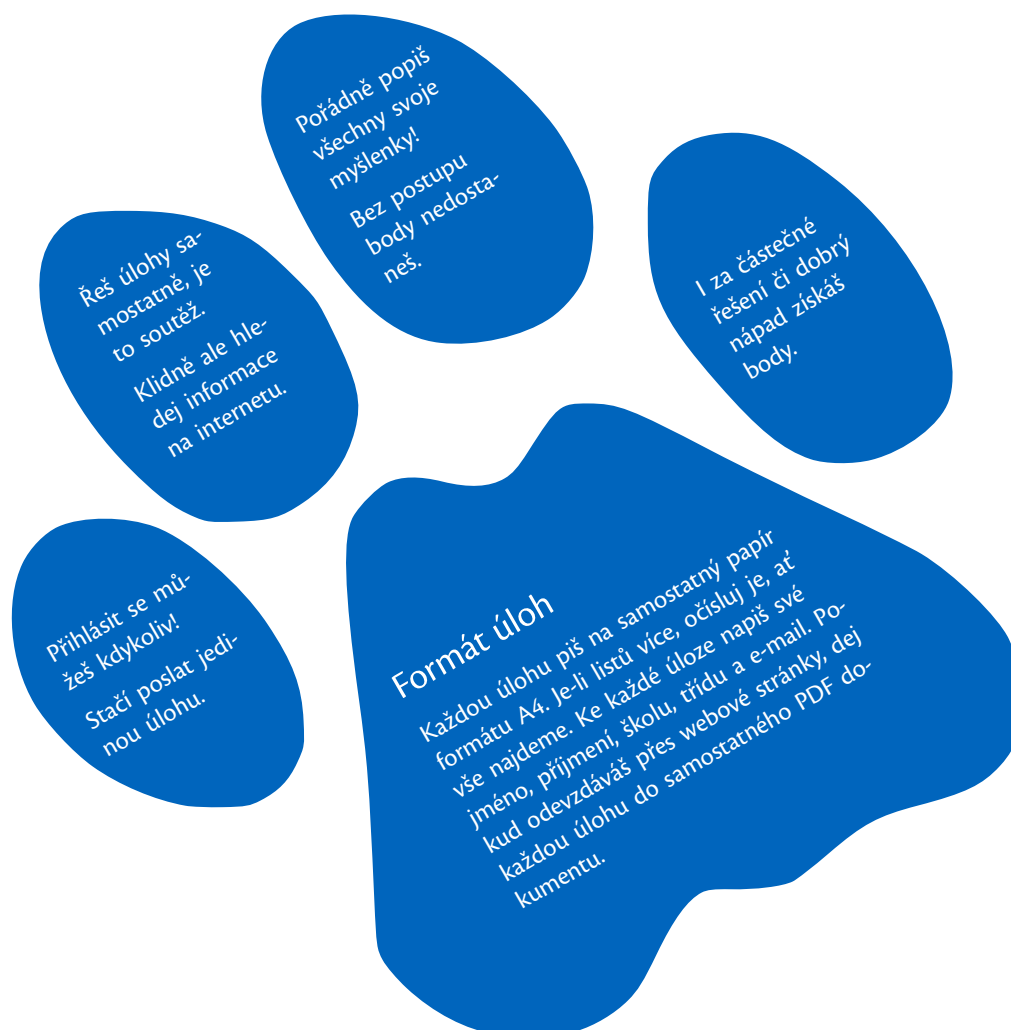


Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již jedenáctým rokem Českým vysokým učení technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záluďných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama1vova.cz> a dále na Google+ či Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **27. ledna 2020** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Čenda, Hanka, Honza, Káťa, Kobi, Lenka, Láďa, Matěj, Terežka, Vilda, Zuzka a Zuzka a další

