JÁMA LVOVÁ

Zadání 2. kola
XII. ročník

Ahoj!

Vítej v Jámě lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již dvanáctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na `https://jamalvova.cz` a dále na Facebooku.

Pořádně popiš všechny svoje myšlenky! Bez postupu body nedostaneš.

Řeš úlohy samostatně, je to soutěž. Klidně ale hledej informace na internetu.

I za částečné řešení či dobrý nápad získáš body.

Přihlásit se můžeš kdykoliv! Stačí poslat jedinou úlohu.

Formát úloh

Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. Je-li listů více, očísluj je, ať vše najdeme. Ke každé úloze napiš své jméno, příjmení, školu, třídu a e-mail. Pokud odevzdáváš přes webové stránky, dej každou úlohu do samostatného PDF dokumentu.

Svá řešení nám pošli do **25. ledna 2021** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Čenda, Honza, Káťa, Kobi, Lenka, Láďa, Matěj, Maťa, Terezka, Verča, Vilda, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Obrázek (5 bodů)

Myšák Míla dostal k Vánocům naprosto boží dárek a rád by se s ním pochlubil velrybě Valerii. Když se ale pokusil vyvolat dostatečně velkou fotografii, byl s její kvalitou velmi nespokojen. Raději tedy místo ní poslal návod, který má ukázat, jak jeho dárek vypadá ve čtvercové síti. Síť přitom musí mít stejný počet řádků a sloupců (dále tento počet značíme jako n). Toto n musí být sudé a větší než 9, ale za dodržení těchto dvou podmínek už může být vybráno libovolně. Číslování řádků i sloupců pak začíná v takovéto síti v levém horním rohu (tj. políčko v řádku 1 a sloupci 1 představuje levý horní roh). Vybarvit se přitom mají ta políčka, která splňují aspoň jednu z následujících podmínek:

- číslo sloupce $=$ číslo řádku $+ \frac{n}{2}$,
- číslo sloupce $= \frac{n}{2}$ (ve všech řádcích),
- číslo řádku $= \frac{n}{2}$ tam, kde je číslo sloupce aspoň $\frac{n}{2}$,
- číslo řádku je větší než $\frac{6}{10} \cdot n$, zatímco číslo sloupce je větší než (číslo řádku $- \frac{6}{10} \cdot n$) a zároveň menší než $(n + \frac{6}{10} \cdot n -$ číslo řádku$)$.

Valerie je však z tohoto popisu lehce zaskočená, a příliš si s ním neví rady. Nakreslíš zmatené velrybě, co je na obrázku?

Úloha 2A Nový nábytek (6 bodů)

Králíček Kuba se stěhuje do nové nory a kupuje si do ní zbrusu nový nábytek. Jeho bydlení má obdélníkovou podstavu s rozměry 80×60 centimetrů, a jelikož je pod zemí, leze se do něj jednoduše stropem. To se Kubovi náramně hodí, protože si usmyslel, že by chtěl mít všude podél stěn nory umístěné skříně a poličky, kterými chce obestavět úplně celý obvod místnosti (na dveře by mu tam ani nevyzbylo místo). Dokonce mu nevadí, že některé skříňky budou zastrčené v rohu tak, že se do nich nebude moci dostat (má naopak vymyšlené, že přesně taková místa se mu budou hodit na úschovu jeho tajných pokladů). Tyhle skříňky lemující obvod místnosti chce mít přitom co nejhlubší, a aby neustále nenarážel na nějaké hrany, přeje si, aby ona hloubka byla stejná ve všech částech nory. Chce tedy, aby mu nábytek obestavěl stěny tak, že volný prostor uprostřed bude mít opět tvar obdélníku.

Má to ale háček. Kuba nemá rád, když je všechno pořád stejné, takže si každý měsíc natírá stěny jinou barvičkou. Potřebuje tedy, aby se veškerý nábytek dal umístit doprostřed nory tak, aby mu kolem stěn zbyla cestička o šířce 10 centimetrů, díky které bude schopen pohodlně vymalovat a nezašpiní si přitom pracně vybrané skříňky.

Nábytek si objedná speciálně na míru a navrhne ho tak, aby se jeho jednotlivé kusy daly bez problémů přeskládat do obdélníku uprostřed místnosti, takže tím si nemusí lámat hlavu. Potřebuje ale vymyslet, jakou největší hloubku mohou jeho nové skříně mít. Dokážeš mu poradit, jaké nejhlubší skříňky si může do své nory koupit?

