JÁMA LVOVÁ

Ahoj!

Vítej v Jámě lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již dvanáctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na `https://jamalvova.cz` a dále na Facebooku.

Pořádně popiš všechny svoje myšlenky! Bez postupu body nedostaneš.

I za částečné řešení či dobrý nápad získáš body.

Řeš úlohy samostatně, je to soutěž. Klidně ale hledej informace na internetu.

Přihlásit se můžeš kdykoliv! Stačí poslat jedinou úlohu.

Formát úloh

Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. Je-li listů více, očísluj je, ať vše najdeme. Ke každé úloze napiš své jméno, příjmení, školu, třídu a e-mail. Pokud odevzdáváš přes webové stránky, dej každou úlohu do samostatného PDF dokumentu.

Svá řešení nám pošli do **19. dubna 2021** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Hanka, Honza, Káťa, Kobi, Láďa, Lenka, Lída, Matěj, Maťa, Terezka, Verča, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Tajemný předmět (5 bodů)

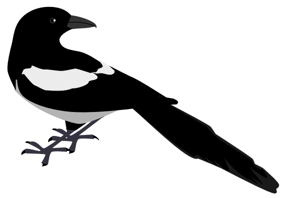
Slavný mistr magie fenek František, kuriózní kouzelník, impresivní iluzionista a pán zázraků, chystá nový trik s mizejícím a znovu se objevujícím předmětem. Jeho asistent tučňák Ťuňťa tak dostal za úkol opatřit přesnou kopii věci, která bude k této iluzi použita.

Zaneprázdněný František na něj ale stačil pouze vyštěknout, že jde o jednoduchý geometrický třírozměrný útvar vyznačující se dvěma rovnoběžnými čtvercovými podstavami. Obě podstavy mají stranu 2 cm, celý útvar má výšku 5 cm a všechny jeho hrany vedoucí mezi podstavami jsou vzájemně rovnoběžné.

Ťuňťa by opravdu nerad něco zkazil, ale zároveň nechce vyrušovat nedůtklivého Františka, a tak dumá, jestli mu tyto informace stačí k tomu, aby donesl ten správný geometrický objekt, nebo jestli tento popis odpovídá více možným objektům, a bylo by tedy lepší se přece jen na něco dalšího doptat. Zamysli se společně s ním a poraď mu, má-li se Františka přece jen na něco zeptat (a pokud ano, tak na co), nebo jestli už ví vše potřebné (v tomto případě ho nějakým dobrým argumentem ujisti o tom, že skutečně ví vše potřebné). Zkus Ťuňťovi načrtnout, jak by takový mizející předmět fenka Františka mohl vypadat.

Úloha 2A Váha zaokrouhluje (6 bodů)

Straka Soňa objevila v harampádí na půdě krásnou starou váhu. Ihned se zaradovala, že ji může využít k zvážení zlatých náušnic, které v průběhu let nashromáždila (všechny náušnice jsou zcela stejné, tedy stejně i váží). Její nadšení ale netrvalo dlouho. Váha totiž při vážení zaokrouhluje na celé gramy, a ona si slibovala mnohem přesnější hodnotu. Napadlo ji ale, že pokud zváží více náušnic naráz, mohla by se přece jen dopátrat přesnějšího výsledku. Nelenila tedy a pro různé počty náušnic dostala hodnoty v tabulce 1.



Počet náušnic	Zaokrouhlená hmotnost (g)
1	1
2	3
3	4
10	14
20	27

Tabulka 1: Sonino vážení.

I když Soňa tuší, že z těchto čísel už by se dala získat celkem přesná hmotnost jedné náušnice, neví jak přesně se k tomuto číslu dobrat. Poradíš jí, jak má postupovat, a dokážeš určit, jakou hmotnost (s přesností na desetinu gramu) má jedna náušnice?

