JÁMA LVOVÁ

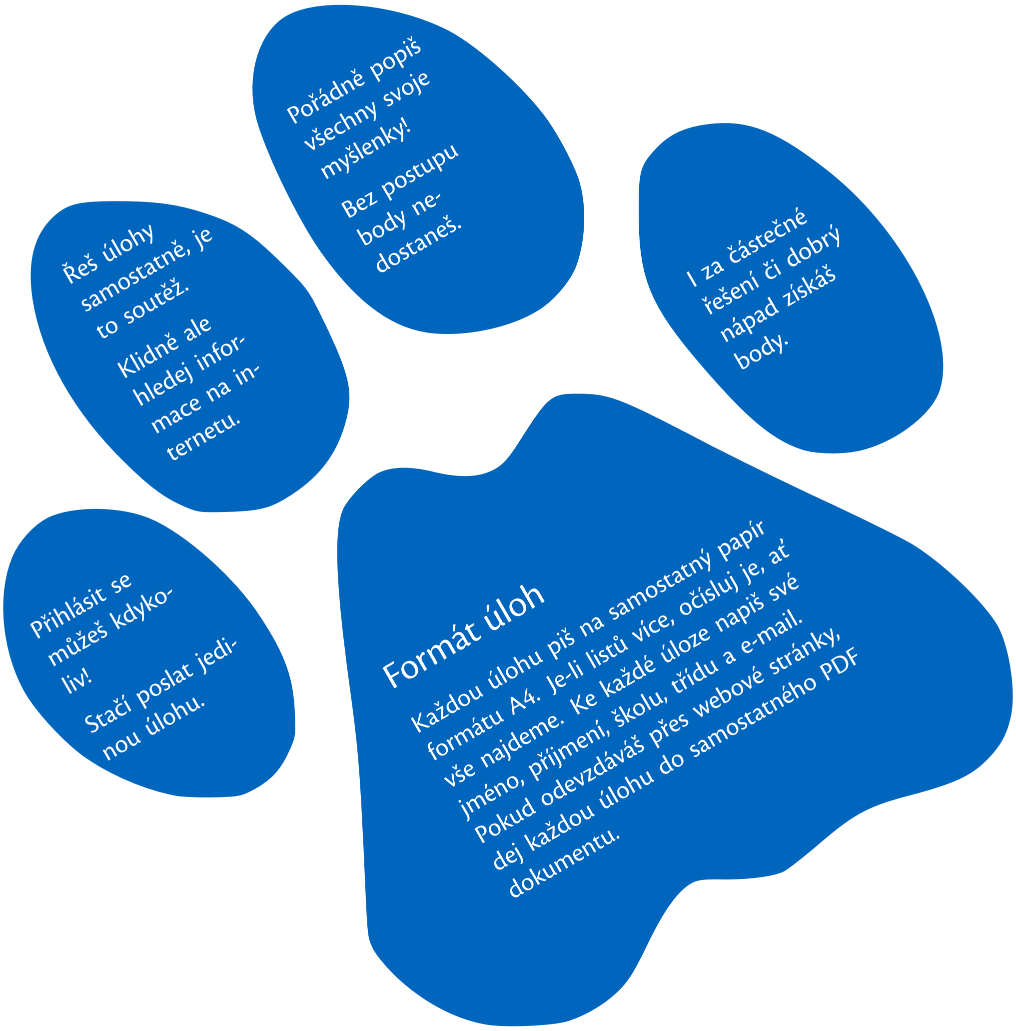
Zadání 2. kola
XIII. ročník

Ahoj!

Vítej v Jámě lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již třináctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na `https://jamalvova.cz` a dále na Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **24. ledna 2022** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

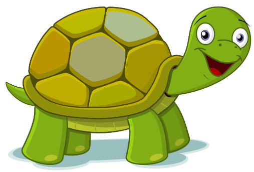
Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Hanka, Honza, Káťa, Kobi, Láďa, Lenka, Lída, Matěj, Maťa, Terezka, Verča, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Pozorovací (5 bodů)



Želva Žofka připravila pro své kamarády zvířátka skvělou hru, a nemůže se dočkat, až uvidí, jak si ji zahrají. Háček je ale v tom, že v rámci hry je každé zvířátko samo v jedné místnosti, v níž plní úkoly. V dalším kole se všechna zvířátka nějakým způsobem přemístí, a takhle postupně projdou všemi místnostmi. Žofka by se kvůli tomu nejraději rozkrájela – chtěla by jako nezúčastněný divák vidět všechno! Protože ale zkrátka nemůže být všude, rozhodla se své pozorování naplánovat tak, aby za celou hru navštívila každou místnost právě jednou, a aby i každého ze svých kamarádů viděla právě jednou. Jak má Žofka rozvrhnout, kdo půjde v kterém kole do které místnosti a kde bude v každém kole ona, pokud si přizvala pět kamarádů, kteří postupně projdou pět místností?

