JÁMA LVOVÁ

Zadání 2. kola
XV. ročník

Ahoj!

Vítej v Jámě lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již patnáctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze čtyř kol, v každém na Tebe čekají dvě záludné úlohy a jedno rozsáhlejší *tématko*, kde Tě zasvětíme do určitého zákoutí matematiky, fyziky nebo informatiky. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na `https://jamalvova.cz` a dále na Facebooku a Instagramu.

Řeš úlohy samostatně, je to soutěž. Klidně ale hledej informace na internetu.

Pořádně popiš všechny svoje myšlenky! Bez postupu body nedostaneš.

I za částečné řešení či dobrý nápad získáš body.

Přihlásit se můžeš kdykoliv! Stačí poslat jedinou úlohu.

Formát úloh

Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. Je-li listů více, očísluj je, ať vše najdeme. Ke každé úloze napiš své jméno, příjmení, školu, třídu a e-mail. Pokud odevzdáváš přes webové stránky, dej každou úlohu do samostatného PDF dokumentu.

Svá řešení nám pošli do **5. února 2023** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Bětka, Honza, Honza, Káťa, Kobi, Lenička, Linda, Láďa, Lída, Martin, Matěj, Mája, Rézi, Zuzka a Zuzka

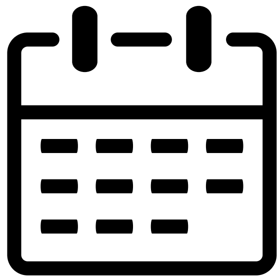
Kategorie mladší

Úloha 1A Cestování sluneční soustavou **(5 bodů)**

Antilopa Anežka při svých toulkách po Zemi narazila na zajímavou turistickou atrakci: model Sluneční soustavy, v němž jsou na cestě o délce přibližně 15,6 km umístěny modely Slunce a jednotlivých planet. Velikosti Slunce a planet i jejich vzájemné vzdálenosti jsou v poměru, který odpovídá skutečnosti. Anežka si model se zájmem prošla a byla to moc hezká procházka! Po cestě domů ji ale napadlo, že by bylo zajímavé, kdyby v modelu byla také naše (po Slunci) nejbližší hvězda, Proxima Centauri.

Jak dlouho by k jejímu modelu musela Anežka jít od modelu Slunce, pokud se na naučné tabuli dočetla, že rychlost chůze v modelu přibližně odpovídá rychlosti světla ve skutečnosti, a pokud Proxima Centauri je od Slunce vzdálená 4,22 světelných let? Dokážeš odhadnout, kolik kilometrů od modelu Slunce by byl model Proximy Centauri umístěný, pokud Anežka prošla celou atrakci za hodinu a půl? A pokud by se model Slunce nacházel u tebe doma, jak daleko od modelu Slunce by se potom nacházel model Proxima Centauri?

Úloha 2A Přednášková **(8 bodů)**



Na konferenci o Lichých funkcích pro sudokopytníky se sešlo celkem 10 přednášejících. Každému z nich byla přidělena vlastní učebna, ve které bude přednášet. Jelikož je o přednášky velký zájem a posluchači by se mohli v učebnách mačkat, bude probíhat vždy pět prezentací současně a přednášející je budou opakovat (těm to nijak nevadí, sami sebe poslouchají rádi). Všichni přednášející by si ale také rádi vyslechli prezentace všech svých kolegů. Pořadatelé proto rozdělili konferenci do 10 stejně dlouhých oddělených časových bloků. Každý přednášející stráví pět z těchto bloků ve své učebně výkladem a pět bude trávit na přednáškách ostatních. Obcházející stihne za jeden blok obejít dva své kolegy. Na svou vlastní přednášku si však potřebuje vyhradit blok celý. Nemůže strávit půl bloku mimo svou místnost a půl v ní přednášet.

