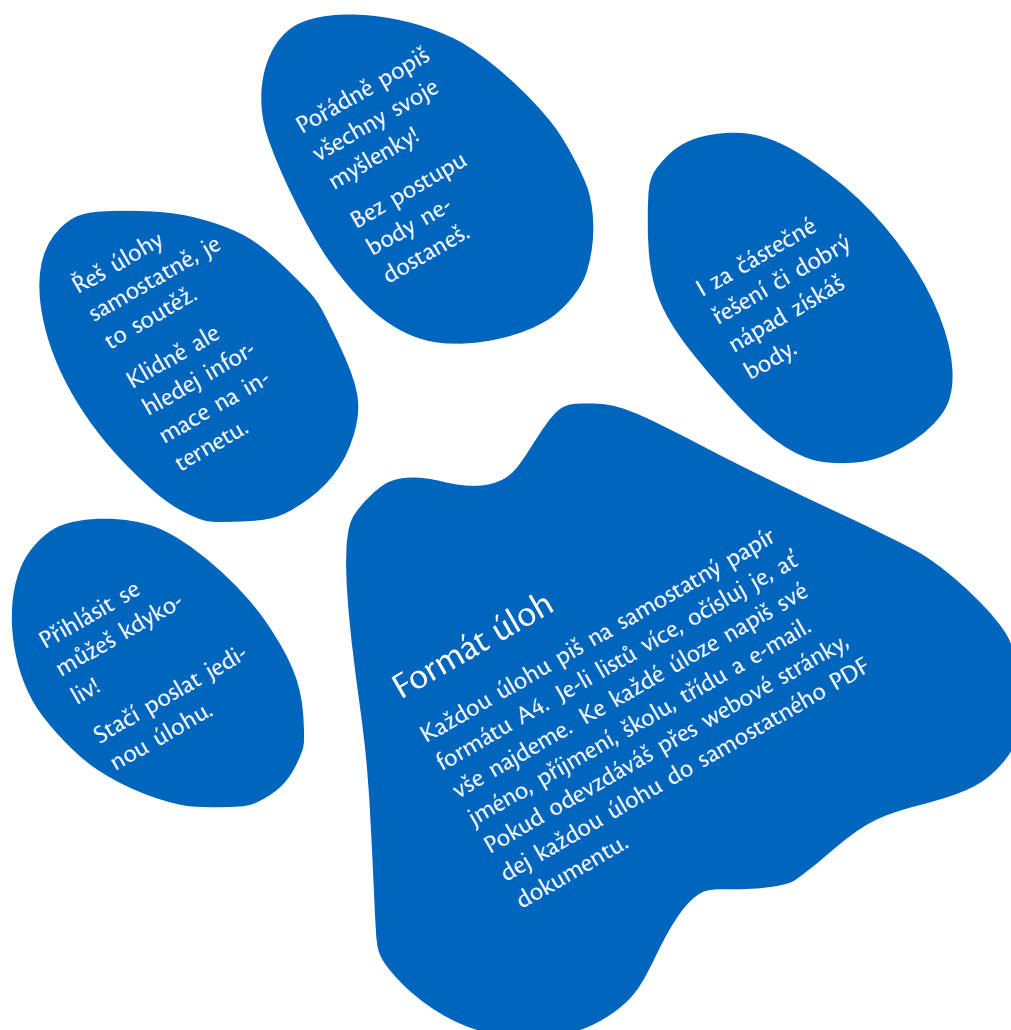


Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již třináctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záluďných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama.lvova.cz> a dále na Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **22. listopadu 2021** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přeji