Kategorie mladší

Úloha 1A Nákup

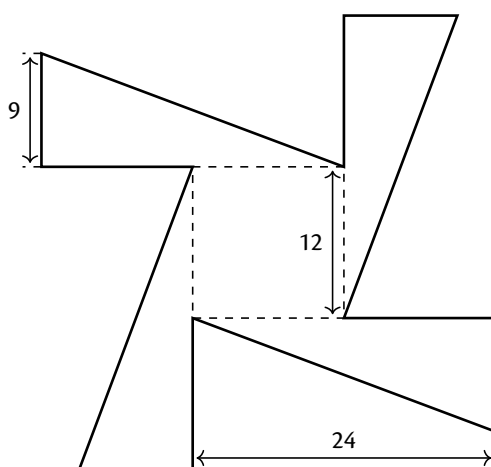
(5 bodů)

Tři prasátka – Napoleon, Kuliš a Pištík – žila na farmě a chtěla si zasít obilí. Na trh se vypravili pouze Napoleon a Kuliš, protože Pištík hlídal farmu. Napoleon koupil 75 pytlů obilí, Kuliš 45 pytlů. Když se vrátili, rozdělili si pytle s obilím rovnoměrně mezi sebe (každý tedy nakonec měl stejně). Pištík jim za své pytle obilí zaplatil 1400 JC. Kolik z této částky dostal Kuliš a kolik Napoleon, pokud byly náklady rozděleny spravedlivě?

Úloha 2A Pracné perníčky

(6 bodů)

Papoušek Pája peče perníčky. Protože nepeče poprvé, rozhodl se experimentovat. Sám si navrhl speciální formičku ve tvaru větrného mlýna, jejíž podstava je znázorněna na obrázku 1 – skládá se ze čtverce s délkou strany 12 mm, k němuž jsou přidány čtyři pravoúhlé trojúhelníky s délkami odvěsen 24 mm a 9 mm.



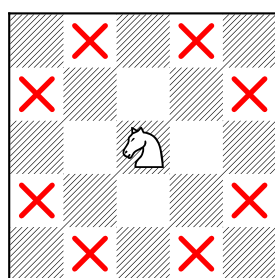
Obrázek 1: Tvar podstavy formičky. Všechny rozměry jsou milimetrech.

Pája je lenoch a tak se rozhodl si do náčrtku nepsat víc informací, než je potřeba. Dokonce si tam zapomněl napsat, že by ony perníčky chtěl mít 2 cm vysoké! Co je pro něj teď ale důležitější, je otázka, jaký bude objem jedné takovéhle dobroty. Pochopte, musí totiž koupit dostatek ingrediencí. Zprvu odhadl objem na 7 cm^3 a na základě toho nakoupil suroviny. O kolik procent menší nebo větší je skutečný objem, a o kolik procent více či méně surovin tedy bude muset Pája nakoupit?

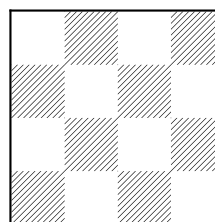
Úloha 3A Pastva

(7 bodů)

Šachový král se s oblibou projíždí po šachovnici v kočáře taženém čtyřspřežím šachových běloušů. Ti umí, jako všichni šachový koně, skákat do tvaru písmene L, buďto o jedno pole vodorovně a dvě svisle, nebo naopak o dvě vodorovně a jedno svisle (viz obrázek 2a). Král by je rád nechal pást na menší šachovnici 4×4 (viz obrázek 2b). Aby ale celou šachovnici náležitě vypásli a nezarůstala vysokou travou, musí každé políčko buďto být obsazeno některým z koní, nebo na něj musí být některý z koní schopný skočit. Jak má král koně rozmístit tak, aby jich na spásání šachovnice 4×4 stačilo co nejméně? Zdůvodni, proč méně koní nemůže stačit.