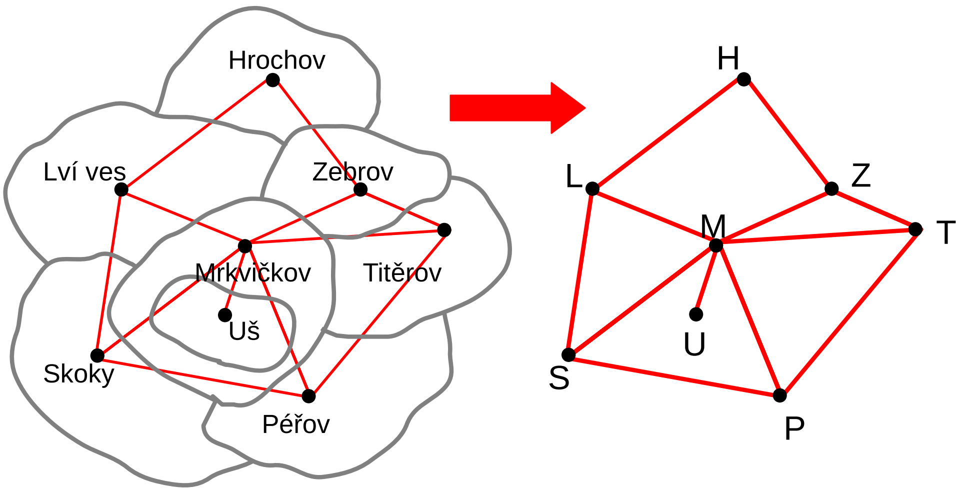
Pomož jim a napiš časový plán pro všech 10 bloků, ze kterého bude patrné, kdy má který přednášející obcházet a kdy má naopak přednášet, aby byly splněny všechny požadavky. A popiš svůj postup vytváření tohoto plánu tak, aby si zvířátka mohla další rok poradit sama a mohla ho využít třeba i pro jiný počet přednášejících. Popis musí být takový, aby se podle něj mohla řídit i ta méně nadaná zvířátka. Zkus ho tedy vymyslet a popsat tak, aby ho pochopil i lenochod Libor.

Tématko 3A Výstavní vesnice **(celkem 10 bodů)**

Zvířecí vesničky bojují o titul nejhezčí vesnice. Problém je v tom, že zdaleka ne všichni vědí, kde přesně jejich vesnice začíná a kde končí. Káně Klement se proto rozhodlo, že vytvoří velikou mapu, která do problému vnese jasno.

Klement rozkreslil vesničky a teď potřebuje katastr každé obce obarvit tak, aby se žádné dvě obce se stejnou barvou nedotýkaly. Jde na to vědecky, a proto si z vesnic vytvořil graf.

Graf je datová struktura (tj. uspořádání informací v prostoru, např. v paměti počítače), kterou tvoří body – vrcholy – a jejich spojnice – hrany. Graf si tedy můžeme představit jako (pojmenované) tečky pospojované čarami. Pro účely první úlohy nám budou vrcholy představovat vesnice. Hranou spojíme ty vrcholy, jejichž vesnice spolu přímo sousedí. Na obrázku je vidět převod kousku mapy na graf.



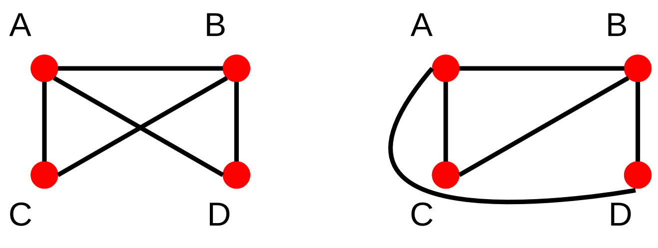
Obrázek 1: Převod kousku mapy na graf.

Ne všechna zvířátka vidí celé barevné spektrum, navíc je potřeba, aby barvy vesnic byly dobře odlišitelné. Klement se proto snaží obarvit celou mapu co nejméně různými barvami. Zatím má obarvený jen kousek mapy a zdá se, že čtyři barvy by mohly stačit.

Podúloha i) **(1 bod)**

Obarvi Klementovi graf z příkladu (viz obrázek 1) tak, abys nepoužil více než čtyři různé barvy. Vždy musí platit, že každé dva spojené vrcholy mají různou barvu. V jakém pořadí je nejlepší vrcholy barvit a proč?

Když graf překreslujeme na papír, může se stát, že se dvě hrany zkříží jako na obrázku 2. Někdy však stačí vhodněji nakreslit hrany nebo posunout vrcholy, a křížení zmizí. U některých grafů se křížení nevyhneme.



Obrázek 2: Překreslení hran grafu tak, aby se nekřížily.

