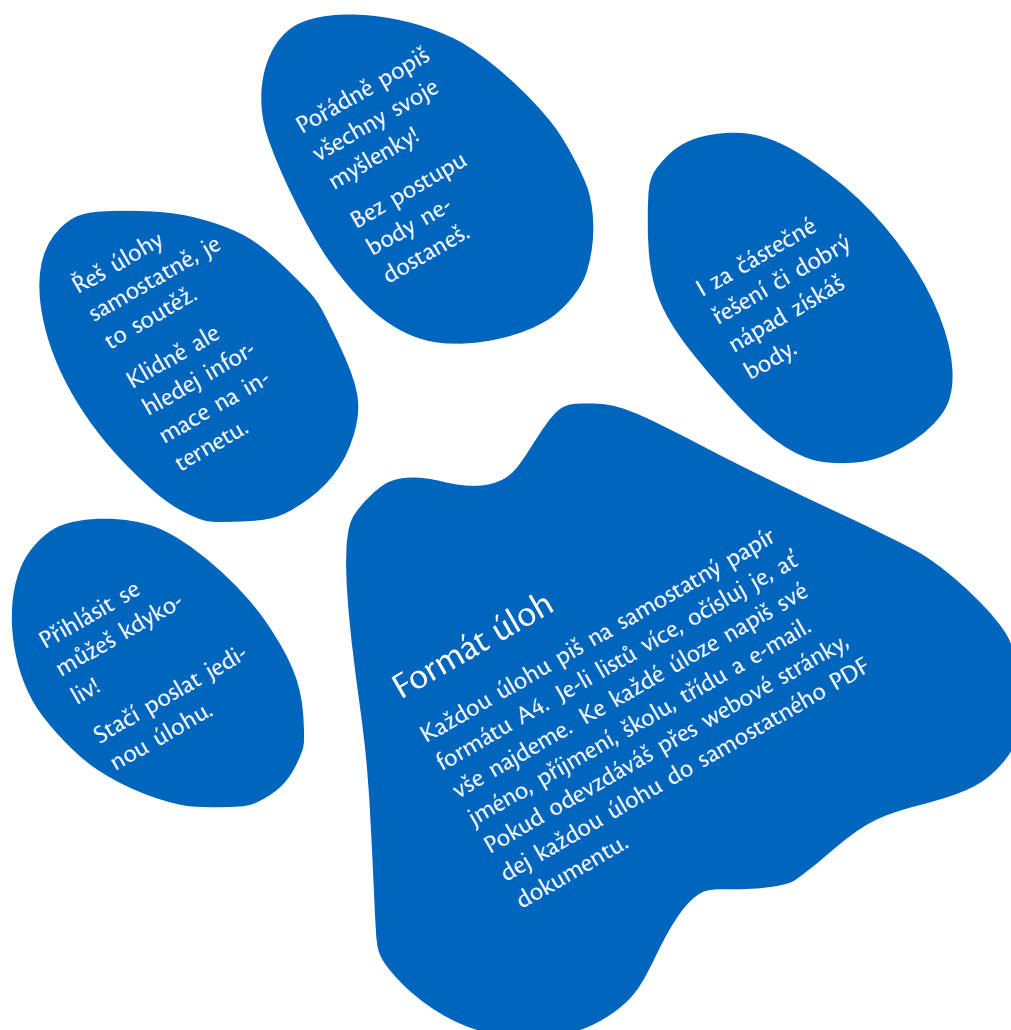


Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již třináctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záluďných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama1vova.cz> a dále na Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **19. dubna 2022** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přeji

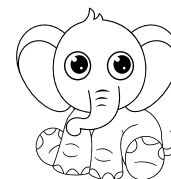
Alenka, Bětka, Hanka, Honza, Honza, Káťa, Kobi, Láďa, Lenka, Lída, Linda, Májka, Matěj, Tereška, Verča, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Slon v porcelánu