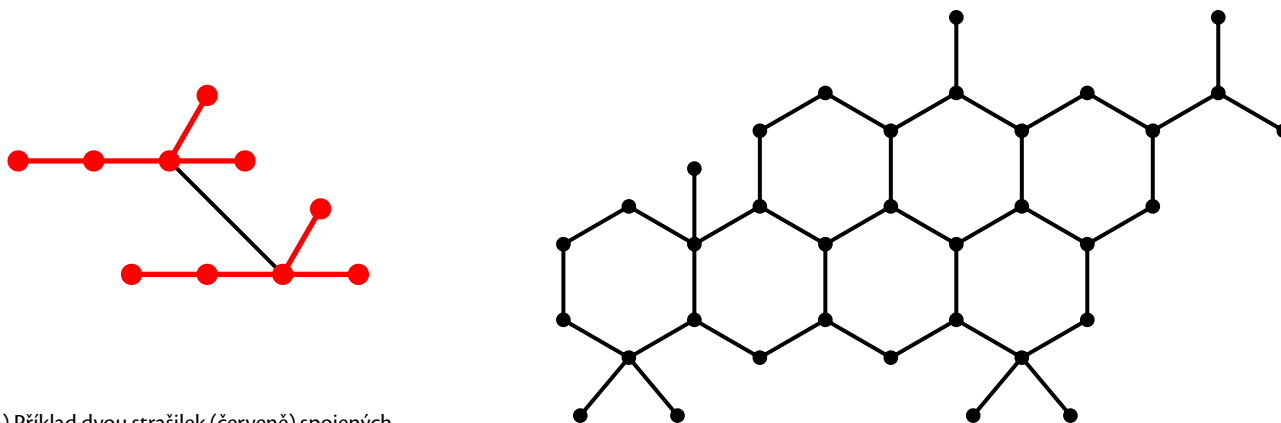
Alenka, Hanka, Honza, Káťa, Kobi, Láďa, Lenka, Lída, Matěj, Maťa, Tereška, Verča, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Strašilky

(5 bodů)

Daněla Klárka je nadšená bioložka a ráda zkoumá malá zvířátka zvaná strašilky. Má to ale háček. Strašilky jsou velmi plachý hmyz, který se rád maskuje za větvičky a splývá tak s okolím. Každá strašilka má dvě tykadla, hlavičku a tělíčko, které se skládá ze dvou článků (viz obrázek 1a). V případě potřeby se dokáže i různě ohýbat a zkroutit, ale nikdy to neudělá tak, aby se nějaké z jejích tykadel přímo dotklo jejího těla. Pokud se náhodou na nějakém keři snaží schovat více takových tvorečků, tak jsou vždy vůči sobě ohleduplní a aby se vzájemně nevyplašili, nikdy se přímo nedotýkají jeden druhého. Tedy pokud náhodou chtějí dvě strašilky předstírat jednu větvičku, vždy si mezi sebe přidají aspoň jeden kus opravdového dřeva, které vede vždy buď k hlavičce, tykadlům nebo tělním článkům (viz příklad na obrázku 1a, větviček však může být více a mohou vést i například od hlavy k jednomu z tělních článků atp.).



(a) Příklad dvou strašilek (červeně) spojených větvičkou (černě).

(b) Klárčina větvička.

Obrázek 1

Klárka objevila velmi podezřele vypadající větvičku a je přesvědčena, že na ní jistě bude mnoho strašilek (viz obrázek 1b). Jenže pořádně nedokáže rozeznat objekty svého zkoumání od okolních skutečných kusů dřeva, což celé bádání docela komplikuje. Dokážeš jí poradit, jaké množství strašilek se tam může nejvýše vyskytovat, a ukážeš jí, kde by se v takovém případě schovávaly?

Úloha 2A Oslavy

(6 bodů)

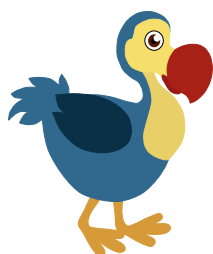
Plameňák Petr si založil svoji malou firmu. Bude pořádat narozeninové oslavy! Spousta zvířátek si u Petra oslavu objednala a Petr jim všechno nadšeně slíbil. Ale co to? Všichni mají narozeniny v listopadu a v říjnu už Petr nic nestihne. Od zvířátek ví, že:

- Antilopa Anička chce slavit 10. nebo 14. a na její oslavu je potřeba 7 dní přípravy.
- Bizon Bedřich navrhuje 11., 23. nebo 28. a příprava trvá 5 dní.
- Cikáda Cilka by ráda oslavu 6., 13. nebo 20. s dobou přípravy pouhé dva dny, ale také Cilce slíbil pomoc se zařízením a reklamou její nové cukrárny, která se má otevřít 22. – tedy 21. večer musí být vše připraveno. Aby bylo vše dokonalé, potřebuje 5 dní.
- Dikobraz slaví buď 13., 20., nebo 29., na přípravu stačí 3 dny.
- Emu Edvard by rád slavil 8., 23., nebo 30. Přípravu Petr zvládne za dva dny.