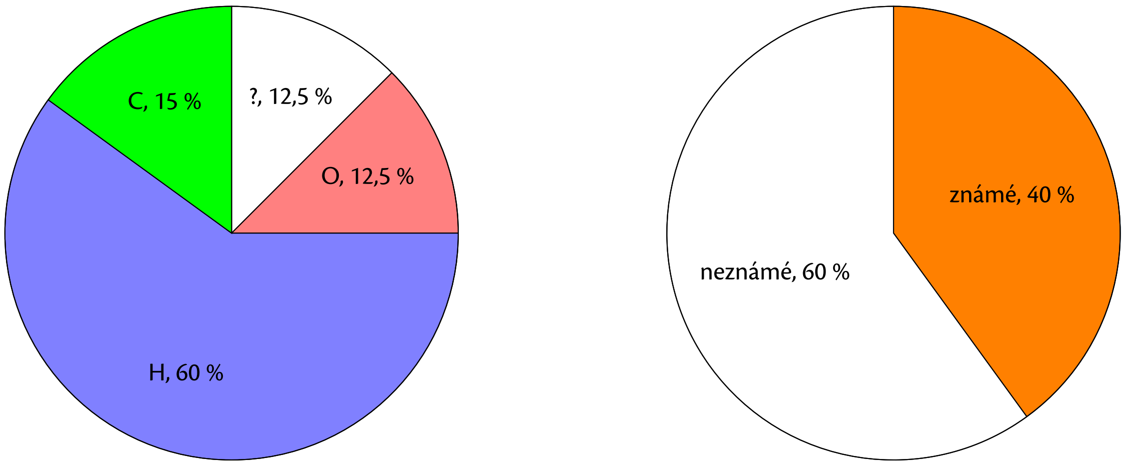
Úloha 2A Šifrovačka (6 bodů)

Jezevčík Jindra se účastní několikadenní šifrovačky s následujícími pravidly: Každý den je zveřejněna právě jedna šifra, kterou je možné řešit až do konce soutěže. Šifry je možné řešit v libovolném pořadí. Konečné pořadí soutěžících se určuje jak na základě počtu vyřešených šifer, tak i toho, kolik dní jim trvalo je vyřešit. Pokud soutěžící vyřeší šifru hned ten den, kdy byla zadána, přičte se mu do počtu dní 1, pokud ji vyřeší druhý den, přičte se do počtu dní 2, atd. Za nevyřešené šifry se žádné dny nepřičítají.

Jindra se bohužel o šifrovačce dozvěděl až později, a tak začal řešit až s několikadenním zpožděním. V den, kdy začal, vyluštil všechny už zveřejněné šifry, v následující dny pak vždy šifru vyluštil hned v ten den, kdy byla zveřejněna. Po 30 dnech soutěže má Jindra na kontě 30 vyluštěných šifer a 40 dní. Kolikátý den začal Jindra luštit? A jak se na to dá přijít?

Úloha 3A Robobrouci (7 bodů)

Je to tady – v civilizaci se začínají objevovat roboti! Konkrétně se to děje v broučí kolonii. Kněžice Kamila tak byla pověřena, aby o celé situaci podala odbornou zprávu. Na základě důkladného rozboru odebraných vzorků dospěla k následujícím dvěma grafům.



(a) Zastoupení součástek podle jejich počtu (otazník značí zbytek – neznámé součástky).

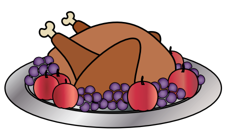
(b) Poměr známých a neznámých součástek podle hmotnosti.

Obrázek 1

Na prvním z nich je poměr zastoupených součástek, z nichž jsou vzorky tvořeny. Druhý graf pak ukazuje, kolik procent z celkové hmotnosti všech vzorků zaujímaly známé součástky a kolik procent tvoří zbylé, neznámé součástky.