Úloha 3A Pětková tabulka (7 bodů)

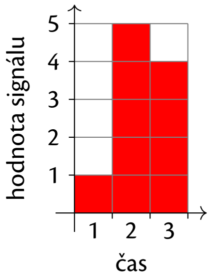
Mořské hvězdice mají ze zjevných důvodů v oblibě číslo 5, proto většina jejich her a úloh toto číslo v hojné míře obsahuje. Hvězdice Aranka se tak rozhodla vymyslet hádanku, při které budou ostatní hvězdice vyplňovat čísla do tabulky 5×5 podle pěti pravidel, které určila takto:

(1) Políčko s lichým číslem nesmí sousedit stranou s jiným políčkem s lichým číslem.
(2) Políčko se sudým číslem nesmí sousedit stranou s jiným políčkem se sudým číslem.
(3) V žádném řádku se nesmí stejné číslo objevit víckrát než jednou.
(4) Pro každá dvě čísla ve stejném sloupci platí, že jejich rozdíl není jedna.
(5) Čísla v tabulce musí být přirozená, tedy 1, 2, 3, …

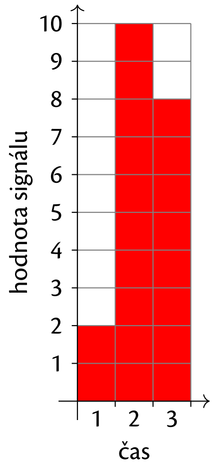
Bude možné takovou tabulku vyplnit beze zbytku použitím právě pěti různých čísel? A jak mají hvězdice tabulku vyplnit, aby navíc součet čísel na všech políčkách v tabulce byl co nejmenší, dělitelný pěti a tabulka byla zaplněna co nejmenším počtem různých čísel? (Není úplně snadné zjistit, zda nalezené řešení opravdu používá ten nejmenší možný počet čísel, pokus se jich prostě použít, co nejméně jen dovedeš.)

Úloha 4A Telefonní spojení (9 bodů)

Sovička Pavel se jakožto známý dobrodruh Země zvířátek vydal na průzkum do neprobádaného pralesa. Rád by ale zůstal v kontaktu se svými přáteli, a tak si pořídil již poněkud starší telefonní linku (nové jsou příliš drahé). Stáří se na lince projevilo tak, že nepřenáší zvuk správně, ale zesílený, zeslabený či jinak modifikovaný. Zvuk se na této telefonní lince dá reprezentovat hodnotami v čase, například zápis [1 5 4] by znamenal, že v čase 1 bude hodnota přeneseného signálu 1, v čase 2 bude 5 a v čase 3 bude mít signál hodnotu 4 (znázornění je na obrázku 1a).



(a) Znázornění ukázkového signálu [1 5 4].



(b) Znázornění dvojnásobku ukázkového signálu.

Obrázek 1

Pavel zjistil, že když do telefonu pustí v nějakém okamžiku zvuk [1], tak je na druhé straně slyšet zpráva reprezentovaná posloupností [2 4 0 4 1 3] (signál se přenáší hrozně rychle, takže můžeme říct, že první hodnota přeneseného signálu je na druhé straně hned). V tomto případě je vidět, že zvuk na druhé straně telefonu může být delší, než ten, co Pavel do telefonu řekl. To také znamená, že na druhé straně telefonu se v jeden časový okamžik může zvuků sejít více.

Dále ví, že když zvuk, co do telefonu pouští vynásobí číslem a (tj. každá hodnota na vstupu se vynásobí a), tak na druhé straně bude výstup také vynásoben a (každá hodnota výstupu bude vynásobena a). Znázornění tohoto pravidla je na obrázku 1b. Poslední pravidlo, které v telefonu funguje je, že pokud do něj na jednom konci pustí dva zvuky najednou, tak na druhém konci bude stejný zvuk, jako kdyby je pustil zvlášť a pak se výstupy sečetly (v každém čase se sečtou všechny hodnoty, které se v tom čase přenesly).