(a) Povolené tahy šachového koně

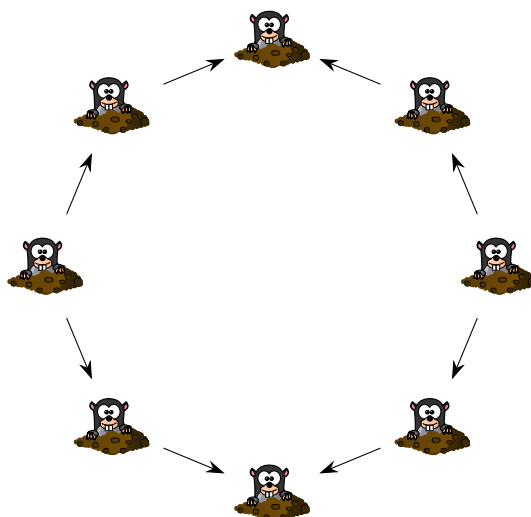


(b) Šachovnice 4×4

Obrázek 2

Úloha 4A Lopatičky
(9 bodů)

Několik krteků z Království zvířat si stejně jako každý rok uspořádalo sraz. Každý z krtek dorazil se svou oblíbenou lopatičkou, která má na jednom konci *list* a na druhém *násadu*. Jakmile se ze své krtiny na paloučku u lesa vyhrabal poslední krtek, postavili se všichni do kroužku a začali tančit *krtčí tanec*. Ten má svá pevně ustálená pravidla a názvosloví. Každý krtek se chytne svých dvou sousedů, nedrží se však za packy, ale za svoje lopatičky – mezi každými dvěma krtekami je natažena jedna lopatička, přičemž jeden ji drží za list a druhý za násadu. Každý krtek tak drží dvě lopatičky (jednu v levé a jedno v pravé pauce) a každá lopatička, kterou krtek přinesl, je využita (viz obrázek 3).



Obrázek 3: Příklad krtčího tance s osmi krtekami. Každá úsečka představuje lopatičku, šipka představuje list.

To, jak je každá lopatička otočena, tedy který ze sousedů ji drží za list a který za násadu, je zcela nahodilá – může nastat libovolná možná situace. Takto se některým krtekům stane, že drží v jedné pauce násadu a v druhé list – těmto krtekům se v krtčím tanci říká *podavači*. Jiní zase budou v obou pautách držet násady – těm se říká *kopáči*. Poslední jsou ti, kteří drží v obou pautách listy – pro ty se vžil označení *držáci*. (V příkladu na obrázku 3 tedy máme 4 podavače, 2 kopáče a 2 držáky.)

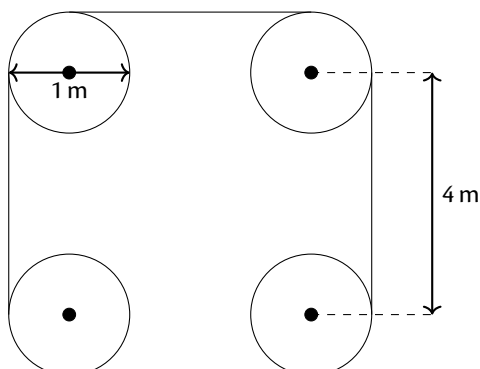
Novináře z kulturní přílohy Zvířecího zpravodaje by zajímalo, kolik se v tanci vyskytlo kopáčů, ale zapsal si jenom, že tam bylo n držáků (n mohlo být i nula). Porad' mu a urči počet kopáčů.

Nezapomeň řádně zdůvodnit, proč Tvoje odpověď musí platit pro všechny možné hodnoty n a všechny možné podoby krtčího tance, tedy pro libovolné natočení lopatiček mezi krtekami.

Úloha 5A Tiskařský stroj
(5 bodů)

Zvířátka si objednala ze zámoří nový tiskařský stroj. Takové zařízení se sestává ze čtyř válců a jednoho dlouhého plátna, které je kolem nich nataženo. Jenomže posádka lodi, která měla stroj přivést, se na moři dostala do divoké bouře a víchř jí zpětrhal plachty. Posádce tak nezbylo než plátno rozstříhat a ušít z něj plachty nové.