Součástka pod technickým označením C(12) má podle technické specifikace PSP hmotnost 12 broučích jednotek, součástka O(16) váží 16 jednotek a součástka H(1) zase 1 jednotku. Neznámá součástka by mohla být Ca(40), Sc(44), Ti(47), V(51), Cr(52), Mn(54) nebo Fe(56), přičemž číslo v závorce vždy udává hmotnost součástky v broučích jednotkách. Poradíš Kamile, která součástka by to mohla být a proč?

Úloha 4A Štědrovečerní (9 bodů)



Ke Štědrovečerní tabuli zasedla početná rodinka myšáka Milana. I v tak sváteční den je však v maličké noře dusno. Máša nechce sedět vedle Míši, Mája by naopak chtěla sedět vedle Míly. Všichni sedí kolem jednoho stolu tak blízko od stěny, že projít někomu za zády je zcela nemožné. Pouze na jednom místě v čele stolu se mohou dvě myšky bez nesnází vyměnit. Dále si mohou myšky poposednout o jedno místo doprava, ale musí všechny najednou, aby jich někde nebylo moc. Známe-li nějaké (libovolné) cílové rozsazení myšek, lze je pomocí konečně mnoha posunutí a přehození usadit, aniž by některá musela ven do studené chodby nebo pod stůl? Zkus myškám takový postup navrhnout.

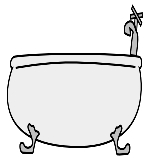
Úloha 5A Volby **(5 bodů)**

Ty nejdůležitější otázky veřejného života mají v Království zvířat na starosti dva demokraticky volené orgány – Komise pro schvalovaní nových příchutí cukrové vaty a Nejvyšší borůvková rada. Volby do Komise se konají každé čtyři roky, kdežto volby do Rady se opakují vždy po pěti letech. Kolik roků je průměrná doba mezi konáním (kterýchkoliv) dvou po sobě jdoucích voleb? Když se v jeden rok sejdou oboje volby, za jak dlouho se tak stane znovu? (Pokud se dvoje volby konají ve stejný rok, doba mezi jejich konáním je rovna nule.)

Kategorie starší

Úloha 1B Teplá koupel (5 bodů)

Mrož Medard se rád koupe ve studené vodě. Napouští si devadesátilitrovou vanu do poloviny objemu vodou o teplotě 10 °C. Hrošice Hermína ale preferuje vodu o teplotě 30 °C napuštěnou do jedné třetiny vany. Rozhodla se, že vypustí část vody, která zůstala po Medardovi, rychlostí 40 $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$ a dopustí horkou vodu o teplotě 40 °C, rychlostí 20 $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$. Jak dlouho má Hermína vypouštět studenou vodu a jak dlouho poté napouštět vodu teplou? (Předpokládejme, že voda mezitím nechladne a že Medard vodu svým tělem nezahřál ani o stupeň.)

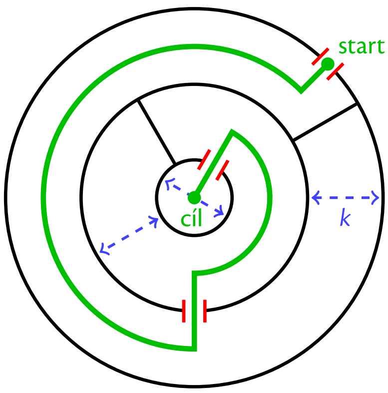


Úloha 2B Bludiště (6 bodů)

Blecha Blažena v poslední době naprosto propadla kouzlu bludišť. Rozhodla se, že si pro sebe jedno postaví. Nebude to ale jen tak ledajaké bludiště – u tohoto bude možnost upravit si délku cesty vedoucí k cíli! Blažena má následující plán: rozmístí několik uzavřených stěn ve tvaru kružnice, vždy ve stejné vzdálenosti k (viz obrázek), až zbude jen vnitřní prostor, v jehož středu je cíl. V každé kruhové stěně se pak bude nacházet jeden maličkatý bleší otvor, který povede do chodby v další úrovni bludiště. Aby to nebylo až příliš jednoduché, umístí Blažena do každé chodby také přesně jednu přepážku, znemožňující v daném místě průchod. Bludiště bude postavené tak, aby se kruhovými stěnami dalo libovolně otáčet a průchod se tedy mohl přesouvat. Stejně tak je možné stěhovat na každé úrovni libovolně i přepážky, jen si nesmí zablokovat průchod v kruhové stěně.