Pavla by zajímalo, co uslyší buřňák Tomáš na druhé straně hovoru, když mu řekne zprávu reprezentovanou posloupností [6 4 0 7 3]. Přemýšlel taky nad tím, jestli dokáže zjistit, co má do telefonu říci, když bude chtít, aby Tomáš slyšel určitou zprávu. Konkrétně, když chce, aby Tomáš slyšel zprávu reprezentovanou posloupností [6 20 30 40 23 49 19 29 2 6], co má do telefonu říci? Pomoz Pavlovi si lépe představit, co se v telefonu děje tím, že nakreslíš grafy závislosti hodnoty signálu na čase pro oba předchozí příklady (podobně jako jsou zakresleny příklady v zadání), kde barevně rozlišíš části, ze kterých se celá zpráva podle uvedených pravidel skládá.

Úloha 5A Stonožka (5 bodů)

Mlsná stonožka má chuť na něco na zub, a proto se rozhodla ušlehat si smetanu. V jejím domečku však zrovna nejde proud, takže nemůže použít elektrický šlehač. Její mlsnost je ale silnější než nepřízeň osudu, a tak se rozhodla ušlehat svou oblíbenou pochoutku ručně (v jejím případě spíše nožmo). Do jedné nožičky si vezme metličku a šlehá tak dlouho, jak to jen jde. Jakmile je daná noha příliš unavená, přehodí si metličku do jiné nožičky a hrdinně šlehá dál. Dosud nepoužitá noha dokáže šlehat 10 sekund, zatímco unavená noha může po 20sekundovém odpočinku šlehat ještě 5 sekund – ale pak už se ani nehne. Stonožka si bude muset práci dostatečně dobře rozvrhnout, protože aby měla šlehačka správnou chuť, musí se šlehat bez přestávek.

Označení stonožka navíc trochu klame – má jenom 15 dvojic nožiček (očíslovaných 1 až 15), přičemž ve dvojici je vždy jedna noha na levé a jedna na pravé straně. Když chce přesunout metličku do jiné končetiny, musí ji předat na protější stranu (zleva doprava, resp. zprava doleva). Navíc musí metličku předat buď do protější nožičky ze stejného páru, anebo z páru o jedna vpřed či vzad. Pokud zrovna metličku drží např. pátá noha napravo, může ji předat do čtvrté, páté nebo šesté nohy nalevo.

Na výrobu jednoho kelímku šlehačky je třeba šlehat 5 minut. Může si stonožka naplánovat práci tak, aby vydržela šlehat celých 5 minut v kuse, pokud začíná s metličkou v první nožičce napravo? A kolik kelímků (či jeho částí) dokáže z této počáteční pozice ušlehat?

Kategorie starší

Úloha 1B Rumová (5 bodů)

Spousta zvířátek i lidí miluje cukr – existují však i živočichové, kterým podobným způsobem chutná alkohol, a mohou jej mlsat bez toho, aniž by se opili. Mezi takové organismy patří i maličké kvasinky, které alkohol využívají dokonce jako zdroj své energie, stejně jako my využíváme jídlo, které sníme.

Gaviálka Sylvia je nadšená vědátorka, a v některých svých pokusech by tyto malé kvasinky ráda zkoumala. Protože jsou ale maličké, potřebuje jich opravdu mnoho. Aby jí jejich početné kolonie nevyhladověly, potřebovala by pro ně 12 ml alkoholu – nicméně s hrůzou zjistila, že rum, který pro ně měla, spotřebovala na upečení vosích hnízd. Doma našla už jen 145gramové balení rumových pralinek, které dle informací na obalu obsahují pouze jedno procento 50% roztoku rumu (procenta jsou zde počítána z hmotnosti).

