
- pockej x — před přejitím k dalšímu příkazu počká x ms,
- opakuj (prikaz) — opakuje příkazy v závorce tak dlouho, dokud nenarazí na příkaz konec,
- kdyz (podminka) pak (prikaz1) jinak (prikaz2) — pokud je podmínka pravdivá, provede příkaz 1, pokud není podmínka pravdivá, provede příkaz 2.



Následující program by tak například každých 5 ms zjistil, zda telefonem protéká proud, a ve chvíli, kdy by proud protékal, by uložil do paměti číslo 100 a ukončil se:

```
opakuj( kdyz(proud=1) pak(pamet=100, konec) jinak(pockej 5) )
```

Pomůžete Benediktovi napsat program, který zjistí, zda telefonem prochází elektrický impulz o délce 40-60 ms, a pokud ano, vyšle zprávu o tomto impulzu telefonu? Každé řešení se počítá, nicméně čím elegantnější to vaše bude, tím lépe :-). A nezapomeňte popsat, proč navrhujete zrovna toto řešení.

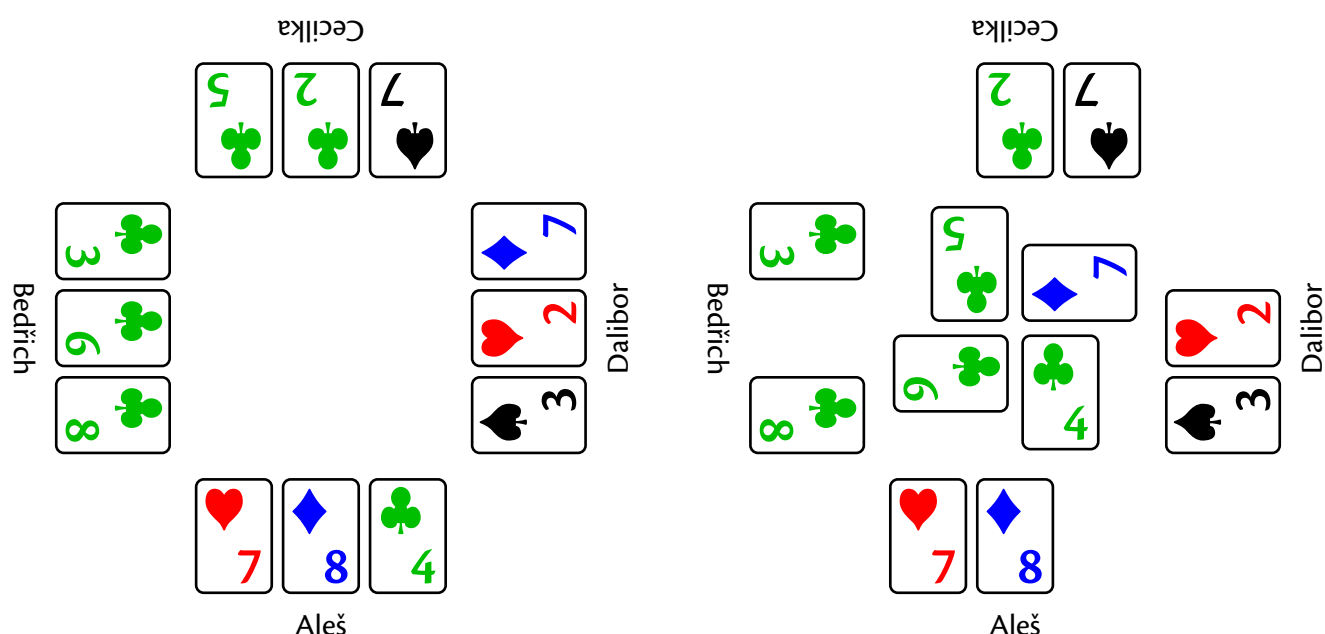
Témátko 3B Karetní

(celkem 10 bodů)