Úloha 3A Vánoční leknín (7 bodů)

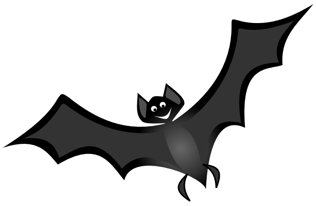
Žabky na rybníce by letos rády oslavily Vánoce ve velkém stylu a rozhodly se, že si místo vánočního stromku vyzdobí vánoční leknín. Jejich nejhezčí leknín má šest pravidelně uspořádaných, na vodě ležících listů o délce 5 žabích skoků. Na tyto listy chtějí umístit své pracně sehnané ozdobičky tak, že budou ležet vždy ve vzdálenosti 1, 2, 3 nebo 4 žabích skoků od středu leknínu. Žabky sehnaly 5 ozdobiček o hmotnosti 5 pulců, 5 ozdobiček o hmotnosti 10 pulců a 1 ozdobičku o hmotnosti 15 pulců. Aby se jim leknín nepřevažoval, musí být protější listy stejně zatíženy. Míru zatížení listu lze vypočítat jako součin hmotnosti ozdobičky a její vzdálenosti od středu. Pro více ozdobiček na jednom listu se míra zatížení sčítá. (Tedy například pro jednu 5pulcovou ozdobu ve vzdálenosti 3 žabí skoky od středu listu a jednu 10pulcovou ozdobu ve vzdálenosti 4 žabí skoky na jednom listu se míra zatížení spočítá jako

$$5 \text{ pulců} \cdot 3 \text{ skoky} + 10 \text{ pulců} \cdot 4 \text{ skoky} = 55 \text{ pulcoskoků}$$

a pro rovnováhu je nutné, aby stejné množství pulcoskoků vyšlo i na protější list.)

Rovnováha ale nestačí, i krása se počítá. Marnivé žabky si usmyslely, že na každém listu chtějí vidět jinak uspořádané ozdobičky (tj. žádné dva listy nesmí vypadat stejně). Také si přejí, aby pro jakékoli tři sousedící listy byl součet hmotností ozdobiček stejný, jako je součet na zbylých třech listech. Možnost, že by ve stejné vzdálenosti od středu na jednom daném listu ležela víc jak jedna ozdobička, zavrhly. Nakonec se rozhodly, že nejvzácnější 15pulcová ozdoba bude na jednom z listů viset zcela sama. Dokážeš žabičkám poradit, jak mají ozdobičky rozmístit, aby to splnilo všechny jejich žabí požadavky?

Úloha 4A Pandemona (9 bodů)



Netopýr Pandemona se ztratila! Je kdesi v temném podzemí a jediné, na co se tak může spoléhat, je její echolokace. Ta funguje následujícím způsobem:

Netopýr si nejprve rozdělí prostředí kolem sebe na čtvercovou síť s velikostí pole metr $\times$ metr (na jednom takovém přitom stojí). Čtverce mají dva druhy – buď na něm převažují skály, nebo volný prostor, a podle převažující složky se také dále považují za čistou skálu či za čistý volný prostor. Při užití echolokace pak dostane netopýr dvě čísla pro každé natočení ve směru sousedních čtverců (těch sousedících rohem, i těch sousedících stranou). První číslo se vypočítá jako počet volných čtverců zbývajících do nejbližší stěny v daném směru (pole, kde netopýr stojí, se nezapočítává) krát číslo přiřazené světové straně: pro sever a jih je toto číslo 1, pro východ a západ 2, a pro zbylé smíšené směry 3. Dalšími čísly, která umí netopýr pomocí echolokace určit, jsou pak počet volných čtverců a počet čtverců se skalami v daném směru. Výsledky echolokace zapíšeme ve tvaru:

$$\text{počet čtverců do nejbližší stěny} \cdot \text{číslo směru}\ (\text{počet volných čtverců} : \text{počet skalnatých čtverců}).$$

Pandemona je hodně vyděšená, takže si nedokáže uvědomit, která světová strana je která (ale echolokace jí stále funguje, takže v prvním čísle jsou započteny správné hodnoty příslušných světových stran). Během točení se po směru hodinových ručiček (ale neví, ze kterého směru začíná) získává postupně čísla

$$3\ (3:3),\quad 0\ (0:6),\quad 0\ (3:3),\quad 10\ (5:1),\quad 0\ (2:3),\quad 0\ (2:3),\quad 0\ (2:3),\quad 6\ (4:2).$$

Když se pak vydá rovně chodbou, ve které se nachází, na jednu stranu, narazí po třech políčkách (políčko, na kterém původně stála, se nepočítá) na zatáčku do slepé chodby o délce taktéž 3 políčka. Jde-li druhým směrem, tak se chodba po nějaké době rozděluje do dvou různých směrů, přičemž v obou těchto směrech jsou minimálně tři políčka cesty bez odbočky či rozcestí. Všimla si také, že při procházení chodbou sem a tam minula už jen jedno další rozcestí.