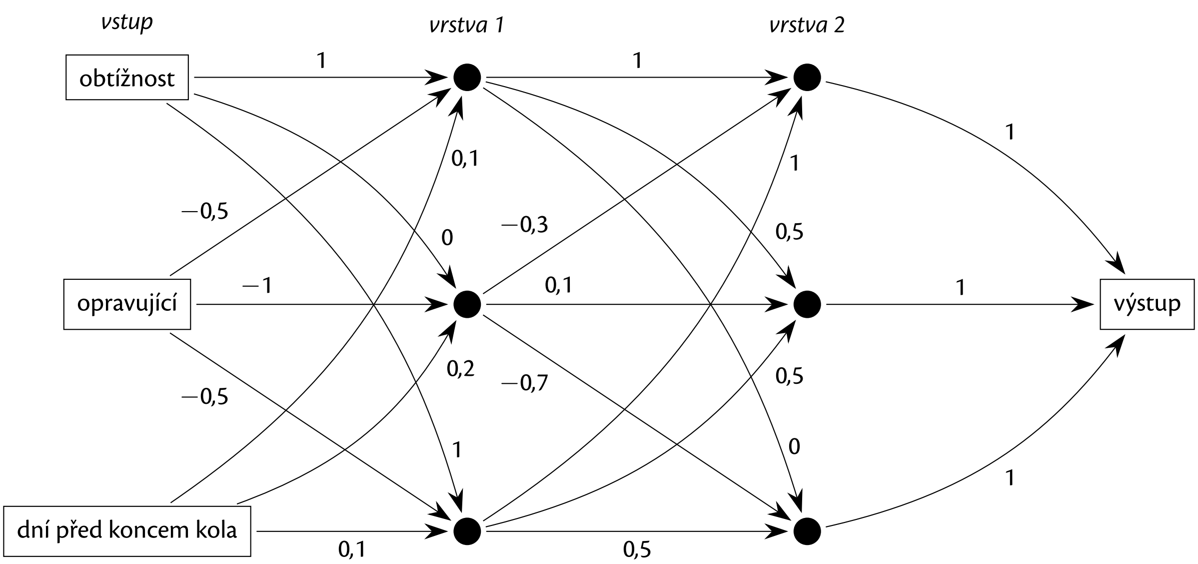
Podaří se jí udržet s těmito pralinkami všechny svoje kvasinky při životě? A kolik ze svých třiceti pracně vytvořených vosích hnízd by musela obětovat místo těchto pralinek, pokud do vosích hnízd omylem dala dvojnásobné množství rumu, než bylo psáno v receptu, tedy místo tří lžic 40% rumu (zde jsou procenta objemová) jich do těsta, vážícího 400 g, dala šest, přičemž objem jedné lžíce je 15 ml a hustota alkoholu 0,79 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$?

Úloha 2B Neuronová síť (6 bodů)

Kachna Matylda chce předpovídat, kolik bodů dostane za úlohu 2B v příštím kole Jámy lvové. Naprogramovala si tedy takzvanou *neuronovou síť*. Neuronová síť se skládá z několika *neuronů* (na obrázku 2 značeny kolečky), které jsou propojeny *hranami* (na obrázku 2 značeny šipkami). Každá hrana má rovněž přiřazeno určité číslo, takzvanou *váhu*. Neuronová síť provádí následující jednoduchý výpočet: Matylda zadá hodnoty vstupních veličin (na obrázku 2 značeny obdélníky vlevo). Ty jsou poté poslány po hranách do všech neuronů v první vrstvě. Každý neuron v první vrstvě potom sečte hodnoty

$$(\text{hodnota poslaná po hraně}) \cdot (\text{váha hrany})$$

přes všechny hrany, které do něj vedou, a výsledek pošle po výstupních hranách po směru šipek do neuronů ve druhé vrstvě. Ty provedou ten samý výpočet a výsledek opět pošlou po výstupní hraně do posledního, výstupního neuronu (čtverec vpravo). Ten nakonec sečte všechny hodnoty přenásobené vahami hran a vypíše výsledek.



Obrázek 2: Matyldina neuronová síť.

Matylda používá jako vstup tři proměnné: jak se jí zdála úloha těžká (0 = těžká, 1 = středně těžká, 2 = lehká), kdo úlohu opravuje (0 = Zuzka, 1 = Alenka, 2 = Kobi, 3 = Matěj) a kolik dní před koncem kola úlohu odevzdala.

Jaký bodový zisk neuronová síť předpoví, pokud se úloha Matyldě zdála středně těžká, odevzdala ji 7 dní před koncem kola a úlohu opravuje Alenka? A existuje vstup takový, že síť předpoví nesmyslný počet bodů (menší než 0, nebo větší než 6)?