Podúloha ii) **(2 body)**

Zkus nakreslit graf, který čtyřmi barvami obarvit nepůjde. To znamená, že nebude existovat takové rozvržení barev, aby pro každé dva spojené vrcholy platilo, že mají rozdílnou barvu. Stačí obecný graf, tj. hrany se ti můžou libovolně křížit. Hlavně nezapomeň napsat, proč není obarvení čtyřmi barvami možné.

Podúloha iii) **(3 body)**

Klement tvrdí, že graf, kde se hrany kříží, neodpovídá jeho situaci. Může existovat takové rozložení vesnic, aby jejich graf obsahoval křížící se hrany? Nebo lze každý graf vzniklý z mapy překreslit tak, aby se hrany nekřížily? Lze tak překreslit graf vzniklý v podúloze ii)?

Podúloha iv) **(4 body)**

Kozel Kryšpín hned všechno chápe. „No jó, jak je tam křížení, musí počet barev růst. Všechno je to úplně jednoduchý." Klement by rád mudrlanta usadil nějakým pěkným příkladem. Poradíš mu, jak by mohl sestrojit graf, který by sice nešel nakreslit bez křížení hran, ale zároveň by byl obarvitelný dvěma barvami?

Kategorie starší

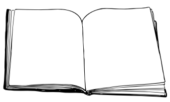
Úloha 1B Pavučinové cukroví (5 bodů)

Tarantule Tamara chce napéci Vánoční cukroví ve tvaru pavučin. V učené kuchařce Sklípkana Slívy se dočetla, že nejkrásnějšího tvaru dosáhne tím, že si nejprve připraví z těsta pravidelný šestiúhelník.

Na každé straně takového šestiúhelníku následně odebere kus kruhu tak, aby obvod vykrojené části kružnice tvořil celkově jednu šestinu celé kružnice, k níž tenhle úsek náleží. Návod je to krásný a obrázky vypadají přímo báječně, ale Tamara teď stojí před nelehkým úkolem.

Tamara si neví rady, jak velký poloměr má mít taková kružnice a jak daleko od středu strany šestiúhelníku má ležet její střed. Poraďjí jaké budou tyto hodnoty pro obecný šestiúhelník o straně délky r. A kolik budou konkrétně pro pro délku strany 6 cm?

Úloha 2B Zpěvníček (8 bodů)



Lišák Láďa si zařídil šanon na noty. Často ve svém zpěvníčku něco hledá, a tak ho má abecedně seřazený. Všechny jeho písničky jsou krátké, a proto se mu je daří vytisknout vždy na jednu stranu papíru. Protože ale neustále písničky přidává, zajímá ho, kolik času nejvíce stráví přeskládáváním svého zpěvníčku.

Zpěvníček má držáčky, kam se vkládají průhledné obaly, do kterých se vejdou vždy dvě stránky s písničkami prázdnými stranami k sobě. Láďovi nevadí, když jsou ve zpěvníčku maximálně dva obaly, ve kterých je jen jedna písnička. Jinak chce, aby všechny obálky byly plné.

Dát papír do a z obálky trvá 1 sekundu. Přidání nové obálky do šanonu nezabere žádný čas. Obálek má Láďa neomezené množství.

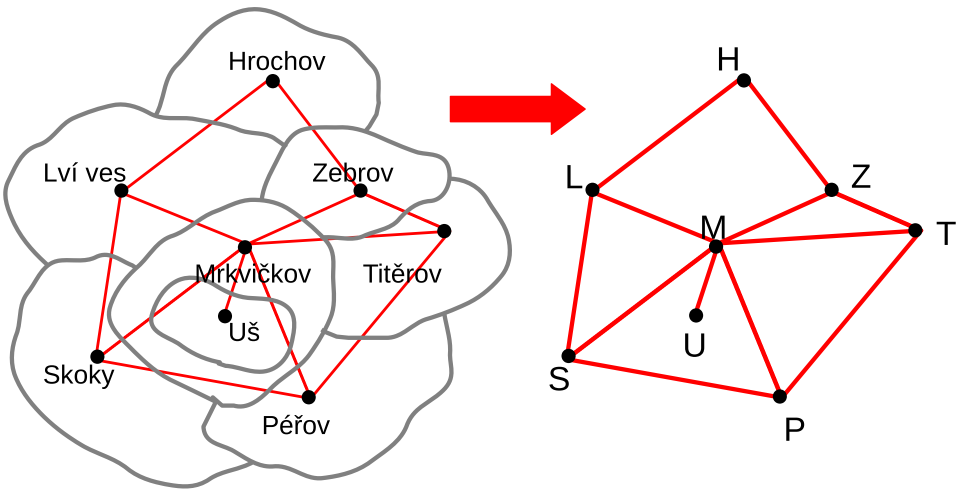
Kolik času může Lišákovi Láďovi nejvíce zabrat vložení nové písničky do zpěvníčku, ve kterém se již nachází N písniček vložených podle jeho pravidel? V jakém je to případě? A kolik nejméně času mu to může zabrat a v jakém případě k tomu dojde?