Druhý netopýr, který vyslyšel její volání o pomoc, od ní získal informace, které má o své poloze a tak se vydal na záchrannou misi. Z předchozích výzkumů jeskyně zná její rozměry (12 $\times$ 13 metrů) a ví, že všechny chodby jsou vzájemně propojeny, takže se dá dostat na jakékoliv volné místo v jeskyni. (To že jsou chodby propojeny, znamená, že se musí volné čtverce, které je tvoří, dotýkat stěnami. Pokud se někde dotýkají políčka chodeb pouze rohy, nepovažují se za propojená.) Pro cesty také platí, že jsou široké maximálně 1 metr (vyjma rozcestí) a že v celém podzemí jsou celkem 3 rozcestí. Známý je i celkový poměr chodeb a skal $(66/90)$, a stejně tak bylo už dříve zdokumentováno, že nikde v podzemí není možné chodit stále dokola (tj. nikde není žádný „okruh“ z volného prostoru ohraničující izolovanou skálu). Ví se také, že jeskyně je ohraničena skalami, vedle nichž je kromě dvou políček skal vždy volná cesta, a stejně tak je známo i to, že z jeskyně se dá dostat jen jedinou cestou. Když záchranář vstupuje na toto políčko vstupu, dostává echolokací od severu tyto údaje:

$$0\ (0:9),\quad 3\ (5:4),\quad 2\ (2:10),\quad 0\ (0:2),\quad 0\ (0:2).$$

Pečlivějším užitím svých schopností zjišťuje také to, že severo-východním směrem se čtverce chodby pravidelně střídají se čtverci skal a až úplně u ohraničující stěny jsou dva čtverce chodby za sebou. Dále po vstupu do jeskyně vidí, že z chodby, do níž vstoupí po zahnutí na sever, odbočuje vzápětí 8 metrů dlouhá rovná slepá ulice, ale mimo tu jinak může lehce bez dalších rozcestí dojít až k ohraničujícím skalám na severu. Dokážeš s těmito informacemi nakreslit plán podzemí a určit, kde se nachází ztracená Pandemona?

Úloha 5A Kde bude zastávka? (5 bodů)

V Království zvířat rozmisťují autobusové zastávky. Na silnici mezi městy Arentorp a Vara mají být dvě zastávky. Všechna zvířátka to samozřejmě chtějí mít na zastávku co možná nejblíž, a tak se rozhodla najít nejlepší umístění zastávek následujícím způsobem:

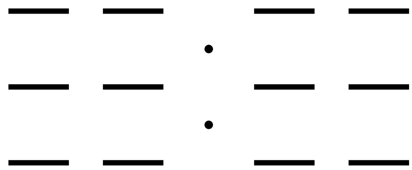
- Na začátku zastávky umístí náhodně.
- Následující den všechna zvířátka žijící podél silnice přijdou na tu zastávku, ke které to nyní mají blíž (pokud by to někdo měl stejně daleko na obě zastávky, vybere si tu, která je blíž městu Arentorp). Tím se vytvoří dvě skupiny zvířátek - zvířátka, která se sešla na zastávce *A*, a zvířátka, která se sešla na zastávce *B*. Skupina *A* potom spočítá průměr pozic svých domečků a umístí na tuto pozici zastávku *A*, to stejné udělá skupina *B*. (Pozice podél silnice se označuje vzdáleností od města Arentorp v kilometrech.)
- Toto se opakuje každý den, dokud se umístění zastávek nepřestane měnit.

U silnice žije celkem šest zvířátek na pozicích 1, 2, 4, 8, 9, 14 kilometrů od města Arentorp. První den byly zastávky umístěny na pozice 1 a 6. Jaké bude konečné umístění zastávek? Krtek Jarmila tvrdí, že výše popsaný způsob, jak najít co nejlepší umístění zastávek, stojí za nic, protože výsledek závisí na tom, kam jsou zastávky umístěny na začátku. Má Jarmila pravdu?