Úloha 3B Generování řetězců (7 bodů)

Holub Honza miluje šifry, a zároveň má moc rád čísla. Nyní přišel na skvělý nápad, jak tyto své dvě záliby propojit. Rozhodl se, že si vybere několik písmen, a pro každé písmeno vymyslí určitá přepisovací pravidla, tedy způsoby, jakými se písmeno promění na uskupení jiných symbolů. Potom si Honza ještě zvolí tzv. počáteční symbol, tedy písmeno, které má na úplném začátku. Pak na ně může začít aplikovat pravidla, která si vymyslel (přičemž nachází-li se ve vzniklém uskupení znaků nějaké písmeno, může pravidla aplikovat i na něj, v dalším kroku také, dokud bude mít v řetězci nějaká písmena – řetězec se tak může výrazně rozšířit). Když pro nějaké písmeno existuje více pravidel, může použít libovolné z nich. Vzhledem ke své lásce k číslům se Honza rozhodl, že s aplikováním pravidel skončí až ve chvíli, kdy bude celý řetězec složený pouze z čísel.

Vypadá to kupříkladu následujícím způsobem: Honza si zvolí, že bude používat pouze tři písmena A, B, C a tři číslice 0, 1, 2. Počátečním symbolem bude písmeno A, Honza má tedy na počátku pouze písmeno A.

Pravidla, která si určí, budou následující (zápis $A \longrightarrow 12B$ znamená A se přepíše na $12B$):

(i) $A \longrightarrow 0A0$,
(ii) $A \longrightarrow 2B1$,
(iii) $A \longrightarrow 00A$,
(iv) $A \longrightarrow A00$,
(v) $B \longrightarrow 2C$,
(vi) $B \longrightarrow 22$,
(vii) $C \longrightarrow 2$.

Ukažme si, jak pak bude vypadat generování číselného řetězce podle těchto pravidel:

Začneme od počátečního A a vybereme si libovolné pravidlo pro A, třeba pravidlo (i), získáme tedy $0A0$. V tomto řetězci máme A, na které můžeme opět aplikovat pravidlo, použijeme tedy opět (i) a získáme $00A00$. Na A v řetězci použijeme tentokrát třeba pravidlo (ii) a máme $002B100$, pak použijeme pravidlo (vi) a máme 00222100, což už je výsledný číselný řetězec, nejsou v něm totiž žádná písmena, na která bychom mohli pravidla aplikovat. Holub Honza si ale všiml, že tento řetězec může vygenerovat, i když použije nějakou jinou posloupnost pravidel. Dokážeš nějakou takovou najít? Honzu by taky zajímalo, jaké všechny řetězce může svými pravidly vytvořit. Ví, že jich bude nekonečně mnoho a nemůže je tedy všechny vypsat, jen by rád nějak slovně vyjádřil, co bude platit pro počty a pořadí použitých číslic ve vygenerovaných řetězcích. Pomůžeš mu s tím?