Jak vypadá bludiště, které má nejkratší možnou cestu od okraje do cíle? Jak dlouhá je cesta pro tříúrovňové bludiště, kde jsou kruhové stěny od sebe vzdáleny přesně $k = 1$ cm? Blažena začíná svou cestu ve vchodu do bludiště a v rámci kruhové úrovně se pohybuje vždy přesně v jejím středu. Průchodem do další úrovně prochází vždy, až když ho má přesně po pravé nebo levé ruce – teprve poté projde do další úrovně (opět doprostřed mezi kruhové stěny) a jde dál.

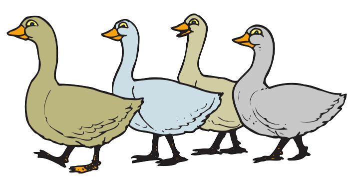
Jak vypadá bludiště, ve kterém je ta nejkratší možná cesta do cíle nejdelší ze všech možných bludišť? A jak je tato cesta dlouhá?



Obrázek 2: Bludiště.

Úloha 3B Husí pochod (7 bodů)

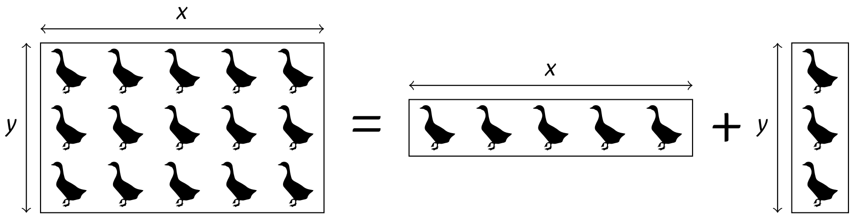
Husy pořádají velikou přehlídku. Choreograf houser Hubert má vymyslet velkolepý závěr, při němž budou husy pochodovat do nejrůznějších obrazců. Původně chtěl, aby husy utvořily obdélník nebo čtverec a následně se rozdělily na dvě skupinky – v jedné mělo být tolik hus, kolik jich bylo v obdélníku na délku, a v druhém tolik, kolik jich bylo na šířku (viz obrázek 3). Chtěl spočítat, kolik hus se bude muset zapojit, a šel na to takto:



Nechť jsou x a y počty hus v obdélníku na délku a na šířku. Hubertův záměr je pak shrnut rovnicí

$$x \cdot y = x + y.$$

Ta se převedením jednoho x na levou stranu upraví na $x \cdot (y - 1) = y$. Pokud náhodou neplatí $y - 1 = 0$, pak může Hubert vydělit obě strany výrazem $y - 1$ a dostat $x = \frac{y}{y-1}$. Pro různá y by tak vždy dopočítal x: třeba pro $y = 3$ by dostal $x = \frac{3}{2}$, pro $y = 11$ zase $x = 1{,}1$. Jenže zde je zádrhel – Hubert neví, jak zjistit, kdy budou y i výsledné x celá čísla (v choreografii nemůže vystupovat jedna celá a jedna desetina husy).



Obrázek 3: Původní Hubertova choreografie (nakreslený počet hus je jen ilustrační).

S řešením problému naštěstí přispěchal kačer Kryšpín:

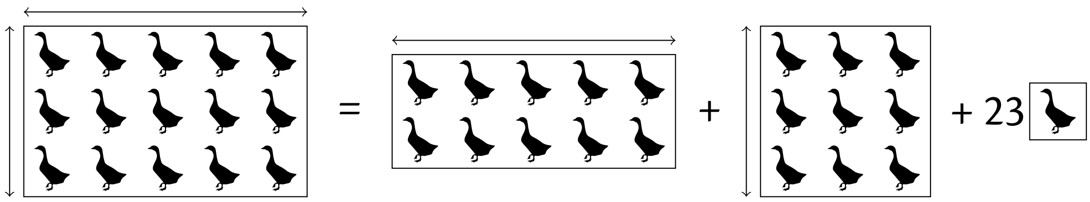
Kryšpín se vrátí k původní rovnici, kterou přepíše do tvaru $x \cdot y - x - y = 0$. Zde opět vytkne $x \cdot (y - 1) - y = 0$. Co kdyby se nyní podařilo vytknout i $(y - 1)$? V druhém členu stojí samotné $-y$, můžeme ale zkusit přičíst na obě strany 1, což dá

$$\begin{aligned} x \cdot (y-1) - y + 1 &= 1, \\ x \cdot (y-1) - 1 \cdot (y-1) &= 1, \\ (x-1) \cdot (y-1) &= 1. \end{aligned}$$

Toto je rovnice v součinovém tvaru, a Kryšpín z ní usuzuje:

