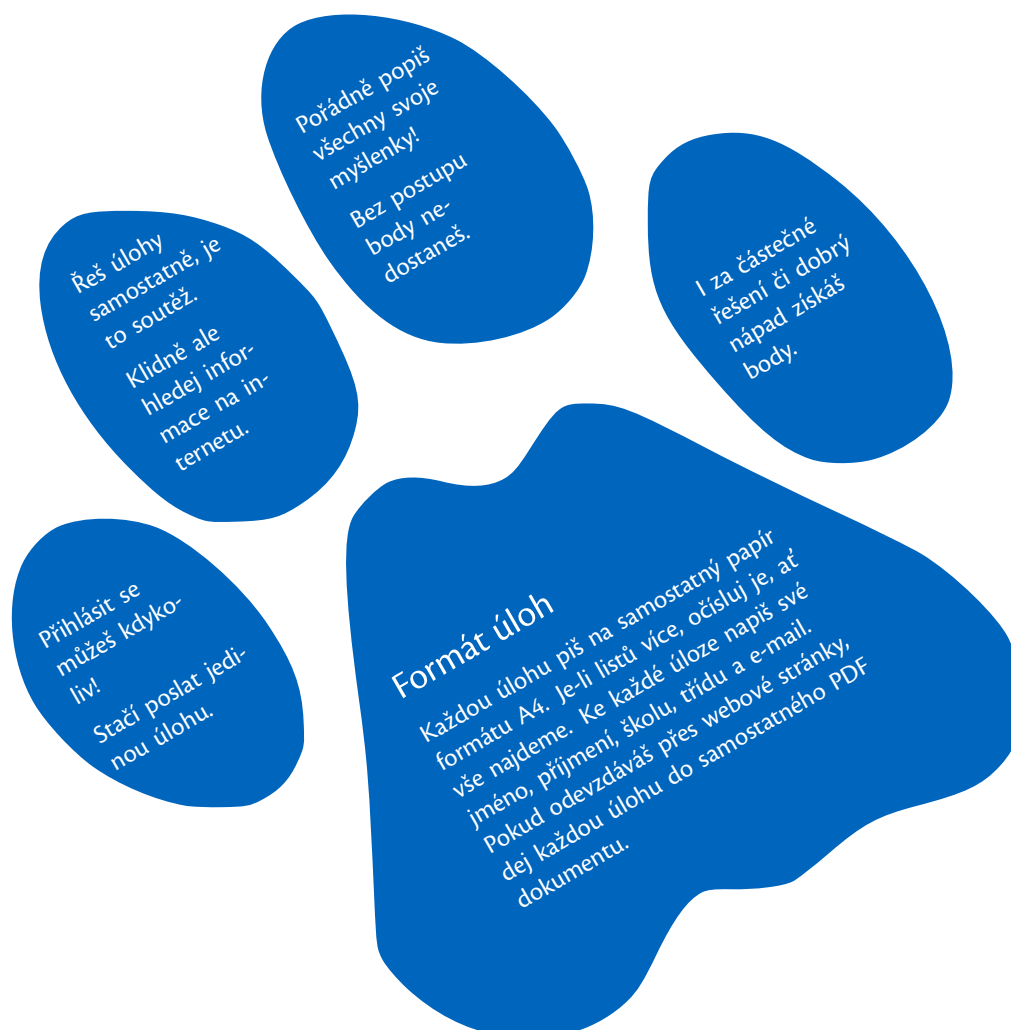


## Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již čtrnáctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záluďných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama1vova.cz> a dále na Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **21. listopadu 2022** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová  
Rektorát ČVUT  
Jugoslávských partyzánů 3  
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

*Alenka, Běťka, Honza, Káťa, Kobi, Láďa, Lenka, Líďa, Linda, Mája, Martin, Matěj, Rézi, Verča, Zuza a Zuzka*



## Kategorie mladší

### Úloha 0A Byrokratická

(2 body)



Úředního šimla Honzíka i jeho kolegy velmi unavuje neustálé třídění a přebírání úloh. Poslední dobou musí dokonce dělat přesčasy a zůstat v kanceláři přes noc. Rozhodli se tedy, že budou vyžadovat, aby měly všechny úlohy opravdu správný formát. Pomoz Honzíkovi tak, že Tvé úlohy budou splňovat požadavky uvedené v úvodním textu. (Tedy každá bude na samostatném listu papíru A4, nadepsaná jménem, příjmením, emailem, třídou a názvem školy a číslem úlohy.)