Na výročním plese u příležitosti příchodu jara má slon Standa na starosti tombolu. Poctivě připravil třicet kuliček s čísly 1 až 30 a nasypal je do porcelánové mísy. Na poslední chvíli o mísu zavadil, ta spadla a rozbila se. Aby toho nebylo málo, jednu kuličku Standa rozšlápl. Kdyby věděl, která to byla, mohl by jejím číslem nadepsat náhradní. Dával tedy kuličky do nové mísy popořadě, začal 1, pak 2... ale hledání konkrétních kuliček mu trvalo moc dlouho. Krtek Kamil mu nabídl pomoc a přinesl kalkulačku. Pomůžeš jim najít způsob, jak pomocí kalkulačky co nejrychleji zjistit, které číslo chybí? Vysvětlí, proč je tento způsob rychlejší než hledání konkrétních kuliček.

(5 bodů)



Úloha 2A Obchůdek veselých kop

Alois, Bohumil, Cecilka a Dáša si zajeli nakoupit hračky za peníze z brigády u mravenečnicka Miloše. Miloše nyní zajímá, co si zvířátka na svých nákupech pořídila.

(7 bodů)

Mravenečnick ví, že si zvířátka koupila dvě potraviny – Plastový chleba s marmeládou a Kamennou polevu na dort – a dvě sportovní pomůcky – Koloběžku s pěti koly a Lyže s komínem. Dále ví, že zvířátka navštívila celkem čtyři obchody - Čapí Vysoké Uličnictví Telepatické (ČVUT), Žertovné Emporium (ŽE), Dílnu Unikátních Šprýmařů Epipoláry (DUŠE) a Obchůdek Veselých Kop (OVK). Zná také ceny jednotlivých předmětů v Jáma coinech – 600 JC, 700 JC, 800 JC a 900 JC. Každé zvířátko bylo právě v jednom obchodě a koupilo si právě jednu věc, která stála právě jednu originální cenu.

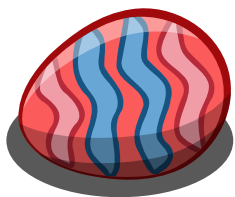
Ze zmateného brebentění zjistil Miloš následující:

1. Jen jeden kluk si koupil sportovní pomůcku.
2. Cecilčina hračka je o 100 JC levnější než Kamenná poleva na dort a Cecilka svou hračku zakoupila v obchodě ŽE nebo ČVUT.
3. Alois a Bohumil dohromady utratili 1500 JC.
4. Hračka z DUŠE stála o 200 JC víc než hračka z ŽE.
5. Koloběžka stála 800 JC nebo 900 JC.
6. Alois neutratil 700 JC a nenakupoval v obchodě DUŠE.
7. Dáša je sportovkyně, tudíž si koupila jednu ze sportovních pomůcek, a nenakupovala v ČVUT.
8. Lyže stály o 100 JC víc než Bohumilova hračka.
9. Hračka z DUŠE nestála 800 JC.

Mravenečnicka Miloše by ze všeho nejvíce zajímalo, kdo nakupoval v Obchůdku veselých kop a co si zde koupil. Pomůžeš mu najít odpověď?

Úloha 3A Malování kraslic

(8 bodů)



Surikaty Gábina, Ester a Silvie mají namalovat 14 kraslic. Malují stejně rychle a to následujícím způsobem: sedí v řadě vedle sebe, a když některé dojdou vejce, všechny se zastaví. Surikata bez vajec se podívá na svoje přímé sousedky. Pokud nic nemají, surikata odchází. Pokud něco mají, surikata si bere polovinu vajec své sousedky, a to přednostně od té, kterou má po pravé ruce. Kdyby si měly brát dvě surikaty od kolegyně mezi nimi, začíná ta, která jí má po pravé ruce. V případě dělení lichého počtu vajec si surikaty hodí korunou. Silvie chce ukázat, kolik toho udělá, ale nepředvírá se. Lze při třech malujících zařídit, aby na začátku dostala nejvíc vajec, ale skončila jako první? A dokážeš na základě poznatků z předchozí otázky najít rozdělení vajec na začátku tak, aby Silvie dostala na začátku nejvíc vajec, ale určitě skončila jako první i když by neseděla na kraji? Na druhou otázku

si můžeš přizvat libovolný počet dalších surikat a přidat kolik chceš vajec.