Tématko 3B Výstavní vesnice (celkem 10 bodů)

Zvířecí vesničky bojují o titul nejhezčí vesnice. Problém je v tom, že zdaleka ne všichni vědí, kde přesně jejich vesnice začíná a kde končí. Káně Klement se proto rozhodlo, že vytvoří velikou mapu, která do problému vnese jasno.

Klement rozkreslil vesničky a teď potřebuje katastr každé obce obarvit tak, aby se žádné dvě obce se stejnou barvou nedotýkaly. Jde na to vědecky, a proto si z vesnic vytvořil graf.

Graf je datová struktura (tj. uspořádání informací v prostoru, např. v paměti počítače), kterou tvoří body – vrcholy – a jejich spojnice – hrany. Graf si tedy můžeme představit jako (pojmenované) tečky pospojované čarami. Pro účely první úlohy nám budou vrcholy představovat vesnice. Hranou spojíme ty vrcholy, jejichž vesnice spolu přímo sousedí. Na obrázku je vidět převod kousku mapy na graf.



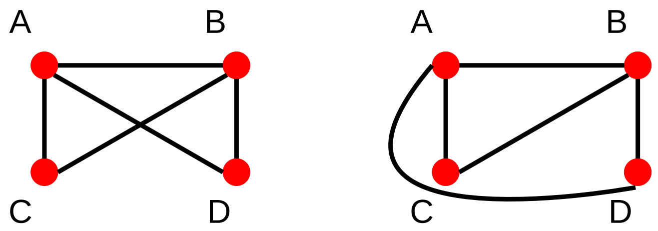
Obrázek 1: Převod kousku mapy na graf.

Ne všechna zvířátka vidí celé barevné spektrum, navíc je potřeba, aby barvy vesnic byly dobře odlišitelné. Klement se proto snaží obarvit celou mapu co nejméně různými barvami. Zatím má obarvený jen kousek mapy a zdá se, že čtyři barvy by mohly stačit.

Podúloha i) (1 bod)

Obarvi Klementovi graf z příkladu (viz obrázek 1) tak, abys nepoužil více než čtyři různé barvy. Vždy musí platit, že každé dva spojené vrcholy mají různou barvu. V jakém pořadí je nejlepší vrcholy barvit a proč?

Když graf překreslujeme na papír, může se stát, že se dvě hrany zkříží jako na obrázku 2. Někdy však stačí vhodněji nakreslit hrany nebo posunout vrcholy, a křížení zmizí. U některých grafů se křížení nevyhneme.



Obrázek 2: Překreslení hran grafu tak, aby se nekřížily.

Podúloha ii) **(2 body)**

Zkus nakreslit graf, který čtyřmi barvami obarvit nepůjde. To znamená, že nebude existovat takové rozvržení barev, aby pro každé dva spojené vrcholy platilo, že mají rozdílnou barvu. Stačí obecný graf, tj. hrany se ti můžou libovolně křížit. Hlavně nezapomeň napsat, proč není obarvení čtyřmi barvami možné.

Podúloha iii) **(3 body)**

Klement tvrdí, že graf, kde se hrany kříží, neodpovídá jeho situaci. Může existovat takové rozložení vesnic, aby jejich graf obsahoval křížící se hrany? Nebo lze každý graf vzniklý z mapy překreslit tak, aby se hrany nekřížily? Lze tak překreslit graf vzniklý v podúloze ii)?

Podúloha iv) **(4 body)**

Kozel Kryšpín hned všechno chápe. „No jó, jak je tam křížení, musí počet barev růst. Všechno je to úplně jednoduchý." Klement by rád mudrlanta usadil nějakým pěkným příkladem. Poradíš mu, jak by mohl sestrojit graf, který by sice nešel nakreslit bez křížení hran, ale zároveň by byl obarvitelný dvěma barvami?