Některé věci je třeba řešit na poslední chvíli, a proto se chce Petr den před každou oslavou věnovat přípravě nadcházející oslavy. V den oslavy Petr obsluhuje zvířátka u baru a nestačí nic připravit. (Tento den se tedy nepočítá do doby přípravy ani této, ani další oslavy.) Výjimku má Cilčina cukrárna, tam stačí, když bude mít 21. večer odpracovaných 5 dní, u otevírání být nemusí, není ani nutné končit přesně 21. Kteroukoli práci lze nechat rozdělanou a vrátit se k ní, ale půlení dní je pro Petra značně neefektivní. Jak si má Petr listopad uspořádat, aby všechnu práci stihl?

Úloha 3A Tajná zpráva

(7 bodů)


Dodo Dan chce poslat svému kamarádovi tygroví Tomášovi tajnou zprávu. K dorozumívání jim stačí čtyři kódová slova skládající se z jedniček a nul. Konkrétně si domluvili slova 00000, 10011, 00111, 11010.

Při přenosu zprávy se ale občas stane chyba – namísto jedničky na některé pozici ve slově dorazí nula a naopak. Tygr Tomáš však v některých případech dokáže objevit, že je ve slově chyba a někdy dokonce přijít na to, jaké slovo bylo ve zprávě původně. Při kolika nejvíce chybách dokáže Tomáš chyby vždy objevit a kdy je dokonce i opravit? Jak by to fungovalo, kdyby zvolená čtyři slova byla 00000, 11110, 11010, 00100? Dokážeš tvrzení zobecnit pro jakákoliv slova složená z jedniček a nul? Uvažuj pouze případy, kdy jsou všechna kódová slova stejně dlouhá.

Úloha 4A Natahovací hodinky
(9 bodů)

Emu Emanuel si potrpí na dochvilnost a všude se snaží chodit přesně na čas. Řídí se přitom podle svých náramkových hodinek, které však ne vždy ukazují správný čas. Nepotřebují baterky a běží stále stejnou rychlostí, oproti správnému času se však neustále o maličko předcházejí. Většinou mu to nevádí, každý obyčejný den má naplánovaný stejně a má v něm jasný řád:

- Ráno, když jeho hodinky ukazují 9:15, vyrazí ze svého domu pěšky do práce.
- Když prochází přes Velké náměstí, jeho hodinky ukazují 10:00, zatímco hodiny na věži, které jdou zcela přesně, ukazují 8:30.
- V tento okamžik tak Emanuel nařídí svoje hodinky na 8:30 a jde dál.
- Do práce dorazí, zrovna když jeho hodinky ukazují 8:45.
- Přes den je Emanuel v práci. Ve chvíli, kdy jeho hodinky ukáží 17:00, zanechá vše, co má rozpracované, zvedne se, a vyrazí domů stejnou cestou a stejnou rychlostí, jako ráno přišel.
- Když prochází přes Velké náměstí, hodiny na věži ukazují 16:30. Opět tak své hodinky přeřídí na správný čas, tedy 16:30.
- Doma se Emanuel věnuje svým koníčkům. Někdy během večera (každý den ve stejný čas) se ubere na kutě: během spánku na jeho hodinkách uplyne vždy přesně 8 hodin. Poté se Emanuel vzbudí.
- Ráno mu trvá přesně 30 minut (skutečného času, nikoliv jak ukazují hodinky), než se nasnídá a vypraví z domu.
- Jeho další den pak pokračuje úplně stejně.

