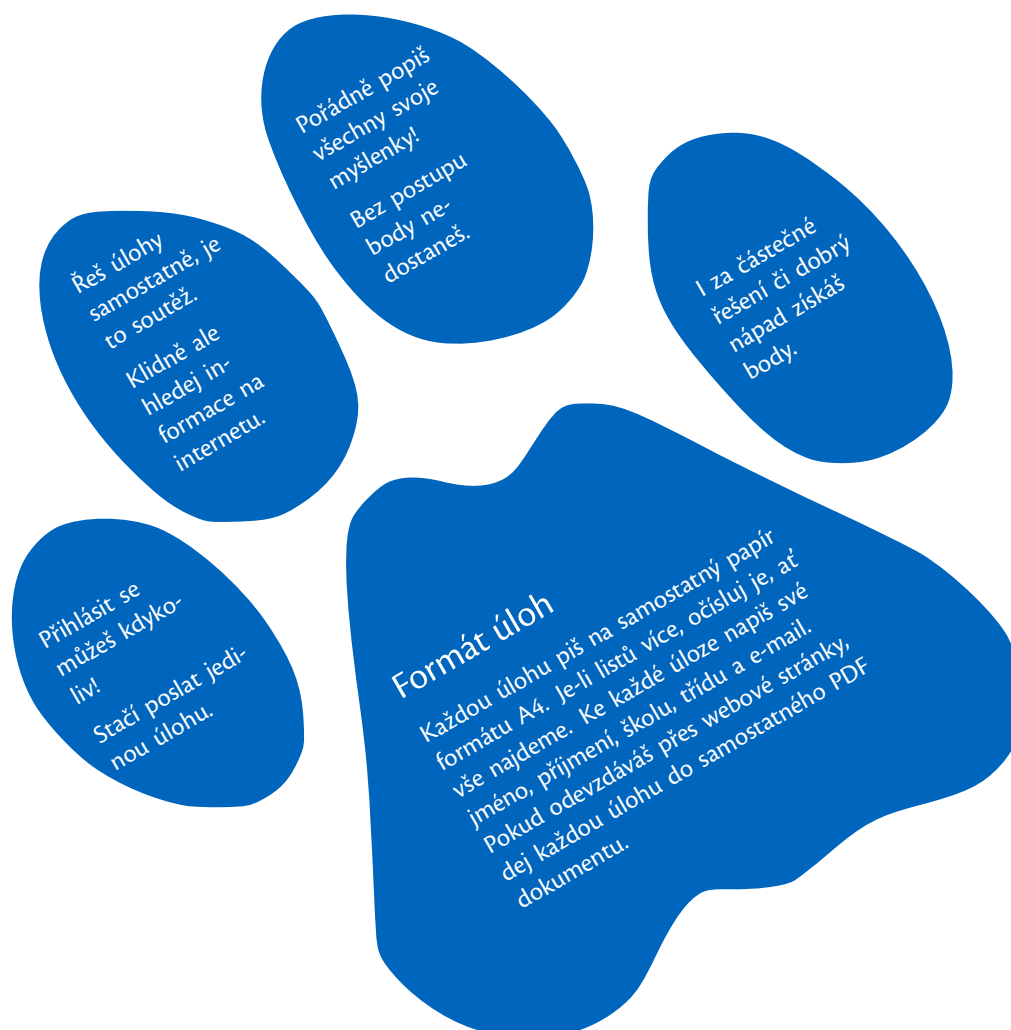


Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již dvanáctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záluďných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama1vova.cz> a dále na Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **16. listopadu 2020** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Čenda, Honza, Káťa, Kobi, Lenka, Láďa, Matěj, Maťa, Terezka, Verča, Vilda, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 0A Byrokratická

(2 body)


Úředního šimla Honzíka i jeho kolegy velmi unavuje neustálé třídění a přebírání úloh. Poslední dobou musí dokonce dělat přesčasy a zůstat v kanceláři přes noc. Rozhodli se tedy, že budou vyžadovat, aby měly všechny úlohy opravdu správný formát. Pomoz Honzíkovi tak, že Tvé úlohy budou splňovat požadavky uvedené v úvodním textu. (Tedy každá bude na samostatném listu papíru A4, nadepsaná jménem, příjmením, emailem, třídou a názvem školy a číslem úlohy.)