Chceš-li si ulehčit práci s nadepisováním hlavičky a odesíláním obálek, můžeš svá řešení po přihlášení nahrát na stránky Jámy lvové [jama.lvova.cz](http://jama.lvova.cz). Ale pozor! Pouze ve formátu PDF! Pokud bys měl jakékoli problémy, napiš nám na e-mail [jama.lvova@jama.lvova.cz](mailto:jama.lvova@jama.lvova.cz).

### Úloha 1A Čtyřková

(5 bodů)

Kolibřík Kamil se vsadil s babočkou Bárrou, že dokáže pomoci čtyř čtyřek a čtyř různých matematických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) vytvořit jakékoli číslo od 0 do 9. Má tedy zadaný výraz  $4\_4\_4\_4$  a na místo podtržíték má doplnit jakákoli znaménka z výběru  $+$ ,  $-$ ,  $*$  a  $/$ . Jedno znaménko může použít i vícekrát a Bára navíc Kamilovi dovolila kamkoli přidat závorky.

Kdo vyhraje sázku? Je možné získat jako výsledek zadaného výrazu jakékoli jednociferné číslo (tj. od 0 do 9)? Jak by pro každé z nich takový výraz vypadal?

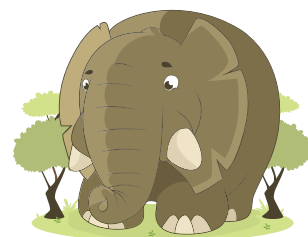
### Úloha 2A Přírodopisná

(6 bodů)

Surikatu Saskii čeká test ze systémového řazení zvířat. K tomu se používá výpočet takzvaného skóre zvířete. To se počítá tak, že se rozhodne, které specifické části těla zvíře má a pro každou část, kterou dané zvíře má, se k celkovému skóre přičte určitá hodnota. Ty se pro jednotlivé části těla liší. Výsledné skóre zvířete tak v sobě obsahuje informaci o tom, které specifické části těla zvíře má. Příklad, který by Saskie měla umět, se týká těchto částí těla: parohy, kopyta, kly a chobot. Například tapírovi by se tedy měla započítat do jeho výsledného skóre hodnota za chobot (i když ho má jen malý) a za kopyta.

Saskie ale ve škole není moc pozorná žačka, a tak si nezapsala celý postup, ale pouze výsledná skóre několika zvířat – tapír má 3, divočák 4, slon 5 a jelen 7. Pro úspěšné vyřešení testu, který ji čeká, by ale potřebovala znát konkrétní hodnoty, které se přičítají, pokud zvíře má parohy, kopyta, kly, nebo chobot.

Dokázal bys nešťastné surikatě pomoci a poradit jí, která čísla odpovídají daným částem těla?



### Úloha 3A Abrakadabra

(7 bodů)

Opičák Otto se chce naučit čarovat podle lemura Leopolda. Leopold sice nejdřív Ottovi nechtěl nic prozradit, ale nakonec Ottovi svůj recept, jak tvořit kouzelnické formule, svěřil. Ten se skládá ze seznamu velkých písmen, kde ke každému z nich je uvedeno několik nahrazovacích pravidel oddělených vsíslítkem.

Leopold má vždy na začátku napsáno velké písmeno S jako start. Písmeno S pak najde v receptu a vymění za libovolnou z variant oddělených vsíslítkem. Obdobně vyměňuje dál a dál všechna velká písmena, která získá. Malá písmena ponechává na svých místech a dále je nemění. Pokud se tvorba povede, zůstane na konci slovo napsané pouze malými písmeny – kouzelnická formule.