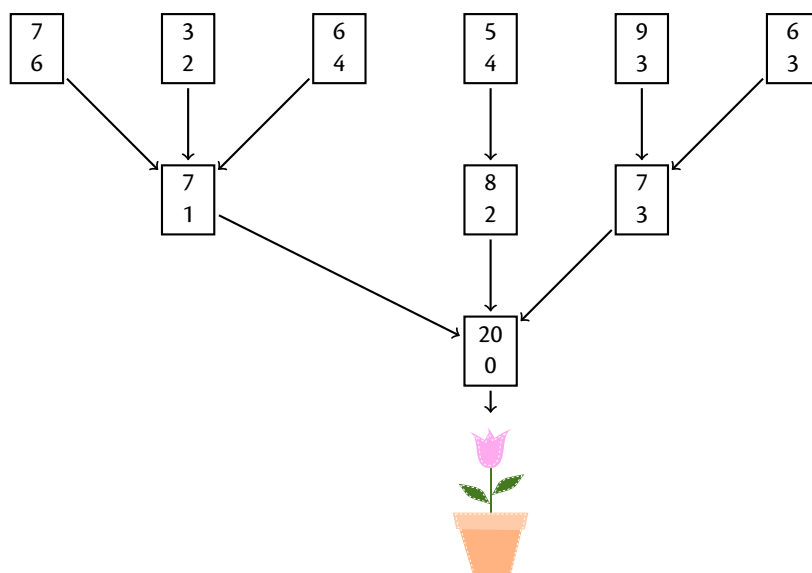


Jenže tuto sobotu ale nastane výjimka, přesně v 8 hodin ráno (podle správného času) se má sejít s kepokakem Květoslavem na Velkém náměstí. Na schůzku chce přijít, jak se sluší, přesně včas.

V pátek večer dorazil Emanuel domů z práce jako obvykle. V kolik hodin podle svých hodinek má jít spát, aby jako obvykle naspal 8 hodin podle svých hodinek, během půlhodiny skutečného času se nasnídal a poté stejnou trasou jako obvykle dorazil na Velké náměstí přesně v okamžik, kdy hodiny na věži odbijí 8 hodin?

Úloha 5A Zalévání kytičky
(5 bodů)

Myška Hanka má ráda květiny a inženýrství. Na zalévání svých nejvzácnějších rostlin si proto postavila důmyslný zavlažovací systém, skládající se z několika kbelíků (obdélníky na obrázku 2) a trubek, které je propojují (na obrázku šipky). Každý kbelík má určitou „převraccí kapacitu“ (vrchní číslo v obdélníku): Pokud je v kbelíku alespoň tolik litrů vody, kbelík se převrátí a veškerá voda oteče trubkou do kbelíku pod ním. (Kbelíky jsou ve skutečnosti větší, než je jejich „převraccí kapacita“. Může se tedy stát, že v kbelíku s převraccí kapacitou 15 l se ocitne 20 l vody. Tento kbelík se potom převrátí a veškerých 20 l oteče trubkami do kbelíku pod ním.)



Obrázek 2: Zalévací systém.

Aktuální množství vody v jednotlivých kbelících udává spodní číslo v každém obdélníku. Poradíš Hance, do kterých kbelíků a jaké množství vody má přilít, aby byla kytička zalita alespoň 20 l vody? Voda je těžká a studná je daleko, takže by Hanka chtěla, aby celkové množství vody, které musí do kbelíků přilít, bylo co nejmenší.

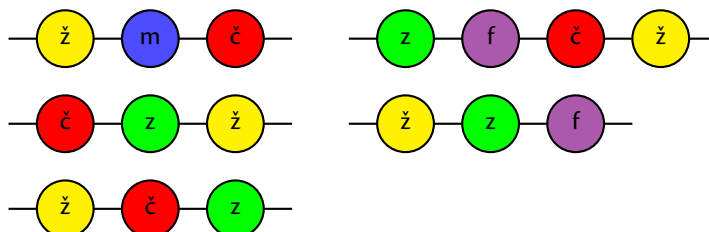
(Vodu je možno nalévat do libovolných kbelíků, ale nelze ji přelévat z kbelíku do kbelíku. Také není možné zalít kytičku přímo, bez použití zavlažovacího systému.)

Kategorie starší

Úloha 1B Drahý náhrdelník

(5 bodů)

Straka Šárka má moc ráda poklady, a udělalo jí proto nesmírnou radost, když pro ni její kamarádka perlorodka Pavla vyrobila ze svých různobarevných perel náhrdelník. Slíbila, že si dárek rozbalí až na své narozeniny, ale je nesmírně zvědavá a ráda by už nyní věděla, jak náhrdelník vypadá. Nakukovala tedy do dárku malou štěrbinou v balicím papíru a zahlédla tak několik kousků náhrdelníku. U těchto kousků ví přesně, v jakém pořadí jsou v něm jednotlivé barvy vyskládaný zleva doprava (náhrdelník je v krabičce upevněn, takže si je jistá směrem vlákna, na kterém jsou perly vyskládané), zato ale netuší, v které části celého řetězce je zrovna zahlédla. Konkrétně šlo o seskupení zobrazená na obrázku 3.