Kategorie starší

Úloha 1B Digitální hodiny (5 bodů)

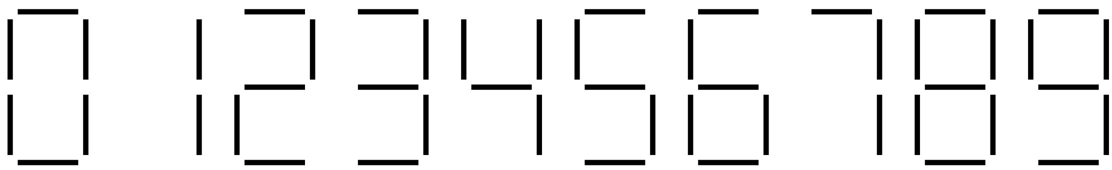
Myšku Mirku při dlouhém čekání zaujala dvojice digitálních hodin. Jedny ukazují všechna čísla správně, ty druhé jsou ale rozbité, a některá jejich políčka tak nesvítí. Po delším sledování vypozorovala, že v jistém okamžiku se na rozbitých hodinách čísla na pozicích minut a vteřin zobrazí jako na obrázku 1.



Obrázek 1: Rozbité hodiny.

Navíc se v takovou chvíli čísla na pozicích minut a vteřin liší o 14 a všechny čtyři číslice těchto dvou čísel jsou navzájem různé. Dokážeš odhalit, které dvojice čísel by se takto na hodinách mohly objevit?

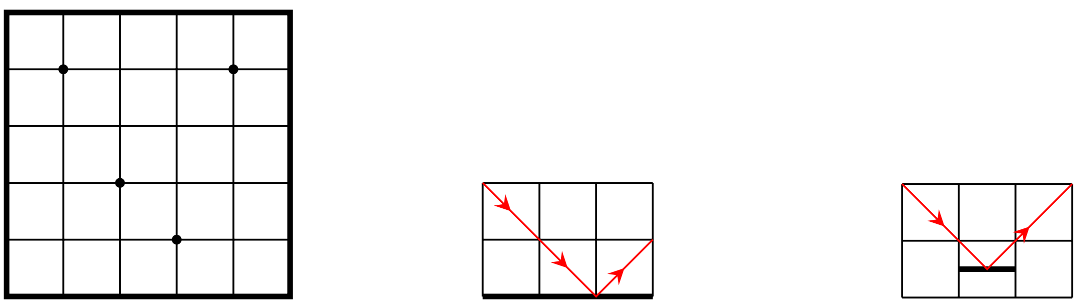
Podoba číslic 0 až 9 na funkčním displeji je vyobrazena na obrázku 2.



Obrázek 2: Podoba číslic 0 až 9 na displeji.

Úloha 2B Pavučinka (6 bodů)

Pavouček Patrik má postavenou krásnou pavučinu ve tvaru čtvercové sítě s 6×6 vlákýnky (viz obrázek). Do tak pěkné pavučiny se samozřejmě velmi brzy chytilo několik much (viz obrázek 3a, mouchy jsou znázorněny černými puntíky). Patrik ted přemýšlí, jak je co nejlépe sesbírat. Aby si poškodil pavučinu co nejméně, chce skákat vždy jen po místech, kde se protínají dvě pavučiny (tj. po vrcholech mřížky). Nechce skákat podél své pracně vytvořené pavučinky, ale pouze šikmo čtverečkem mezi dvěma vrcholy. Když se navíc rozskáče jedním směrem, tak svůj směr nemůže změnit, dokud nenarazí na větvičky na okraji pavučiny (tlustá čára v obrázku 3a). V tu chvíli se od větvičky odrazí, a změní svůj dosavadní směr pohybu o 90 stupňů (viz obrázek 3b). Pokud by skočil do rohu, kde se dvě větvičky dotýkají, tak se odrazí v opačném směru než ve kterém přiletěl.



(a) Mouchy v pavučině.

(b) Odraz od větvičky.

(c) Co kdyby bylo možné položit větvičku takto?

Obrázek 3

Pavouček si může šetrně přidat libovolné množství takových větviček i na vlákna své pavučiny (o délce minimálně 1 vzdálenost mezi vlákny), nicméně musí počítat s tím, že když na ně narazí, bude se od nich muset vždy odrazit stejně jako od větviček na okraji pavučiny.