Kdyby bylo $x = 1$, celá levá strana by vyšla $0 \cdot (y - 1) = 0$, zatímco pravá strana by zůstala rovná 1. Rovnice by tedy neplatila, takže nemůže být $x = 1$. Podobnou úvahou nemůže ani y být 1. To znamená, že obě x, y jsou alespoň 2, takže $x - 1$ i $y - 1$ jsou přirozená čísla. Součinový tvar rovnice tedy vyjadřuje, že součinem dvou přirozených čísel je 1. Ale jediný způsob, jak zapsat 1 jako součin dvou přirozených čísel je $1 \cdot 1$ – kdyby jedno číslo bylo alespoň 2, bude výsledný součin alespoň $2 \cdot 1 = 2$, což je víc než 1. Jediným možným rozkladem na součin tedy může být, když $x - 1$ i $y - 1$ jsou rovny 1. Z toho už Kryšpín usuzuje, že jediným řešením může být $x = 2$, $y = 2$. Pro jistotu ještě zkouškou ověří, že to skutečně je řešení původní rovnice: $x \cdot y = 2 \cdot 2 = 4 = 2 + 2 = x + y$.

Hubert je Kryšpínovou metodou řešení nadšen, nelíbí se mu však, že by se účastnily pouze čtyři husy. Proto už pracuje na nové choreografii – po obdélníkové sestavě má přijít fáze, kdy se husy rozdělí do tří skupin: v první bude dvojnásobek hus, než bylo v obdélníku na délku, ve druhé třikrát tolik, kolik bylo na šířku, a třetí skupinu bude tvořit přesně 23 hus (viz obrázek 4). Kolik hus je celkem potřeba na novou choreografii a jak to lze spočítat?

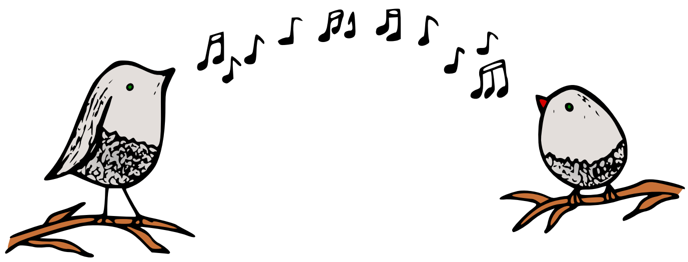


Obrázek 4: Nová choreografie (nakreslený počet hus je jen ilustrační).

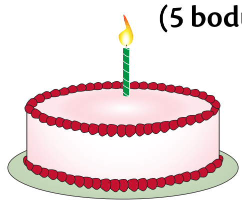
Úloha 4B Zpěvavá (9 bodů)

Kos Kilián učí sýkorku Sašetku zpívat. Už ji naučil čtyřem různým tónům – C, D, E a F. Aby ji motivoval, rozhodl se, že pro ni složí krátkou písničku o pěti stejně dlouhých notách. Ve správné kosí písničce se vedle sebe mohou objevit pouze tóny, které jsou vedle sebe i na stupnici nebo jsou totožné. Příklady takové písničky, které by navíc mohla Sašetka zazpívat, jsou třeba C D C D E nebo E D D E D. Naopak písnička C E D E F požadavky na správnou kosí písničku nesplňuje.

Teď si Kilián láme hlavu nad tím, jestli vůbec může něco opravdu nového složit. Vždyť už bylo složeno tolik písniček! Kolik existuje různých písniček, se kterými může Kilián přijít? A o kolik by jich bylo víc, kdyby písnička byla delší a obsahovala šest not? A sedm? Písničky nevypisuj, to by Kilián doopravdy nic nového nesložil. Raději si rozmysli, co potřebuješ vědět, když chceš na konec nějaké písničky přidat další notu.



Úloha 5B Pečení piškotu **(5 bodů)**



Kivi Viki peče piškot. V receptu se píše, že se těsto má péct v kruhové formě o průměru 25 cm, Viki má ale k dispozici pouze obdélníkový plech o rozměrech 25 cm × 30 cm. Viki by si přál, aby výška piškotu, když jej upeče na plechu, byla stejná, jako kdyby jej upekl podle původního receptu v kruhové formě. Zároveň ale chce použít celočíselný počet vajec a zachovat přesně poměry všech ingrediencí. V původním receptu jsou použita 4 vajíčka. Z jakého množství vajec má Viki udělat těsto, aby rozdíl mezi výškou jeho piškotu a piškotu udělaného přesně podle receptu byl co nejmenší?