Chceš-li si ulehčit práci s nadepisováním hlavičky a odesíláním obálek, můžeš svá řešení po přihlášení nahrát na stránky Jámy Lvové jama.lvova.cz. Ale pozor! Pouze ve formátu PDF! Pokud bys měl jakékoli problémy, napiš nám na fórum (forum.jama.lvova.cz) nebo na e-mail (jama.lvova@jama.lvova.cz).

Úloha 1A Překlápěcí

(5 bodů)

Tygr Tim dostal k novému školnímu roku rýsovací sadu a teď pomocí ní hýbe obrazci ve svém sešitě. Umí otáčet obrázek kolem bodu o 180° (obr. 1b) a umí ho převracet podle osy (obr. 1a). Nakreslil si do sešitu několik os – dvě na sebe kolmé, Q svisle a P vodorovně a R , která je šikmo od P – a bod A , který je v průsečíku os P a Q . Do levé čtvrtky vzniklého obrázku si obkreslil hranaté písmeno G (viz obrázek 2).

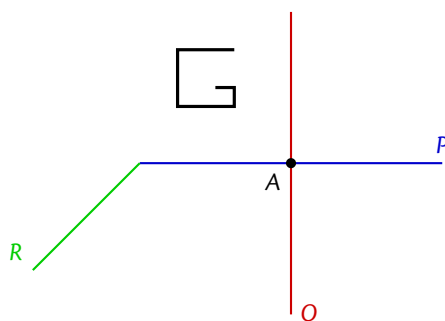
Pak začal hýbat s písmenem G sem a tam po sešitě, konkrétně ho nejprve otočil kolem bodu A , pak ho převrátil podle os Q , P , Q , R , Q , poté znovu otočil kolem bodu A , pak ho převrátil podle os P a R a na závěr ho ještě jednou otočil kolem bodu A .

Když skončil, tak si všiml, že to ani nevypadá, že udělal tolik kroků a napadlo ho, jestli by to nešlo nějak zkrátit. Pomůžeš mu vymyslet co nejkratší sled kroků, po jejichž provedení by byl obrazec na stejném místě jako po popsáném postupu?

Při otáčení kolem bodu A vznikne nový obrazek tak, že každý jeho bod bude na přímce procházející bodem A a bodem, který otáčíme. Nový bod a bod který otáčíme, budou ve stejné vzdálenosti od bodu A , ale každý na opačné straně od bodu A .



Obrázek 1



Obrázek 2: Rozmístění objektů v Timově sešitě

Úloha 2A Zapomenuté číslo

(6 bodů)

Antilopa Anička zapoměla telefonní číslo buvola Bedřicha a teď mu potřebuje zavolat, aby mu sdělila, že narozeninová oslava papouška Jindry se přesouvá už na pondělí! Anička je ale ukecaná, a tak číslo několikrát říkala dalším zvířátkům, která si zapamatovala tyto informace:

- Cibetka Cecílie si pamatuje, že číslo má 9 číslic.
- Datel Daniel si pamatuje, že celé číslo i poslední trojčíslí je dělitelné 3 a první trojčíslí je dělitelné 8.
- Elektra Emmy si pamatuje, že v celém čísle je čtyřikrát použita číslice 2.
- Fenek Filip si pamatuje, že součet číslic v prostředním trojčíslí je 10.
- Gaviál Gustav si pamatuje, že všechna čísla na sudých pozicích jsou lichá a prostřední číslice je 8.

Stačí tyto informace na sestavení hledaného telefonního čísla, nebo musí Anička vyzkoušet více možností?
A jaké je hledané číslo?