Dokáže Patrik po vhodném doplnění větviček obskákat všechny vrcholy sítě, ve kterých jsou mouchy, a posbírat je? Pokud ne, proč? A dokázal by to, pokud by kromě libovolného množství větviček podle předchozích pravidel mohl přidat právě jednu větvičku přesně mezi dvě vlákýnka (viz obrázek 3c), a změnit tak svůj směr pohybu trošku jinak? Pokud je s takovoutu větvičkou možné mouchy posbírat, najdi alespoň jeden způsob, jak to provést.

Úloha 3B Cyklovýlet (7 bodů)

Makak Markéta, vlk Vojta a tarbík Tomík se vydali na výlet na kolech. Po rovině jedou všichni tři stálou rychlostí $7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, do kopce je ale jejich rychlost různá:

- Markéta jede stálou rychlostí $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- Vojta rovnoměrně zpomaluje ze $7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ každou sekundu o $0{,}025\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Pokud jeho rychlost klesne na $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, sesedne z kola a dál jde až na vrchol kopce pěšky rychlostí $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- Tomík, který má nejvíc natrénováno, jede do kopce stálou rychlostí $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- Pro všechny také platí, že pokud narazí na kopec, změní se jejich rychlost na výše popsanou okamžitě. To samé platí i na konci kopce – jakmile vyjedou nahoru, dokáží všichni zase okamžitě nabrat rychlost $7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

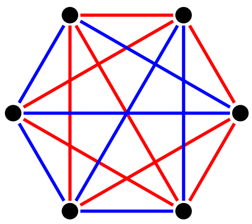
Před zvířátky je teď kopec dlouhý 1000 m. V jakém pořadí a v jakých časových rozestupech mají zvířátka začít na kopec vyjíždět, pokud chtějí, aby na rovince za ním měla mezi sebou pravidelné rozestupy 14 m, a chtějí jet v pořadí Markéta – Tomík – Vojta? A dokážeš jim jakožto velkým nadšencům pro sportovní statistiky nakreslit i graf závislosti jejich rychlosti na čase (čas je počítán od vjezdu prvního zvířátka na kopec) a graf uražené dráhy na čase, v nichž by byly vždy společně všechny tři křivky, popisující jejich pohyb při zdolávání kopce a následujících 10 vteřin na rovince?

Vysvětlivka: Kreslením grafu se zde myslí to, že se pro každý čas podíváme na hodnotu uražené vzdálenosti všech zvířátek v daný moment (případně hodnotu rychlosti), a vykreslíme bod odpovídající souřadnicím tohoto času a této hodnoty v daném grafu. Pro naše účely pak stačí, když pro Tomíka během jeho zpomalování vyneseš do tohoto grafu vzdálenost pro každých 40 s od jeho startu a ty pak spojíš úsečkami.

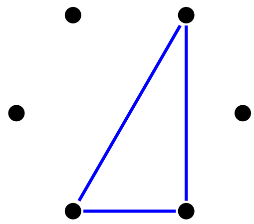
Úloha 4B Kouzelnická (9 bodů)

Království zvířat má novou senzaci. Fenek František, kuriózní kouzelník, impresivní iluzionista, mistr magie, vyráží na turné. Své publikum uvádí v neustálý úžas, ať už zrovna tahá králíky z klobouky, čte myšlenky či nechává zmizet a znovu se objevit kteroukoliv rekvizitu, kterou má zrovna po ruce. Největší věhlas a údiv si však vysloužil následujícím trikem:

František umístí na pódium šest tyček a požádá o dobrovolníka z publika. Tomuto divákovi pak předá klubko červeného a klubko modrého provázku a požádá jej, aby mezi tyčkami natáhl provázky libovolným takovým způsobem, že mezi každými dvěma tyčkami povede buďto červený, nebo modrý provázek. Tento provázek musí být natažený přímo, aniž by procházel přes další tyčky, a musí mít po celé své délce stejnou barvu (viz příklad v obrázku 4a). František následně uvede celý sál v úžas tím, že nalezne tři tyčky, mezi nimiž natažené provázky tvoří jednobarevný trojúhelník (viz obrázek 4b). Představení po představení se diváci-dobrovolníci snaží usilovněji a usilovněji zvolit barvy provázků tak, aby Františkovi kouzlo zhatili, leč žádný v tom dosud neuspěl.