Aligátor Aleš, buvol Bedřich, cibetka Cecilka a dikobraz Dalibor si vymysleli karetní hru. Hrají s balíčkem 32 karet, v němž má každá karta jednu ze čtyř barev – piky (♠), srdce (♥), kára (♦) nebo kříže (♣) – a jednu z osmi hodnot (1 až 8). Hráči začínají každý s osmi kartami a postupně sehraji několik *štychů*: každý postupně vynesel jednu ze svých karet (podle pravidel níže), načez se na základě těchto karet pozná, který z hráčů tento štych sebere. Vynášení karet do štychů a jejich sbírání se řídí těmito pravidly:

- (i) Jeden z hráčů štych zahajuje. Ten si může zcela libovolně vybrat jednu z karet, které drží v ruce, a vynést ji. Barvu této první karty budeme nazývat *barvou štychu*. Postupně pak po směru hodinových ručiček vynášejí karty další hráči.
- (ii) *Kdo může ctít barvu, ctí barvu*: pokud hráč drží v ruce nějaké karty v barvě štychu, musí vynést kartu v této barvě. Pouze pokud už v ruce nedrží žádnou kartu v barvě štychu, může vynést libovolnou jinou kartu.
- (iii) *Kdo může přebíjet, přebíjí*: pokud hráč může v barvě štychu vynést nějakou vyšší kartu, než všechny dosavadní karty v barvě štychu v tomto štychu, musí tak učinit. Pokud má více karet, kterými lze přebít, vybere si některou z nich libovolně. Zdůrazněme, že toto pravidlo se týká pouze karet v barvě štychu: pokud hráč nemůže ctít barvu, pak už se na hodnotu karty nijak neohlíží, a naopak pokud ctí barvu, nemusí přebíjet hodnoty karet, které nejsou v barvě štychu.
- (iv) Jakmile každý z hráčů vynesl do štychu jednu kartu, štych sebere ten, kdo vynesl nejvyšší kartu v barvě štychu. Tento hráč pak zahájí následující štych. Karty ze sebraného štychu mizí zcela pryč ze hry – nikdo si je nebere zpět do ruky.
- (v) Hra končí poté, co se odehraje osm štychů a hráči již nemají v rukou žádné karty.

Pro ilustraci uvedme příklad štychu sebraného korektně podle pravidel. Pro jednoduchost uvažujme okamžik hry, hráči drží po třech kartách jako na obrázku 1a a nechť Cecilka zahajuje další štych.



(a) Nechť mají hráči na rukou tyto karty. Cecilka zahájí štych křížovou pětkou.

(b) Štych proběhl takto. Sebere ho Bedřich svojí křížovou šestkou.