Obrázek 3: Kousky náhrdelníku.

Od Pavly se jí už dříve podařilo zjistit, že se na náhrdelníku celkem vyskytuje 11 perel pěti různých barev: žluté, červené, fialové, zelené a modré. Dále ví, že žluté perly jsou početnější než perly kterékoliv jiné barvy a mezi ostatními čtyřmi barvami je pak červená početnější než každá ze zbylých tří. Její kamarádka jí prozradila i to, že první i poslední perla má stejnou barvu, a jinou shodnou barvu mají stejně tak i druhá a předposlední perla. Dokážete poradit nedočkavé Šárce, jak vypadá její nový náhrdelník?

Úloha 2B Hra

(6 bodů)

Zvířátka v Království si ráda krátí dlouhou chvíli hrou na četníky a lupiče. Hra funguje takto: libovolný počet zvířátek se sejde na hřišti a každé si na začátku hry zvolí, zda bude hrát četníka či lupiče. Zvolenou roli zvířátka v průběhu hry nemohou změnit. Zvířátka potom začnou náhodně běhat po hřišti. Vždy, když se dvě zvířátka potkají, získají body podle následujících pravidel:

- Potkají-li se dva četníci, každý dostane 2 body.
- Potkají-li se dva lupiči, každý dostane 12 bodů.
- Potká-li se četník s lupičem, pak lupič dostane 3 body a četník 11 bodů.

Cílem je samozřejmě mít na konci co nejvíce bodů. Hra se hraje po dlouhou dobu a hráči běhají zcela nahodile.

Okapi Nataša právě teď hraje na hřišti, kde se sešli 4 četníci a 5 lupičů (Nataša je jedním z 9 hráčů). Kdo má za těchto podmínek větší šanci vyhrát – jeden z četníků, anebo některý lupič?

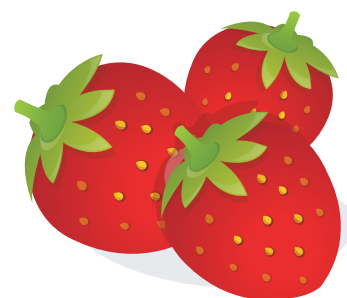
A co kdyby se Nataša přesunula na vedlejší hřiště, kde už hraje 5 četníků a 5 lupičů, a přidala se k nim jako jedenáctá? Vyplatí se jí víc hrát jako četník, nebo jako lupič?

Úloha 3B Hostina

(7 bodů)

Dodo Dan chce pozvat své kamarády na hostinu. Má v plánu udělat ovocné knedlíky tří typů – borůvkové, jahodové a švestkové. Jeho kamarádi jsou ale vybíraví, a některé ovoce jim nechutná. Proto všem 130 pozvaným hostům rozeslal dotazník a spočítal, kolik zvířátek na kterou otázku odpovědělo kladně. Výsledky byly následující – u každé otázky je uveden počet zvířátek, která odpověděla „ano“:

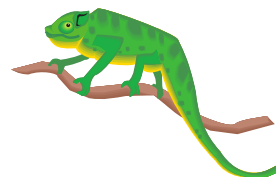
1. Chutnají ti borůvky? 46
2. Chutnají ti jahody? 65
3. Chutnají ti švestky? 60
4. Chutnají ti borůvky i jahody? 5
5. Chutnají ti jahody i švestky? 28
6. Chutnají ti borůvky i švestky? 21
7. Chutnají ti borůvky i švestky, ale nechutnají ti jahody? 16



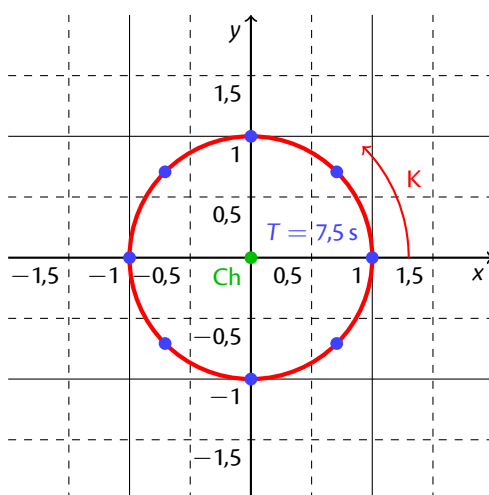
Dodo Dan sice není nejlepší tvůrce dotazníků, ale je dobrý hostitel, a tak by rád připravil nějaké jídlo i pro zvířátka, kterým nechutná žádné z uvedených druhů ovoce. Dokážeš z výsledků dotazníku zjistit, kolika zvířátkům musí Dan uvařit špagety?