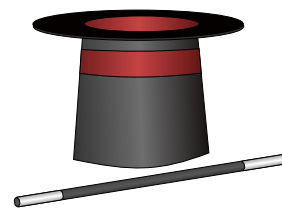
Recept na tvorbu kouzelnických formulí vypadá takto:

- $S \rightarrow ABA \mid aE \mid br,$
- $A \rightarrow aDa \mid a \mid DB,$
- $B \rightarrow kAd \mid B \mid uB,$
- $C \rightarrow aA \mid D \mid Bb,$
- $D \rightarrow bD \mid r \mid Es,$
- $E \rightarrow fFu \mid Ee \mid oEo,$
- $F \rightarrow Es \mid Fj \mid EF.$

Tvořit se dá tedy například takto:

$$S \xrightarrow{(S \rightarrow ABA)} ABA \xrightarrow{(A \rightarrow a)} aBA \xrightarrow{(B \rightarrow kAd)} akAdA \xrightarrow{(A \rightarrow a)} akadA \xrightarrow{(A \rightarrow a)} akada.$$

Ottovi se však recept nelíbí. Má pocit, že Leopold schválně recept zkomplikoval nepotřebnými nahrazovacími pravidly. Dokážeš recept promazat tak, aby obsahoval co nejméně nahrazovacích pravidel, ale vyráběl stále tytéž kouzelnické formule, které se dají vyrábět z Leopoldova původního receptu?

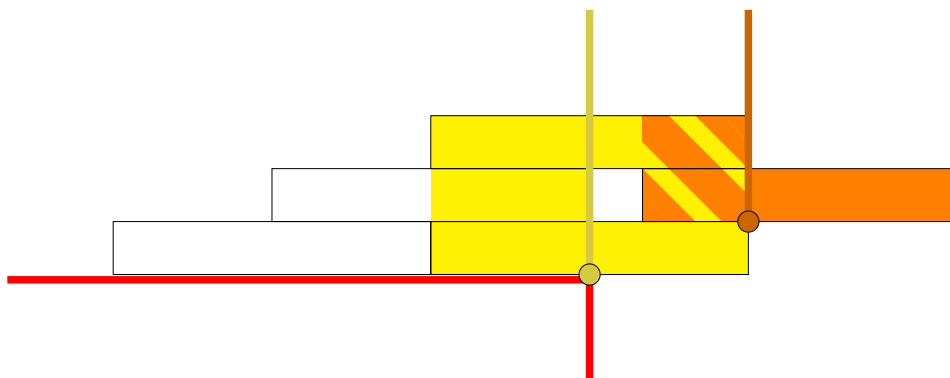


**Úloha 4A Dlouhý schody do nebe**
**(9 bodů)**

Mravenci z říše Anteků mají ambiciózní plán. Chtějí postavit schodiště, které se bude klenout nad propastí do co největší dálky od jejího okraje. Nepovede přitom na žádné konkrétní místo – jeho konec bude nad prázdným prostorem. Dalším požadavkem je, aby směřovalo přímo, aby nikde neklesalo a aby se dalo ze země plynule vystoupat vzhůru (nechtějí tedy žádné pokládání schodů pod nějakým úhlem vzhledem k předchozím stupínkům, ani schody vyšší než jeden standardní stupínek). Na druhou stranu jim ale nijak nezáleží na tom, jak budou jednotlivé schody dlouhé, a je tak možné klidně pokládat dřeva i za sebe (nicméně není možné je lepit dohromady). K vytvoření tohoto monumentálního díla mají 12 stejných dřevěných prkýnek o délce 6 mravenčích sáhů, přičemž není nutné, aby využili všechny z nich.

Architekt Andy, který má stavbu na starost ví, že aby se konstrukce nezřítla, musí platit, že nad každým dřívkem, jehož část nepodepřene visí ve vzduchu, musí nad podepřenu částí být alespoň tolik dřeva jako nad tou nepodepřenu, včetně váhy samotného visícího dřívka. Zakreslil si tento fakt do obrázku 1.

Kam nejdále nad propast se s takovou konstrukcí dokáží dostat?

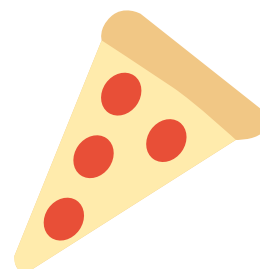


Obrázek 1: Hmotnosti dřeva vlevo od osy musí být větší nebo rovné hmotnostem dřeva vpravo od osy oddělující podepřenu a nepodepřenu část dřívka. Jednotlivé hmotnosti, které se vyvažují jsou zakresleny stejnou barvou jako osa, vůči které se vyvažují.