Úloha 3A Vlaky

(7 bodů)

Racek Vilbrecht rád pozoruje vlaky. Nejvíce ho baví pozorovat, jaké vagónky jsou v soupravě zapojeny a jak jsou dlouhé. Jelikož je ale takové bedlivé pozorování únavná práce, rozhodl se vyzkoušet novou metodu. Vzal si stopky a stoupl si kolmo na koleje vlaku, který se pohybuje stálou rychlostí $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Když se přímo před ním objevil začátek prvního vagónku, spustil stopky. Ty vypnul, až když se před ním objevil konec posledního vagónku. Vilbrecht ví následující:

- Na stopkách naměřil 7,98 sekund.
- V soupravě jelo celkem 28 vagónků, z nichž některé jsou modré a některé červené.
- Modrých vagónků je o 12 méně, než těch červených.
- Všechny vagónky stejné barvy jsou stejně dlouhé a poměr délek červeného a modrého vagónku je 5 : 3.
- Mezera mezi dvěma vagónky je dlouhá 1 metr.

Pomoz mu vypočít, jak dlouhý je každý červený a každý modrý vagónek a jak dlouhá je celá souprava (od začátku prvního do konce posledního vagónku).

Když jsou délky dvou předmětů v poměru $X : Y$, znamená to, že když první předmět rozdělíme na X stejně dlouhých kusů a druhý předmět na Y stejně dlouhých kusů, budou tyto kusy stejně dlouhé.

Úloha 4A Knihovna

(9 bodů)

V knihovně v Království zvířat jsou knížky seřazeny speciálním způsobem, takže když si přijde zvířátko pro knížku, velmi rychle ji objeví. Přidání nové knížky trvá déle a navíc může zcela změnit dosavadní pořádek, takže když jedno zvířátko hledá knížku v momentě, kdy ji jiné přidává, bude zmateno a knížku nenajde. Nové knížky se přidávají zřídka, zatímco půjčovat si chodí zvířátka často. Knižky se vrací do biblioboxu, takže vrácení nemusíte řešit. Zvířátka se chtějí vyvarovat toho, aby zvířátko přidávalo knížku, zatímco jiné zvířátko knížku hledá, a chtějí, aby mohlo hledat knížku více zvířátek naráz. Kam mají v knihovně umístit kontrolní mechanismy? Jak má postupovat hledající zvířátko a jak má postupovat zvířátko přidávající novou knížku?



Kontrolní mechanismy, které mají zvířátka k dispozici, každý v libovolném množství:

Háček s klíčem – je-li na háčku klíč, zvířátko si jej vezme a jde vykonat činnost, kterou chtělo provést. Není-li na háčku klíč, musí zvířátko počkat ve frontě, dokud zvířátko s klíčem nepřijde klíč vrátit. Například před zkušební kabinkou by mohl být háček s klíčem, aby se v kabině nepotkalo více zvířátek naráz, při příchodu do prázdné kabinky by si zvířátko vzalo klíč, při odchodu by jej vrátilo na háček.

Krabička – ke každému klíči může patřit krabička, do které se klíč sundaný z háčku může uložit (a pak zase vyndat a uložit na háček). U krabičky se nesmí čekat, ani se do ní nedá podívat, jestli v ní klíč je, nebo není. Například když zvířátko chtějí připravit narozeninovou oslavu pro jedno z nich, tak vezmou z háčku klíč k jeho pokoji a zamknou ho tam (jenom na chvíli, příprava netrvá dlouho). Nechtějí ho ale pověsit zpět na háček, aby oslavence náhodou nepustilo ven nic netušící kolemjdoucí zvířátko, tak si klíč uloží do krabičky, aby ho pak mohli, až bude překvapení nachystáno, zase pustit ven.

Místo srazu – když sem zvířátko přijde, tak musí počkat, dokud se tam neshromáždí všechna ostatní zvířátka (jejich počet je znám), pak mohou všechna zvířátka odejít.

Nádoba s lentilkami – zvířátko může libovolně přidat či odebrat lentilky a podle jejich počtu v nádobě se rozhodnout mezi akcemi (u této nádoby není možné čekat – pro každý možný stav nádoby musí být řečeno, co má jít zvířátko dělat dál a tato činnost musí být v rámci dané situace smysluplná). Zvířátko má u sebe vždy potřebný počet lentilek. Například kdyby zvířátko chtěla vědět, jak je který film v kině zajímavý, tak mohou při odchodu házet lentilky do nádoby, pokud se jim film líbil a podle počtu lentilek v nádobě se pak jiné zvířátko může rozhodnout na film jít nebo nejít.