Úloha 4B Mrkací
(9 bodů)

Je horký letní den a chameleon Chlodvík se sluní ve svém teráriu. Na jeho rovné podlaze má zakreslenou souřadnicovou soustavu s osou x , která ukazuje přímo na východ, a osou y , která ukazuje přímo na sever. V bodě, kde se protínají – má souřadnice $(0,0)$ a říkáme mu *počátek* – nyní Chlodvík odpočívá. Jeho klidné rozjímání však ruší komár Karel, který jej obletuje po kružnici s poloměrem 1. Má přitom stále stejnou rychlost, létá (při pohledu shora) proti směru hodinových ručiček a jeden celý oblet mu trvá 1 minutu. Chlodvík ho jen líně pozoruje: jedním okem sleduje x -ovou souřadnici bodu, v němž se Karel zrovna nachází, zatím druhým okem sleduje y -ovou souřadnici. Protože nemá nic lepšího na práci, začal si tyto souřadnice kreslit do grafů: jeden zobrazuje x -ovou souřadnici v závislosti na času, druhý y -ovou souřadnici v závislosti na času. Jak budou tyto dva obrázky vypadat? (Předpokládej, že Karel začíná své kroužení v bode $(1,0)$.)



Po několika minutách takového kreslení však Chlodvíka začala jednotvárnost této činnosti unavovat, víčka mu klesla a šel na něj spánek. Rozhodl se tedy, že bude mít oči zavřené, ale zvolí si nějakou *mrkací dobu* T a vždy po jejím uplynutí oči otevře, zanesse Karlovy souřadnice do grafů a poté oči zase zavře a bude po dobu T čekat (viz příklad na obrázku 4). Tím dostane v grafech jen několik oddělených bodů, ty pak jednoduše propojí úsečkami, a dostane tak nějaké lomené čáry. Tyto obrázky nebudou úplně přesně odpovídat Karlovu kroužení, ale Chlodvík doufá, že budou stále vypadat zhruba podobně jako dokonale zakreslené grafy, které kreslil zpočátku.



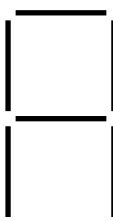
Obrázek 4: Karel (K) létá kolem Chlodvíka (Ch). Modré body značí pozice, v nichž by Chlodvík Karla viděl s mrkací dobou $T = 7,5$ s.

Jedno mu však vrtá hlavou – jak zvolit délku mrkací doby T , aby byly obrázky stále rozpoznatelné? Chlodvík se nechce zbytečně moc namáhat, takže by T nemělo být příliš malé (musel by otvírat oči moc často), nechce však nepřesné grafy.

- Doporuč Chlodvíkovi vhodnou hodnotu mrkací doby T , pro kterou se získané grafy ještě budou podobat skutečné situaci. Načrtni grafy s touto mrkací dobou.
- Existují naopak nějaké velice nešťastné hodnoty T , které dávají zcela zavádějící obrázek? Mohl by Chlodvík zvolit T tak, že by z následného pozorování nabyl dojmu, že Karel létá v opačném směru (po směru hodinových ručiček) či úplně jinou rychlostí, než létá doopravdy?

Úloha 5B Digitální písmenka
(5 bodů)

Drozd David dostal krásný digitální budík, který má displej složený z klasicky rozmístěných 7 světel k zobrazování číslic (viz obrázek 5). David je nicméně odjakživa vysloveně ranní ptáče, a tak budík vlastně nepotřebuje. Rozhodl se tedy, že by jej mohl využít místo zobrazování nudných čísel k tomu, aby mu vypisoval písmenka. Rád by dokázal, aby mu přístroj uměl vypsát všech 26 základních písmen abecedy tak, aby od sebe byla vzájemně odlišitelná – není však nutné, aby se podoby písmen na displeji jakkoliv podobaly jejich běžnému tvaru. Může se mu to podařit? Pokud ano, je k tomu potřeba využít všech 7 světel, nebo by stačil i displej s méně světelky?



Obrázek 5: Sedm segmentů digitálního displeje.