**Úloha 5A Pizzerie**
**(5 bodů)**

Hroch Hans pořádá velkou narozeninovou oslavu a taková oslava se rozhodně neobejde bez pizzy. Navíc v pizzerii nedaleko Hansova domu mají zrovna skvělou akci, dvě pizzy za cenu jedné! Zákazník si může v pizzerii vybrat dvě pizzy a zaplatí jen tolik, kolik stojí ta dražší z nich. Hansovi kamarádi mají různé preference, a tak si Hans raději napsal seznam, kolik má koupit různých druhů pizzy a připsal si k nim i cenu za jeden kus pizzy daného druhu.

- 2× rajčatová – 105 JC
- 1× hmyzí – 119 JC
- 2× krevetová – 125 JC
- 2× papájová – 149 JC
- 1× kokosová – 129 JC
- 1× jablečná – 135 JC
- 1× borůvková – 139 JC



Poradíš mu, jak má pizzy napárovat, aby zaplatil co nejméně? A jak by bylo nejvýhodnější napárovat pizzy pro pizzerii, aby vydělala co nejvíce peněz? Kolik tedy Hans ušetří, když si naplánuje dvojice pizz podle sebe a nenechá to na nenechavém šéfkuchaři?

## Kategorie starší

### Úloha 0B Byrokratická

**(2 body)**


Úředního šimla Honzika i jeho kolegy velmi unavuje neustálé třídění a přebírání úloh. Poslední dobou musí dokonce dělat přesčasy a zůstat v kanceláři přes noc. Rozhodli se tedy, že budou vyžadovat, aby měly všechny úlohy opravdu správný formát. Pomoz Honzíkovi tak, že Tvé úlohy budou splňovat požadavky uvedené v úvodním textu. (Tedy každá bude na samostatném listu papíru A4, nadepsaná jménem, příjmením, emailem, třídou a názvem školy a číslem úlohy.)

Chceš-li si ulehčit práci s nadepisováním hlavičky a odesíláním obálek, můžeš svá řešení po přihlášení nahrát na stránky Jámy Lvové [jama.lvova.cz](http://jama.lvova.cz). Ale pozor! Pouze ve formátu PDF! Pokud bys měl jakékoli problémy, napiš nám na e-mail [jama.lvova@jama.lvova.cz](mailto:jama.lvova@jama.lvova.cz).

### Úloha 1B Švadlenčina

**(5 bodů)**

Dikobrazka Dita se se svými kamarády zúčastní soutěže v šití. Na tým připadá pouze jedna krejčovská křída, jedny velké nůžky, jeden šicí stroj, jeden spínací špendlík a jediná obyčejná jehla. Každý z kamarádů proto dělá to, co mu jde nejlépe.

Agama Alexa obkresluje stříh na látku, bobr Bertík stříhá, cvrček Cyril šije na stroji, Dita s pomocí spínacího špendlíku provléká gumu a emu Evžen našívá knoflíky. Aby se výrobek podařil, je nutné postupovat popořadě a nelze dělat dvě akce na témže výrobku najednou. Každá jednotlivá akce trvá přesně dvacet minut. Cílem soutěže je co nejrychleji ušít 6 předem neznámých výrobků.



Organizátorům soutěže vadila monotónnost soutěže a rozhodli se ji proto trochu zpestřit. Na začátku zadají soutěžícím šít bobří montérky. Přesně po dvou hodinách pak oznámí, že už bobří montérky nepřijmou a že chtějí pštrosí sukně. Soutěžící tedy budou muset zahodit všechny rozpracované montérky a začít se sukněmi. Další změna pak přijde po dalších 40 minutách, třetí změna čtyři hodiny po startu a poslední dvě hodiny po třetí změně.

Jak dlouho bude Ditině týmu soutěž trvat, potřebují-li ušít šest celých výrobků?