Obrázek 1

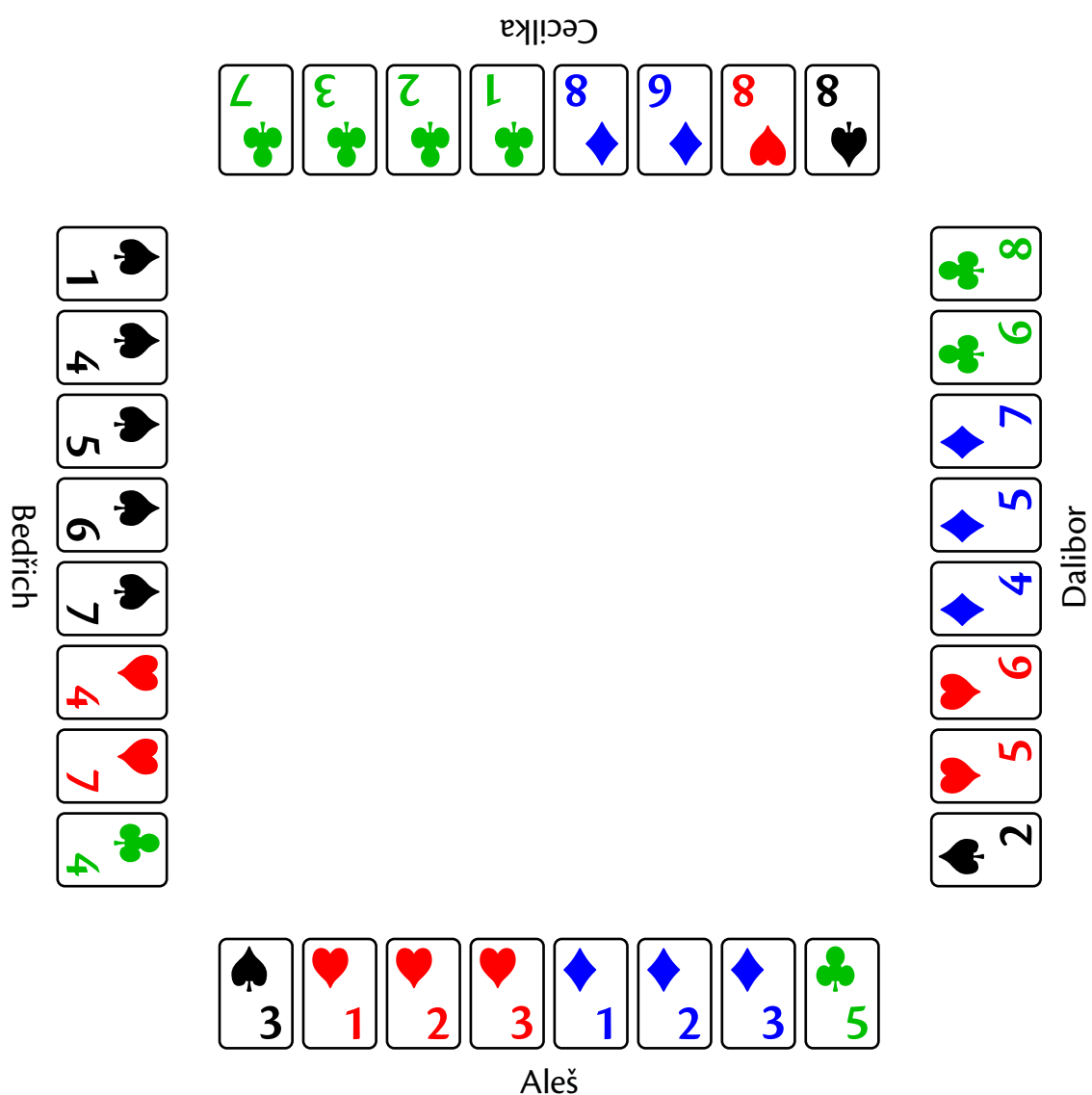
Dejme tomu, že zvolí křížovou pětku. Další na tahu je pak Dalibor, který v ruce nedrží žádné kříže. Nemůže tedy ctít barvu, proto může kartu k vynesení zvolit libovolně – a zároveň tak okamžitě ví, že touto kartou tento štych nesebere. Dejme tomu, že Dalibor zvolí svoji károvou sedmu. Nyní je na řadě Aleš, který v ruce drží přesně jednu křížovou kartu. Má tedy možnost ctít barvu, takže musí ctít barvu – musí vynést svou křížovou čtyřku. Všimněme si, že Aleš tímto nepřebíjí Cecilčinu křížovou pětku, protože v křížích přebíjet nedovede. Kárová sedma, kterou vynesl Dalibor, Aleše nijak neovlivňuje (ani svou barvou, ani svou hodnotou). Poslední přichází na tah Bedřich. Ten drží hned tři křížové karty, určitě tak bude muset ctít barvu. Dosud nejvyšší křížová karta ve štychu je pětku a Bedřich má karty vyšší než 5, takže bude muset přebíjet. To znamená, že si může vybrat mezi svou šestkou a osmičkou, protože obě přebíjí pětku. Na tom nic nemění ani Daliborova vynesená sedma, neboť ta není v barvě štychu, a nenutí tak Bedřicha, aby ji přebíjel. Má tak na výběr ze dvou karet, dejme tomu, že si vybere šestku.