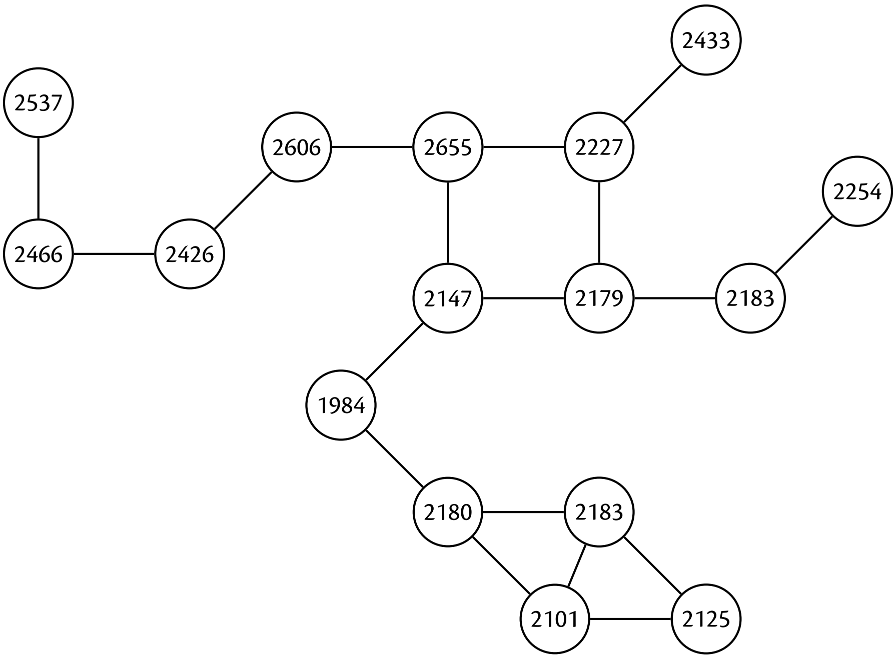
Aby toho nebylo málo, tak by holub Honza ještě rád vytvářel právě všechny řetězce ve tvaru 0000…00003331111…111, kde počet počátečních nul je o jednu větší než počet jedniček na konci (tedy nula musí být alespoň jedna, zatímco jednička by klidně nemusela být žádná) a trojky jsou přesně tři. Pomůžeš mu vymyslet nová pravidla, pomocí kterých vytvoří **všechny** takové řetězce, **ale žádné jiné**? Jaká na to budeš potřebovat písmena a číslice, a které písmeno bude tzv. počátečním symbolem?

Úloha 4B Kamzíci a města (9 bodů)

V Knížectví kamzíků definují města jinak než my – nezáleží jim na počtu obyvatel, ale na nadmořské výšce. Aby se obec mohla nazývat městem, musí konkrétně platit, že leží ve vyšší nebo stejné nadmořské výšce než všechny ostatní obce, které s ní sousedí. Kamzíci ale bohužel mají jen jeden starý a nepřesný výškoměr, takže jsou schopni nadmořskou výšku změřit jen s přesností na 50 m (např. pokud výškoměr naměří 2 220 m, může skutečná nadmořská výška ležet kdekoliv mezi 2 170 m a 2 270 m). Kvůli tomu občas nejsou schopni jednoznačně rozhodnout, která ze dvou obcí je výše položená. Kamzíci se proto rozhodli zavést také pojem aglomerace. Aglomerace je skupina obcí (nebo jen jedna obec, pokud o ní víme, že je městem), pro které platí:

(1) Mezi každými dvěma městy v aglomeraci existuje cesta vedoucí pouze přes města z této aglomerace.
(2) V každé aglomeraci se nachází alespoň jedno město, ať už je chyba jednotlivých měření jakákoliv.
(3) Zároveň by měly být aglomerace co nejmenší, takže pro každou obec v aglomeraci existují takové možné nadmořské výšky všech obcí v aglomeraci, že tato konkrétní obec je jediným městem aglomerace.

Pomůžeš kamzíkům najít všechny aglomerace v jejich knížectví? Čísla na obrázku 3 udávají naměřené hodnoty nadmořské výšky v metrech. Chyby, kterých se výškoměr dopouští, mohou být pro různá měření zcela odlišné, pouze vždy platí, že měření se od skutečné nadmořské výšky neodchyluje o více než 50 m.



Obrázek 3: Mapa obcí v Knížectví kamzíků.

Úloha 5B Návštěvy (5 bodů)

Kamarádi antilopa Anička, bizon Břetislav, cvrček Ctirad a dželada Daniela mají každý vlastní domeček, které jsou umístěny ve vrcholech velkého čtverce o straně 100 m, přičemž Anička bydlí mezi Břetislavem a Danielou, úhlopříčně od Ctirada. Naše zvířátka jsou ale teprve malá mláďata a jejich rodiče se o ně bojí, a nechtějí je pouštět dále než 70 m od domu. Dokážou se všechna zvířátka za těchto okolností potkat na jednom místě? Pokud ano, kde a pokud ne, vysvětli proč a poraď zvířátkům, jakou povolenou vzdálenost od domova by měli zkusit usmlouvat s rodiči, aby se to povedlo.