### Úloha 2B Dalmatini

**(6 bodů)**

Rodina dalmatinů slaví – rozrostla se o nová štěňátka! Táta dalmatin si na oslavu hned udělal statistiku a zmapoval si, kolik flíčků mají průměrně jeho nové děti. Vyšlo mu, že průměrný počet je 40. Tím ale neskončil. Ke své radosti zjistil, že pokud udělá průměr flíčků všech štěňátek kromě toho nejméně puntíkovatého, dojde opět k celému číslu, a to ke 49. A pokud odebere navíc ještě štěně, které má naopak největší počet flíčků, dostane opět jako průměr počtu puntíků celé číslo, tentokrát 36. Počet nejflekatějšího a nejméně flekatého štěněte se potom liší o 62 puntíčků.

Ze všeho toho rozrušení nebyl svému kamarádovi bíglu Benovi schopen říci nic jiného než tenhle svůj radostný matematický objev a bígl si tak teď láme hlavu, kolik štěňátek to jeho dobrý přítel vlastně má. Dokáže zjistit, kolik jich je? A jaký je nejmenší a naopak největší počet flíčků na jednom štěněti?

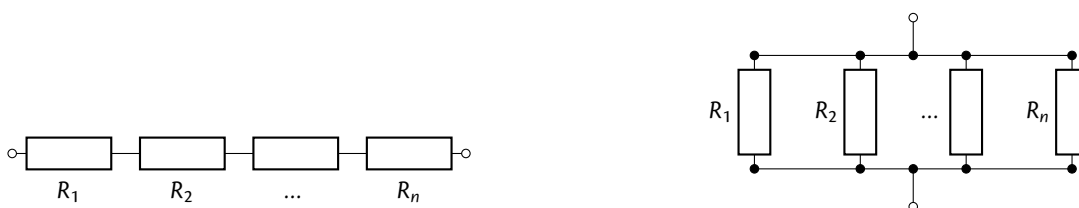
### Úloha 3B Vybíravá žárovka

**(7 bodů)**

Flétnák Fabio má svoji oblíbenou žárovku a rád pracuje jen za jejího svitu. Bohužel se mu porouchalo její napájení a on si musí poradit. Má doma k dispozici čtyři obvody složené z 1 Ω odporů, které pojmenoval A, B, C a D (na obrázku 2 na další stránce). Jelikož by byl velmi nerad, aby mu doma zůstaly ležet, rozhodl se je použít všechny. Má dostatek drátků, které je schopen připevnit na libovolný z vývodů obvodu (na obrázku dutá kolečka označená písmenkem). Obvody by rád spojil sériově (za sebe) a každý zapojil právě jednou. Důležité ovšem je, že na konci musí mít výsledný obvod přesně 3,05 Ω, jinak žárovka nebude fungovat a Fabio nebude moct pracovat.