Tímto je štych ukončen a sestává se z Cecilčiny křížové pětky, Daliborovi kárové sedmy, Alešovi křížové čtyřky a Bedřichovi křížové šestky. Daliborova sedma se nepočítá, neboť není v barvě štychu, takže štych sebere Bedřich se svou křížovou šestkou a bude zahajovat další štych.

Pro zajímavost si zde rovnou můžeme rozmyslet, že Bedřich už nutně sebere i oba dva zbývající štychy, ať už budou zbylí tři hráči hrát jakkoliv. To je způsobeno tím, že Bedřich už drží pouze kříže, takže následující štych bude křížový. Mezi ostatními hráči však už zbývá

jen jedna křížová karta – Cecilčina křížová dvojka, která nedovede přebít ani Bedřichovu trojku, ani jeho osmičku. Další štych tak určitě bude muset sebrat Bedřich, stejně jako ten poslední, ve kterém vynese křížovou kartu a nikdo z ostatních nebude schopen ctít barvu.

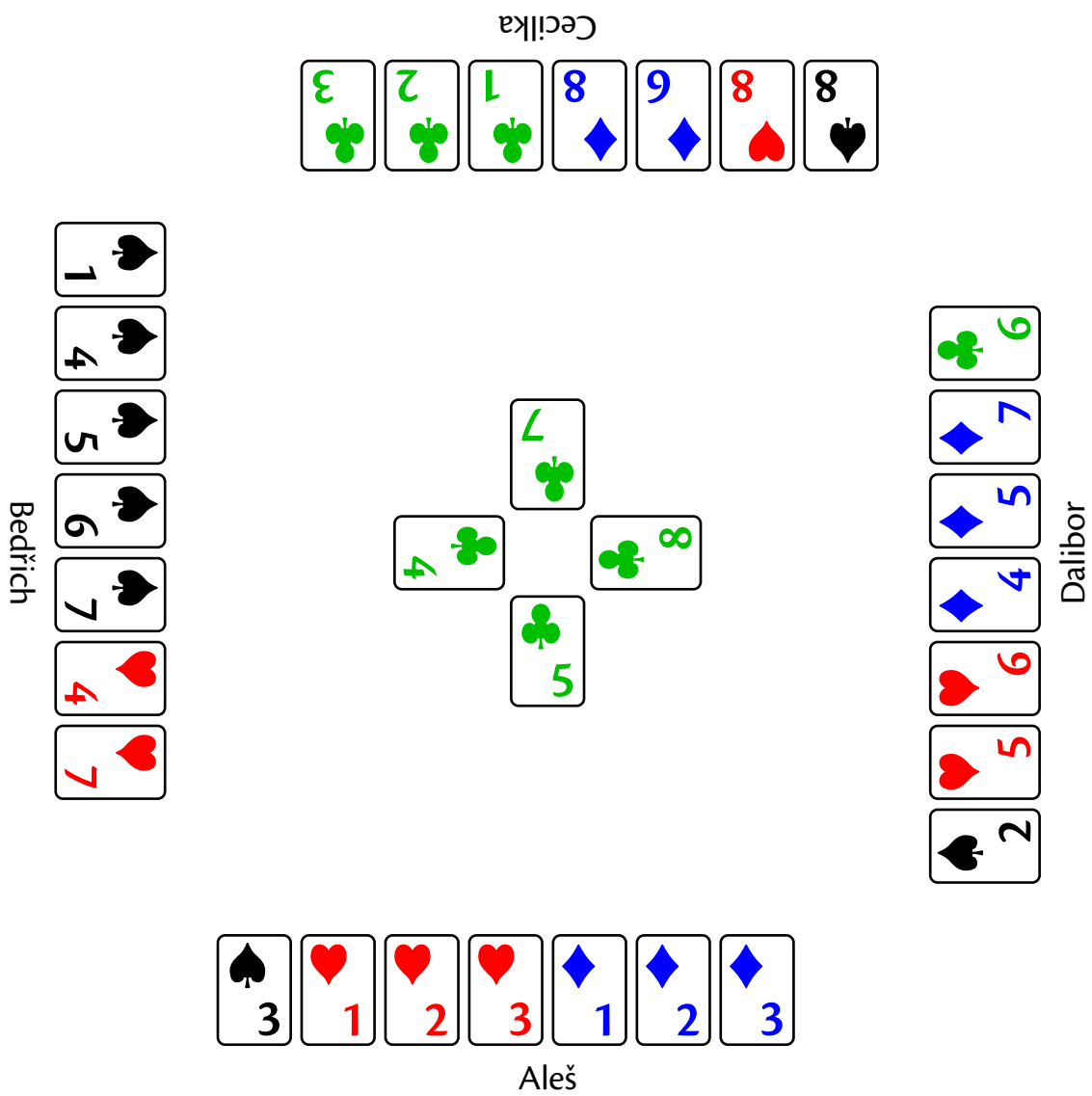
Taková jsou pravidla hry, kterou Aleš, Bedřich, Cecilka a Dalibor hrají. Dosud jsme ale neřekli, co je cílem. Ten se totiž může různit, podle toho, jak se hráči dohodnou, a podle toho lze hrát v mnoha variantách. Někdy může být cílem sebrat co nejvíc štychů nebo v nich sebrat nějaké konkrétní karty, jindy zase může být cílem brát štychů co nejméně. Zvířátka zrovna hrají jednu takovou: karty jsou rozdány jako na obrázku 2 a hraje se s odkrytými kartami, takže každý vidí i to, co mají všichni ostatní na ruce. Aleš vyzval své spoluhráče k *malé hře*: tvrdí, že dovede hrát tak, aby během hry nesebral žádný z osmi štychů. Tato výzva mu dává právo zahájit první štych, zatímco Bedřich, Cecilka a Dalibor potřebují vymyslet strategii, jak jej porazit a hrát tak, aby Aleš vynuceně sebral nějaký štych. Aleš mezitím zahájil štych svojí křížovou pětkou, následně Bedřich, Cecilka a Dalibor neměli na výběr a museli popořadě zahrát křížovou čtyřku, sedmu a osmičku (viz obrázek 3). První štych tak sebral Dalibor, takže bude zahajovat ten druhý.