Páčka – zvířátko přepne páčku a podle jejího stavu (vypnuto/zapnuto) se rozhodne mezi dvěma akcemi (u páčky není možné čekat – pro oba stavy musí být řečeno, kam má jít zvířátko dál, nebo co má udělat a tato činnost musí být v rámci dané situace smysluplná – například nejde, aby zvířátko při sbírání dělalo dřepy).

(Čekat se tedy dá jen u prázdného háčku na klíč nebo na místě srazu.)

V případě, že by zvířátka chtěla nasbírat na jednom místě miskou borůvek a pak společně odejít, tak by chtěla mít u misky borůvek nádobu na lentilky a místo srazu. Každé zvířátko by se pak mělo řídit následujícím postupem: Pokud je v nádobě lentilek stejně nebo méně, než je kapacita

misky minus počet sbírajících zvířátek, jdi sebrat borůvku, dones ji do misky, přidej do nádoby lentilku a opakuj postup. Jinak čekej na místě srazu, dokud nedorazí všechna ostatní zvířátka. Pak společně odejděte.

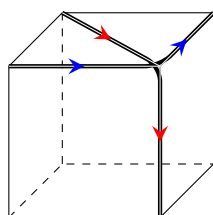
Úloha 5A Ztracený mravenec

(5 bodů)

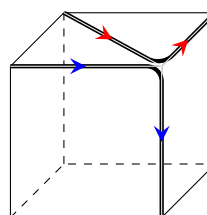


Mravenec Mišo našel v trávě hrací kostku, která leží na jedné své stěně na zemi. Rozhodl se, že si na ní vyznačí vyhlídkovou trasu kouskem křídý tak, že čára půjde vždy po hranách kostky. Začne malovat od rohu, kterým se kostka dotýká země, a skončí hned jakmile se znova dotkne čarou země. Zároveň nechce, aby se čáry kdekoli křížily (trasa ale může vést přes stejný vrchol vícekrát, pokud se v něm čáry nepřekříží) a aby trasa nešla dvakrát po stejné hraně.

Jakou nejdelší trasu dokáže mravenec nakreslit na kostce? A o kolik bude cesta delší, když se rozhodne kreslit i po stěnách kostky mezi protějšími rohy?



(a) Zakázáno



(b) Povoleno

Obrázek 3

Kategorie starší

Úloha 0B

Byrokratická

(2 body)

Úředního šimla Honzika i jeho kolegy velmi unavuje neustálé třídění a přebírání úloh. Poslední dobou musí dokonce dělat přesčasy a zůstat v kanceláři přes noc. Rozhodli se tedy, že budou vyžadovat, aby měly všechny úlohy opravdu správný formát. Pomoz Honzíkovi tak, že Tvé úlohy budou splňovat požadavky uvedené v úvodním textu. (Tedy každá bude na samostatném listu papíru A4, nadepsaná jménem, příjmením, emailem, třídou a názvem školy a číslem úlohy.)

Chceš-li si ulehčit práci s nadepisováním hlavičky a odesíláním obálek, můžeš svá řešení po přihlášení nahrát na stránky Jámy lvové jama.lvova.cz. Ale pozor! Pouze ve formátu PDF! Pokud bys měl jakékoli problémy, napiš nám na fórum (forum.jama.lvova.cz) nebo na e-mail (jama.lvova@jama.lvova.cz).

Úloha 1B

Výlet

(5 bodů)

Patnáct prasátek se vydalo na veliký výlet. Jak známo, obvykle jdou v jedné skupině pouze tři čuníci, a tak se tedy první část cesty rozhodli absolvovat v pěti tříčlenných týmech. V průběhu cesty je však napadlo, že by se mohli pro jednou vyvarovat stereotypů. A protože 15 čuníků se na stejně veliké skupiny mnoho jinými způsoby rozdělit nedá, chtějí utvořit tři pětičlenné týmy.

Háček je v tom, že se momentálně vyskytují na území vlků, kteří velmi rádi požívají malá prasátka. Čuníci z nich mají samozřejmě strach (zejména se bojí, že by museli vlkům čelit o samotě), a proto odmítají chodit po skupinách menších než tříčlenných. Stejně tak jim nepřipadá rozumné, aby jich ve skupině bylo v jakýkoliv moment více než deset, protože by pak byli příliš dobře viditelní i z velké dálky, a vlci by si je našli a snědli.