Úloha 4A Knihovna

(10 bodů)

V království zvířat byla právě postavena nová knihovna, do které byly přestěhovány všechny knížky z té stávající. Když však knihovník orangutan Aleš přišel po stěhování do práce, zjistil, že všechny knížky jsou přeházené. Naštěstí má Aleš v nové knihovně pomocníky – roboty, kteří dokáží manipulovat s knížkami v policích.

Knížky v polici jsou v přesně daných pozicích a pozice jsou označeny čísly od 0. Knížku nelze vložit do police jinak než na očíslovanou pozici. Roboti však potřebují přesný popis toho, co mají udělat, takže pro jejich použití potřebuje Aleš sepsat postup v jazyce, kterému by rozuměli. Roboti mají omezenou paměť, mohou si zapamatovat pouze čtyři hodnoty ve čtyřech paměťových buňkách označených A, B, C, D. Na počátku je ve všech paměťových buňkách uložena 0.

Pro uložení hodnoty do paměťové buňky se používá zápis $\text{oznaceni_bunky} \leftarrow \text{hodnota}$, tedy pro uložení hodnoty 2 do buňky B bude v postupu $B \leftarrow 2$. Když pak chceme danou hodnotu použít, stačí na dané místo prostě napsat označení buňky. Můžeme tak kupříkladu do buňky B uložit hodnotu v buňce A následujícím způsobem $B \leftarrow A$. S jednou paměťovou buňkou může být manipulováno (zapisováno či čteno) vícekrát.

Dále roboti rozumí následujícím příkazům:



- `oznaceni_bunky pricti hodnota`
Tento příkaz přičte k uvedené buňce uvedenou hodnotu, například `A pricti 2` přičte k hodnotě buňky A dva a `A pricti -2` dvojku odečte.
- `zjisti počet knih`
Robot spočítá, kolik je celkově knih k seřazení. Tuto hodnotu si můžeme uložit kupříkladu do buňky A takto: `A ← zjisti počet knih`.
- `najdi minimum od hodnota1 do hodnota2`
Najde pozici nejmenší knížky v rozmezí od pozice `hodnota1` (včetně) do `hodnota2` (vyjma pozice `hodnota2`). Tuto pozici si opět můžeme uložit. Například hledáme-li nejmenší knihu v rozmezí od pozice 3 do pozice 15 a chceme si uložit výsledek do buňky B, uděláme to takto: `B ← najdi minimum od 3 do 15`.
- `prohod hodnota1 hodnota2`
Prohodí knížku na pozici `hodnota1` s knížkou na pozici `hodnota2`. Je-li jedno z míst prázdné, kniha se prostě přesune na ono prázdné místo.
- `Opakuj dokud hodnota1 se nerovná hodnota2 { další příkazy }`
Tento příkaz je speciální, protože ovlivňuje vykonávání ostatních příkazů. Všechny příkazy v závorkách se tedy opakují, dokud platí, že `hodnota1` se liší od `hodnota2`. Jakmile se obě hodnoty rovnají, pokračuje se příkazy za závorkami. Místo jedné z hodnot typicky budeme chtít použít hodnotu v buňce, protože příkaz `Opakuj dokud 1 se nerovná 2` by se prováděl nekonečně a `Opakuj dokud 1 se nerovná 1` se neprovede nikdy. Můžeme tak kupříkladu napsat `Opakuj dokud B se nerovná 10 { B pricti 1 }`. Příkaz v závorce se tak provede desetkrát (za předpokladu, že předtím v B byla uložena 0).