Obrázek 2: Rozdání karet. Aleš zahájí první štych křížovou pětkou.

Podúloha i) (6 bodů)

Porad' Bedřichovi, Cecilce a Daliborovi, jak mají v situaci na obrázku 3 hrát, aby Aleše donutili sebrat nějaký štych. Nemusíš vymýšlet či vysvětlovat, jak by na to měla zvířátka přijít, nebo popisovat obecné strategie, stačí, když popíšeš, které karty postupně vynášet do jednotlivých štychů, dokud nedonutí Aleše sebrat štych. Pokud chceš, mohou tvoje rady zohledňovat to, jaké karty zahrál Aleš. Dbej na to, aby tvoje rady neporušovaly žádné z pravidel a aby Alešova prohra byla skutečně vynucená, tedy aby neměl žádný způsob, jak se sebrání štychu vyhnout.



Obrázek 3: První štych proběhl takto, sebere jej Dalibor.

Podúloha ii) (4 body)

Z předchozí podúlohy vyplývá, že křížová pětka není pro Aleše správnou kartou pro první štych, pokud si chce zajistit výhru. Urči kartu, kterou má (v situaci z obrázku 2) zahájit první štych, aby vyhrál. Zdůvodni co nejlépe, proč už po zvoleném tahu nebudou Bedřich, Cecilka a Dalibor schopni Aleše přimět sebrat nějaký štych, ať už se budou snažit sebevíc.