Potřebují tak vymyslet nějaký plán, podle kterého by se postupně jejich menší skupinky spojovaly do větších a naopak větší skupinky rozdělovaly do menších. Setkání skupinek mohou proběhnout v libovolném množství a prasátka se přitom mohou vždy rozdělit na libovolně veliké nové skupinky (samozřejmě s nejméně 3 a nejvíce 10 prasátky v týmu, a to i v samotný okamžik dělení skupin), ale samozřejmě čím dříve budou prasátka přeskupená, tím budou raději.

Pomůžeš jim vymyslet, jak mohou takové přeskupení provést? Nakresli jim k tomu přehledný časový plán, které skupinky se kdy budou jak spojovat a rozpojovat.



Úloha 2B

Lékárnická

(6 bodů)

Lemur Lumír si zařídil lékárnu. Vzhledem k tomu, že recepty jsou dlouhé a Lumír šikovný, umí už smíchat obsahy dvou lahviček za 1 vteřinu. Na hledání lahviček si najal tučňáka Tomáše, ale ten je z toho zoufalý. Na každé čtvrté míchání je potřeba donést správnou lahvičku ze sklepa. Ať Tomáš dělá co dělá, vždycky mu to trvá 99 vteřin, což pak dá 100 vteřin spolu s mícháním. Jestliže za den potřebují smíchat obsahy 1000 lahviček, jak dlouho jim to zabere?

Zítřa chce Tomáš zavést vylepšení - bude nosit celé bedýnky. Když si pak Lumír řekne o lahvičku, je 60% šance, že bude v přinesené bedýnce a Tomáš ji podá už po 9 vteřinách. Když tam nebude, Tomáš ji stejně bude 9 s hledat a pak starou bedýnku ve sklepě vymění a přinese správnou - to mu bude trvat i s podáním lahvičky 100 s. Veškeré spotřebované lahvičky se ve sklepě doplní. Za jak dlouho smíchají 1000 lahviček pak?

Úloha 3B

Nákup zmrzliny

(7 bodů)

Pásovcí Karel, Marcel a Pavel se rozhodli, že si koupí zmrzlinu. Karel má 4 jámacoiny, Marcel 3 a Pavel taky 3. K dispozici mají 3 druhy zmrzlin.

- Jahodová stojí 7 jámacoinů a váží 500 g.
- Malinová stojí 9 jámacoinů a váží 750 g.
- Rybízová stojí 11 jámacoinů a váží 1 kg.

Dohodli se, že si koupí zmrzlinu za 9 jámacoinů všichni dohromady. Poradíš jim jakými všemi způsoby si mohou zmrzlinu rozdělit tak, aby se žádné dvojici pásovců nevyplatilo si koupit zvlášť zmrzlinu za 7 jámacoinů?

Úloha 4B

Zavařování

(9 bodů)

Zvířátka zavařují. Některá zvířátka sbírají rybíz do košíčku a další zvířátka zavařují. Sbírající zvířátka mají košíčky s danou kapacitou (každé zvířátko svůj), do kterého mohou sbírat ovoce, a když je košíček plný, mohou ho dát na místo, odkud si ho převezme zvířátko, které zavařuje. Ovoce si přesype do misky a košíček vrátí na smlouvené místo. Zvířátka by se chtěla vyhnout situacím, kdy zvířátko trhá rybíz, ale nemá zrovna košíček, a také situaci, kdy si zavařující zvířátko snaží převzít plný košík, avšak na smlouveném místě žádný není. Jak má postupovat sbírající zvířátko a jak zvířátko zavařující, když budou mít k dispozici následující kontrolní mechanismy (lze použít libovolné množství od každého)? Kam mají vybrané mechanismy umístit?

Háček s klíčem – je-li na háčku klíč, zvířátko si jej vezme a jde vykonat činnost, kterou chtělo provést. Není-li na háčku klíč, musí zvířátko počkat ve frontě, dokud zvířátko s klíčem nepřijde klíč vrátit. Například před zkušební kabinkou by mohl být háček s klíčem, aby se v kabině nepotkalo více zvířátek naráz, při příchodu do prázdné kabinky by si zvířátko vzalo klíč, při odchodu by jej vrátilo na háček.