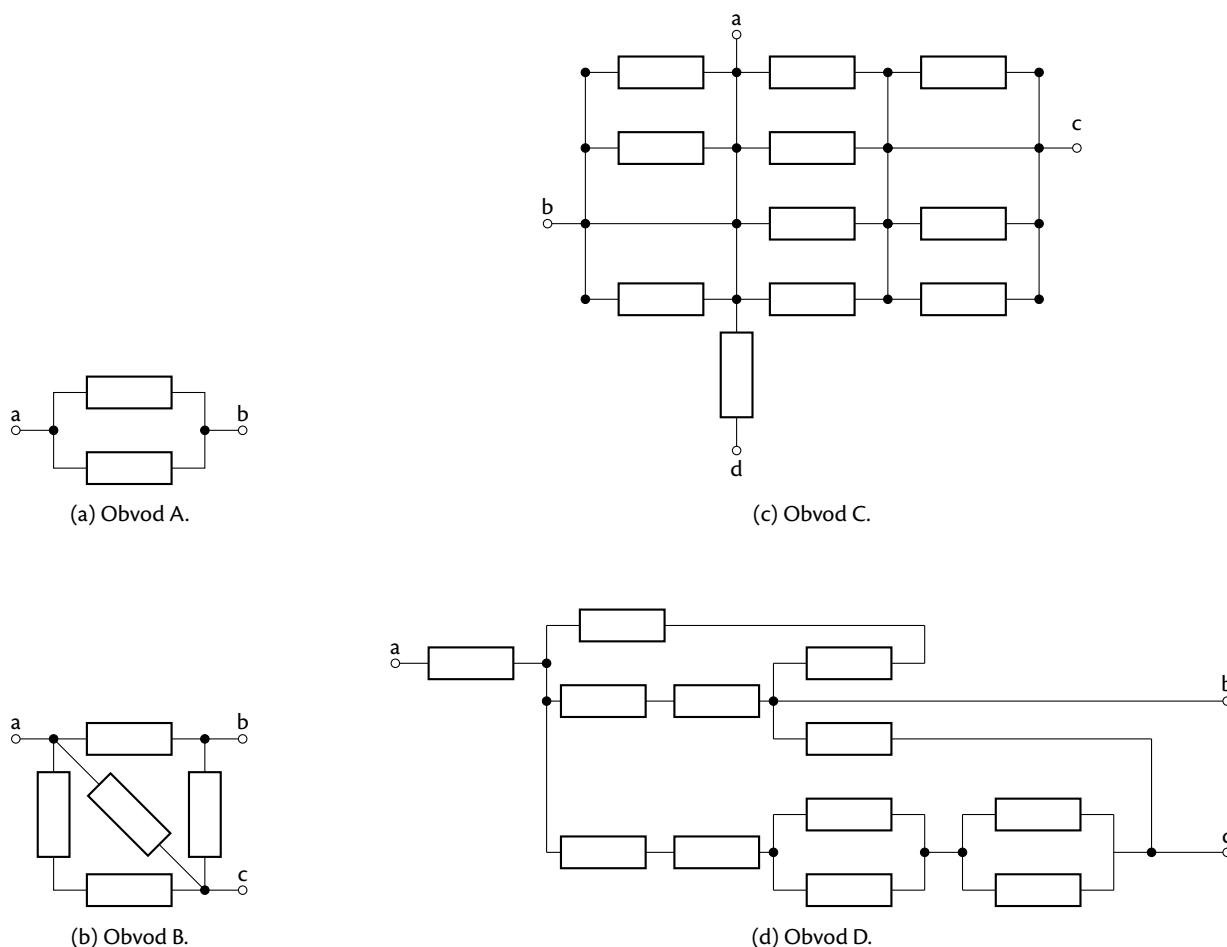
Pomůžeš mu a nakreslíš, jak by měly být jednotlivé obvody zapojeny za sebou a jak tedy bude výsledný obvod vypadat?

Jen pro osvěžení, sériové zapojení rezistorů vypadá jako na obrázku 3a a v něm se výsledný odpor rovná součtu odporů všech rezistorů za sebou. Pro paralelní zapojení jako na obrázku 3b je to složitější, tam platí, že výsledný odpor  $R$  je se všemi odpory navzájem paralelních rezistorů ve vztahu  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$ , kde  $R_i$  je odpor  $i$ -tého rezistoru. Nezapomeňte také, že vede-li mezi některými dvěma body v obvodu drát, pak je mezi nimi odpor nulový.



(a) Sérievé zapojení rezistorů.

(b) Paralelní zapojení rezistorů.



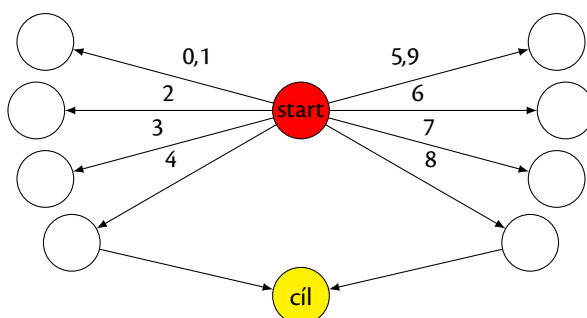
Obrázek 2: Fabiovy obvody

**Úloha 4B**
**Poštovní**
**(9 bodů)**


Holub Hynek by rád sestrojil třídičku dopisů, která by mu pomohla oddělit dopisy s adresami se směrovacím číslem dělitelným třemi.