Aby se roboti v příkazech vyznali, píše se vždy jeden příkaz na jeden řádek. Poslední příkaz se přehledně zapisuje takto:

```
Opakuj dokud A se nerovná B {  
  A pricti 2  
  B pricti -1  
}  
C pricti A
```

tedy příkazy v závorkách se odsazují od levého okraje, aby bylo na první pohled zřejmé, že patří mezi závorky. Příkazy následující za závorkami už odsazené nejsou.

Pomůžeš Alešovi vymyslet univerzální postup, podle kterého by byly knihy seřazeny podle velikosti (od nejmenší po největší)? A zvládneš ho zapsat pomocí příkazů pro roboty (i v tomto případě napiš do řešení slovní popis postupu řazení)?

Úloha 5A **Obrazce v trávě**

(5 bodů)

Beran Břetá má připravit pro zvířátka běžeckou trať. Tři ze zvířátek chtějí běhat do čtyřúhelníku a tři do trojúhelníku. Žádné zvířátko však nechce mít úplně stejnou trať jako jiné zvířátko (ale nevdá jim, když budou sdílet nějakou část). Také sekačka má své zásady. Jakmile se nastartuje, jede přesně 100 metrů a to jedině rovně. Zastavenou sekačku už může Břetá lehce přesunout (když je zastavená, může ji Břetá přenést kamkoliv si jen přeje) i otočit. Břetovi zbývá benzín maximálně na 800 metrů, které chce využít naplno, a proto nebude přejíždět přes již vysekané části trávníku. Jak mohou běžecké trasy vypadat, pokud běžci, Břetá ani sekačka nesleví ze svých požadavků?

Kategorie starší

Úloha 1B Bleší cirkus

(5 bodů)

Bleška Berta celou zimu usilovně trénovala nové číslo do Blešího cirkusu. Na hladině vodní nádrže (která je svrchu otevřená) na volně puštěném voru už na ní čeká houpačka, kde bude své artistické kousky předvádět. Dokonce nebude mít ani záchrannou síť. Houpačka je zavěšená stožáru ve výšce dvou bleších skoků do výšky na dvakrát tak vysokém stožáru. Berta se dokáže zhoupnout do stejné výšky jako je stožár.

Když mravenci Matěj a Martina celou konstrukci postavili, zeptali se Berty, v kterém místě zhoupnutí se pohybuje nejrychleji a kde naopak nejpomaleji. Ona to ale neví. Poradíš jí odpověď a vysvětlíš jí, proč tomu tak je? Příště by jim na podobné otázky odpověděla hned a sama.

Principál pakobylka Pavel má úplně jiné starosti. Stejnou vodní nádrž budou potřebovat akvabely ze souboru Atelopus, které ji před Bertiným číslem napustí do poloviny, aby bylo blešku vidět. Zbytek pak chtějí začít napouštět v průběhu Bertina vystoupení, nechtějí jí ale utopit. Kdy je ten správný čas začít napouštět? Nádrž má tvar čtverce se stranou délky 10 žabích temp a napouští se rychlostí 1 kbelík za 10 sekund.

Úloha 2B Výživná

(7 bodů)


Gaviál Jonáš peče karete Bětce k narozeninám dort. Chtěl by však, aby dort obsahoval určité předepsané množství vitamínů. Obsah jednotlivých vitamínů v surovinách je v tabulce 1. Jonáš by chtěl, aby v dortu bylo alespoň 48 mg vitamínu A a 1440 mg vitamínu C. Jonášův rozpočet bohužel není moc veliký a tak by rád, aby potřebné suroviny stály co nejméně. Dokážeš mu poradit kolik které suroviny má do dortu dát, aby splnil požadavky na minimální množství vitamínů, ale zároveň za suroviny zaplatil co nejméně?

	mrkev	jablko	banán
Vitamín A $\left[\frac{\text{mg}}{\text{kg}} \right]$	35	0,5	0,28
Vitamín C $\left[\frac{\text{mg}}{\text{kg}} \right]$	60	300	50
Cena $\left[\frac{\text{Kč}}{\text{kg}} \right]$	26	22	80

Tabulka 1: Obsah vitamínů v surovinách.