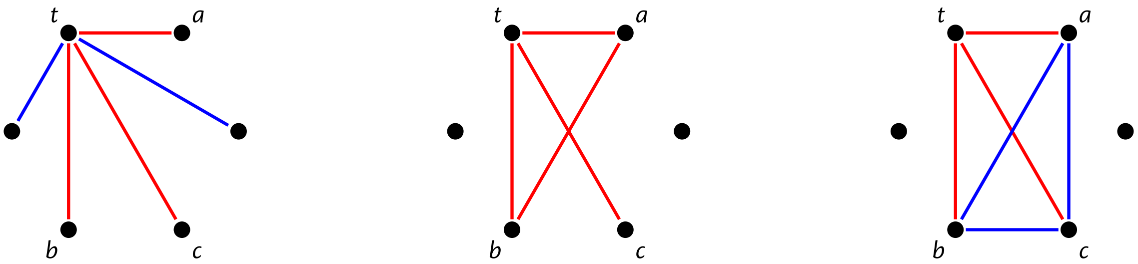
(a) Modré a červené provázky mezi tyčkami.



(b) Jednobarevný trojúhelník.

Obrázek 4

V čem kouzlo spočívá? Kouzelník by nikdy neměl prozrazovat svoje triky, ale v tomhle případě učiní František výjimku. Poté, co dobrovolník naváže všechny provázky, podívá se František nejprve na kteroukoliv tyčku t. Z ní vede pět provázků – do každé ze zbývajících tyček jeden. Mezi těmito pěti provázky je jedna z barev zastoupena vícekrát, a k té pak patří alespoň 3 provázky. Pro ukázku si třeba představme, že z t vede víc červených než modrých provázků, takže aspoň tři provázky jsou červené. Z t tedy vedou červené provázky do nějakých tří tyček a, b, c (viz obrázek 5a). Nyní už Františkovi zbývá podívat se na provázky mezi tyčkami a, b, c. Pokud je některý z nich červený, třeba ten mezi a a b, pak je vyhráno a provázky mezi t, a a b tvoří červený trojúhelník (viz obrázek 5b). Pokud ale žádný z tří provázků mezi a, b a c není červený, pak musí být všechny modré, takže tvoří modrý trojúhelník (viz obrázek 5c). Tímto postupem se tak Františkovi vždy podaří najít jednobarevný trojúhelník.



(a) Tyčka t a provázky z ní vedoucí.

(b) Když mezi některými z a, b, c vede červený provázek.

(c) Když mezi a, b, c vedou jen samé modré provázky.

Obrázek 5

S tímto jednoduchým trikem sklízí František ovace po celém království, ale poslední dobou má pocit, že už se ohrál a chtělo by to opět něco nového. Rád by tedy přišel s vylepšením: na pódium tentokráte rozmístí třináct tyček, opět požádá dobrovolníka z publiky o natažení červených a modrých provázků mezi každé dvě tyčky, a poté vždy nalezne buďto tři tyčky navzájem propojené samými modrými provázky (viz obrázek 6a), anebo čtyři tyčky propojené navzájem samými červenými provázky (viz obrázek 6b). Vymysli postup, jak to provést nehledě na to, jak dobrovolník rozmístí provázky.

(a) Tři tyčky propojené navzájem modře.

(b) Čtyři tyčky propojené navzájem červeně.

Obrázek 6

Úloha 5B Hra v kostky (5 bodů)

Sova Sára objevila na půdě velmi zvláštní kostky. Skoro se jí ani nechtělo věřit, že jsou skutečné, protože měly jen tři strany. Červená kostka měla na jedné straně číslo 1, na druhé číslo 6 a na poslední číslo 8. Zelená kostka měla popořadě čísla 2, 4 a 9. Modrá kostka zase čísla 3, 5 a 7.

Mezi zvířátky je oblíbená hra, při níž zvířátka prostě hází každé jednou kostkou a vyhrává to, které hodí větší číslo. Protože tyhle kostky ale nejsou stejné, řekla si sova, že aby hra byla fér, nechá při házení s touto sadou nejdříve druhé zvířátko, aby si vybralo kostku, kterou chce házet. Potom si ona sama vybere kostku náhodně.

Kolika způsoby může takto vyhrát druhé zvířátko a kolika Sára (tedy jaká čísla mohou ve vzájemných soubojích hodit a kdo pak bude vítězem)? Podívej se na možné výsledky, vymysli lepší strategii, při níž bude mít sova větší šance a zkus přesvědčit sovu, aby tuto strategii používala.