Noclehárna – ke každému háčku s klíčem může být přidružena noclehárna, kam může zvířátko, co má zrovna klíč jít spát, avšak než se uloží ke spánku, tak musí vrátit klíč na háček. Zvířátko se probudí, když jiné zvířátko s klíčem přijde a zazvoní na zvonek (nemusí na zvonek zvonit vždy, když vrátí klíč, ale musí vrátit klíč vždy, když zazvoní na zvonek). Zvířátek v noclehárně může být neomezeně. Například když jedno zvířátko vyrábí z ubrousků prostírání a druhé zvířátko odešlo nakoupit zásoby ubrousků, tak první zvířátko když vypotřebuje zásoby, co má, tak si půjčí klíč, vrátí ho, půjde si lehnout (aby jen tak nečekalo) a druhé zvířátko, když se vrátí se zásobou ubrousků, tak si půjčí klíč, vzbudí druhé zvířátko a vrátí klíč na háček. Skládající zvířátko pak může pokračovat ve skládání.

Sklenice s žetony – v nádobě je na začátku určitý počet žetonů (lze určit, nelze v průběhu měnit), pokud ve chvíli, kdy sem přijde zvířátko, ve sklenici nějaký je, tak si jej zvířátko vezme a pokračuje dál, pokud zde žádný žeton není, tak musí počkat, až bude nějaký žeton vrácen. Když zvířátko vykoná činnost, na kterou potřebovalo žeton, tak jej vrátí. Dá se použít například pro vstup do kina s omezeným počtem míst – ve sklenici je na začátku tolik žetonů, kolik je míst v kině. Když přijde zvířátko, vezme si žeton a jde si sednout do sálu, když zhlédne film (nebo chce jenom odejít), tak žeton při odchodu ze sálu vrátí.



Místo srazu – když sem zvířátko přijde, tak musí počkat, dokud se tam neshromáždí všechna ostatní zvířátka (jejich počet je znám), pak mohou všechna zvířátka odejít.

Nádoba s lentilkami – zvířátko může libovolně přidat či odebrat lentilky a podle jejich počtu v nádobě se rozhodnout mezi akcemi (u této nádoby není možné čekat – pro každý možný stav nádoby musí být řečeno, co má jít zvířátko dělat dál a tato činnost musí být v rámci dané situace smysluplná). Zvířátko má u sebe vždy potřebný počet lentilek. Například kdyby zvířátko chtěla vědět, jak je který film v kině zajímavý, tak mohou při odchodu házet lentilky do nádoby, pokud se jim film líbil a podle počtu lentilek v nádobě se pak jiné zvířátko může rozhodnout na film jít nebo nejit.

V případě, že by zvířátka chtěla nasbírat na jednom místě miskou borůvek a pak společně odejít, tak by chtěla mít u misky borůvek nádobu na lentilky a místo srazu. Každé zvířátko by se pak mělo řídit následujícím postupem: Pokud je v nádobě lentilek stejně nebo méně, než je kapacita misky minus počet sbírajících zvířátek, jdi sebrat borůvku, dones ji do misky, přidej do nádoby lentilku a opakuj postup. Jinak čekej na místě srazu, dokud nedorazí všechna ostatní zvířátka. Pak společně odejděte.

Úloha 5B Věšení záclon

(5 bodů)



Veverka Verča si chce koupit látku na nové záclony na svoje jeden metr dlouhé okno. Ještě se však nerozhodla, jak dlouhou záclonu by chtěla. Chce, aby se záclona vlnila na okně v dokonalých půlkruzích a aby půlkruhy začínaly a končily přesně na krajích okna.

Porad' jí, jak dlouhá má být záclona, pokud chce, aby měl každý půlkruh průměr 20 cm. Kolik látky si má koupit, aby jí vystačila na vlnky o průměru 2 cm? A kolik látky vystačí na dvě vlny přes celou šířku okna (aby se mohla rozhodnout až doma, ale měla pro oba případy dost látky)?