Úloha 3B Natírání oken

(8 bodů)

Zvířátka potřebují nově natřít všechna okna v domě. Natírání oken je ale zdoluhavý proces se spoustou fází a je by zajímavé, kdy mají začít, aby vše stihli do konce prázdnin (protože pak začnou chodit do školy a na natírání nebudou mít čas). S každým oknem je potřeba udělat následující: nejprve se musí sundat, sundání jednoho okna trvá 3 min, pak je třeba je umýt od prachu, to trvá 5 min. Poté se okno natírá. Je třeba je natřít z obou stran. Protože barva musí správně zaschnout, tak je třeba natřít nejprve jednu stranu, nechat ji zaschnout a pak lze teprve natřít druhou stranu (kterou je opět nechat zaschnout). Natírání každé strany zabere 20 min a barva potřebuje schnout alespoň 12 hodin, než se s oknem může dělat cokoli dalšího. Po natření obou stran okna barvy je třeba oškrábat barvu ze skla, což trvá 10 min a celé okno umýt, což trvá 5 min. Nakonec se musí všechna okna ještě pověsit zpět, což trvá stejně jako sundávání oken.



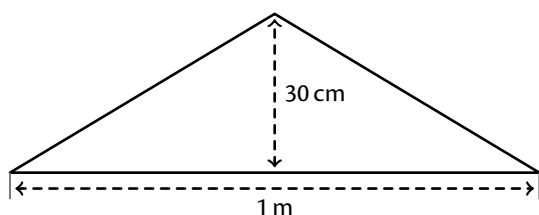
Jenže některé práce jsou odbornější než jiné. Celou práci si mezi sebe chtějí rozdělit agama Alenka, marabu Marie a velbloud Vladimír. Sundávání a věšení oken zvládne akorát Vladimír, ale vždy k sobe musí mít alespoň jednoho pomocníka. Natírat zvládnou Vladimír i Alenka a zbytek prací zvládnou všichni tři (a schnout umí okno samo).

Jak dlouho jim bude trvat natřít 214 oken, když každé okno musí projít všemi fázemi ve správném pořadí, chtějí pracovat maximálně 8 hodin denně a práci se mezi sebou rozdělí tak, aby to trvalo nejkratší možnou dobu? Stačí, když jim poradíš, kolik dní přes koncem prázdnin mají začít, přesnou hodinu nepotřebují.

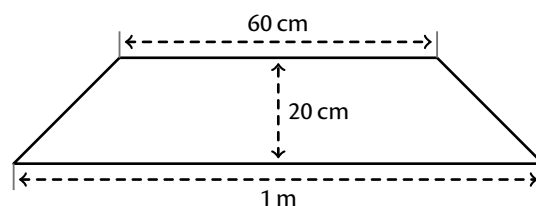
Úloha 4B Pouštění draků

(10 bodů)