Třídička se skládá ze zastávek, z nichž jedna je startovní a jedna cílová, a z posuvných pásů. Každý posuvný pás má danou sadu cifer, které ho spouští, a vede od libovolné zastávky k libovolné zastávce (smí to být i ta samá). Pokud pás není popsán, zastávka, ze které pás vede, pošle všechny dopisy po něm. Dopis začíná na startovní zastávce. Tam stroj přečte první cifru směrovacího čísla zleva a uvede se do chodu příslušný pás. Na další zastávce přečte druhou cifru zleva, opět se uvede do chodu některý pás a tak dále, dokud není přečtené celé směrovací číslo. Pokud pro dané číslo neexistuje pás, který by je odvezl, pak v dané zastávce dopis skončí. Dopis tak může skončit na kterékoliv zastávce. Na konci Hynek vyhodnotí, které dopisy došly až do cílové zastávky a které nikoliv.

Třídička pro jednociferná čísla oddělující čísla dělitelná čtyřmi by vypadala jako na obrázku 4. Do cíle se dostane číslo 4 a 8.



Obrázek 4: Třídička pro jednociferná čísla.

Hynek by rád, aby dopisy se směrovacím číslem dělitelným třemi skončily v cílové zastávce, ale ostatní nikoliv. Dokážeš načrtnout, jak by měla Hynkova třídička vypadat a vysvětlit mu, jak funguje?

### Úloha 5B      Tempery pro ptakopyska (5 bodů)

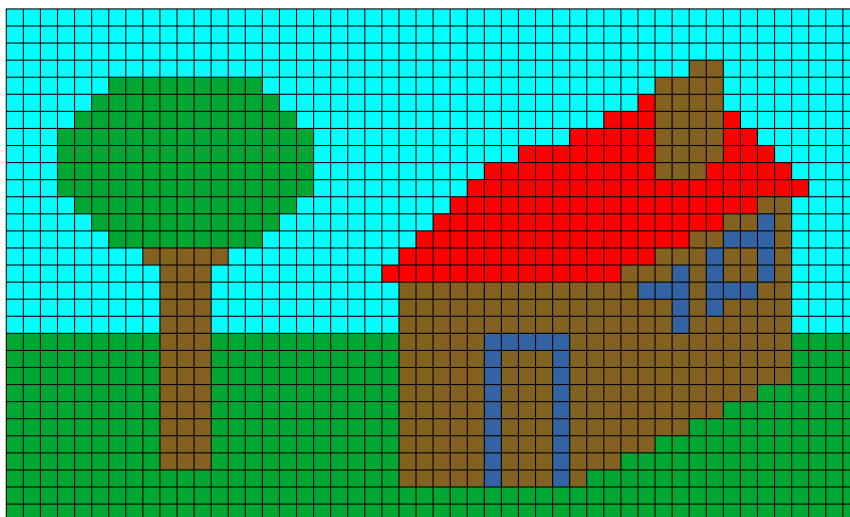
Ptakopysk Petr se rozhodl namalovat obrázek (5). Temperové barvy jsou ale drahé, a proto chce koupit co nejméně jednotlivých tub. Může koupit tyrkysovou (světle modrá), magentu (fialová), žlutou, červenou, modrou, zelenou a hnědou. Každá tuba obsahuje 100 kapek barvy. Na každý čtvereček obrázku, který si vybral, spotřebuje 1 kapku barvy.

Na hodinách výtvarné výchovy se Petr naučil míchat barvy. Ví tedy:

- 1 kapka tyrkysové a 1 kapka žluté dají dohromady 2 kapky zelené
- 1 kapka tyrkysové a 1 kapka magenty dají dohromady 2 kapky modré
- 1 kapka magenty a 1 kapka žluté dají dohromady 2 kapky červené
- 1 kapka magenty a 2 kapky žluté dají dohromady 3 kapky hnědé

Kolik které barvy má Petr koupit, aby co nejvíce ušetřil? Tj. koupil co nejméně kusů tub barvy.

Na obrázku je tyrkysová obloha, která zaujímá 545 čtverečků. Zelená tráva má 361 čtverečků. Strom se skládá ze 126 zelených a 41 hnědých čtverečků. Střechu domečku tvoří 138 červených čtverečků, komín 25 hnědých čtverečků, okna a dveře jsou vyznačené pomocí 39 modrých čtverečků a zdi (včetně výplně dveří a oken) zaujímají 225 hnědých čtverečků.



Obrázek 5: Temperový domeček.