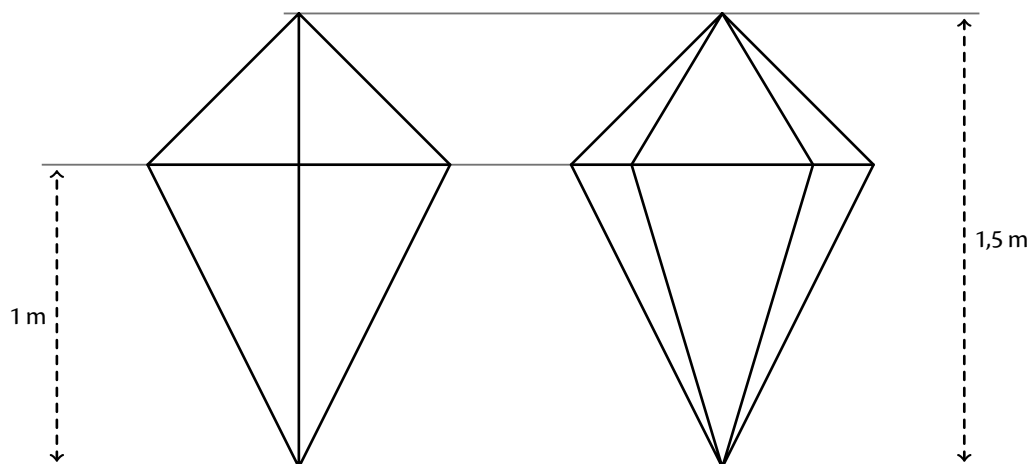
Polární lišák Tomáš hrozně rád pouští draky. Vymyslel dva typy. Jeden ve tvaru klasického deltoidu s vyvýšeným středem (ve vyvýšeném středě má tedy průřez ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku). Druhý má místo trojúhelníku ve vyvýšeném místě průřez ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku. Tvar a rozměry draků shora jsou na obrázku 1c, všechny stěny kromě podstavy mají tvar trojúhelníku, trojúhelníkový drak má čtyři stěny, lichoběžníkový jich má šest. Tvary průřezů (ve směru kratší úhlopříčky deltoidu) s rozměry jsou na obrázcích 1a a 1b). Celý drak má na výšku 1,5 m, vyvýšený průřez je ve vzdálenosti 1 m od spodního okraje draka.



(a) Trojúhelníkový profil draka.



(b) Lichoběžníkový profil draka.



(c) Rozměry „půdorysů“ draka.

Obrázek 1

Zajímalo by ho, do kterého z nich se vejde více vzduchu (a který tedy bude nejspíš i lépe létat), pomohl bys mu spočítat jejich objem? Ale protože Tomáš radši všechno ověřuje v praxi, tak se chtěl vrhnout na vyrábění prototypů, ale uvědomil si, že neví, zda má dostatek materiálu. Dokážeš mu spočítat i kolik igelitu bude na oba draky potřebovat? Počítej, že igelit je jen na „vypouklé“ části, plochá strana je prázdná. Pečlivě popiš co a jak počítáš, aby příště Tomáš mohl podobné problémy spočítat podle tvého řešení sám.

Objem libovolného jehlanu se dá spočítat jako $V = \frac{1}{3}S \cdot v$, kde S je obsah podstavy a v je jeho výška. Dále by se ti mohl hodit tzv. Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku $S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Úloha 5B RNA

Buvice Beata je nadšená botanička, a právě se obdivuje kráse jedné liány zvané Rozcuchanice Normálně-Alergenní. Tyhle liány na sobě mají zvláštní trnové výběžky, jejichž 4 typům se odborně říká Cizokrajný (C), Aromatický (A), Uštípnutý (U) a Geneticky modifikovaný (G). Když se liána vhodí do vody, začne se kroutit a propojuje Aromatické výběžky s Uštípnutými a Geneticky modifikované s Cizokrajnými. Spojují se vždy minimálně dva sousedící výběžky se dvěma odpovídajícími z jiné části liány. To znamená, že úseky CUC a AAU se nespojí, ale CUC s AAG ano.

Beata by chtěla ohromit své přátele tím, že by jim předvedla, jak se vlákna liány krásně pospojují. Bojí se ale, že existují i liány, které neudělají nic. U kterých zkrátka není žádná dvojice, která by se mohla spojit. Pomohlo by jí, kdyby věděla, že má její liána od každého druhu stejný počet výběžků? Jestli ano, jak dlouhá by ta liána musela být, aby si mohla být jistá, že se alespoň něco propojí? Jestli ne, jaké by bylo uspořádání výběžků, při kterém by se žádné z nich nespojily ani při libovolně dlouhé liáně?

(6 bodů)