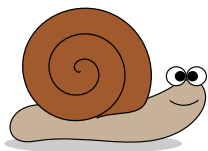
Zvířátka teď potřebují ušít plátno vlastní. Podle podrobných plánek, které byly spolu se strojem dodány, mají být středy jednotlivých válců uspořádány do tvaru čtverce s délkou strany 4 m a průměr válců činí 1 m (viz obrázek 4). Jak dlouhé plátno potřebují ušít? A jaká bude jeho výsledná plocha, jestliže jsou válce vysoké 3 m a plátno by je mělo pokrývat v celé jejich výšce?



Obrázek 4: Náčrt tiskařského stroje

Kategorie starší

Úloha 1B Medojed běhá kolečka

(5 bodů)


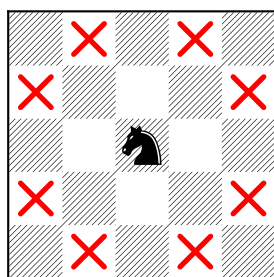
Po tom, co si o vánočních svátcích Medojed Vašík užíval cukroví, začíná opět vymýšlet, co udělá se svou přibývající vahou. Běhání se mu osvědčilo, ale na rovné běžecké dráze o délce několika kilometrů, na kterou si zvykl chodit, je teď mnohem více zvířátek, která také chtějí běháním nějaké ty kalorie vypotit. Protože ale před zimou běhal jenom Vašík, je se svými 7 m/s rychlejší než ostatní zvířátka, a tak ho ostatní běžci brzdí. Protože kvůli nim nechce zpomalovat, rád by vymyslel, jak zvířátka předběhnout tak, aby jim zároveň nevběhl přímo do cesty. Chce proto předbíhání dokončit vždycky alespoň metr před jakýmkoli jiným zvířátkem, a protože navíc rád běhá kolečka a tady na rovné dráze mu chybí, rád by vždy zvířátko předběhl po půlkružnici. Zrovna teď půl metru před ním běží (nebo se spíš plazí) šnek Štefan rychlostí $\frac{1}{\pi}$ m/s (Štefan je natolik malý, že jej lze

považovat za bod). Jaký poloměr musí mít polokružnice, po které musí Vašík předbíhat, aby po předběhnutí skončil přesně metr před Štefanem?

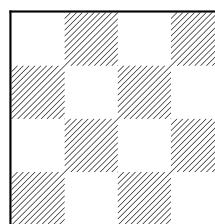
Úloha 2B Pastva

(6 bodů)

Šachový král je po celé šachovnici proslulý jako chovatel koní. Ti umí skákat do tvaru písmene L, buďto o jedno pole vodorovně a dvě svisle, nebo naopak o dvě vodorovně a jedno svisle (viz obrázek 5a). Král by je rád nechal pást na menší šachovnici 4×4 (viz obrázek 5b). Aby si ale koně navzájem nepřekáželi, musí být rozmístěni každý na svém vlastním políčku tak, aby žádný nedovedl (v jednom tahu) skočit na pole některého jiného. Jak má král koně na šachovnici rozmístit, aby se jich tam 4×4 vešlo co nejlépe?



(a) Povolené tahy šachového koně


 (b) Šachovnice 4×4

Obrázek 5

Úloha 3B Zámečnická

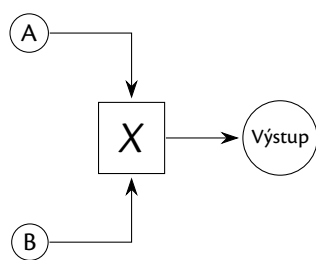
(7 bodů)

Mývalice Monča má zahrádku a na ní pěstuje jahody. Aby jí na ně nechodily srnky, pořídila si k vrátkům sadu na sestavení zámku. Zámky, které z ní lze sestavit, jsou vždy zařízení s několika vstupy. Do každého vstupu pak lze zadat buď nulu, nebo jedničku. Výstupem zámku je opět buď 0 (zámek se neotevře), nebo 1 (zámek se otevře). Protože je ale Monča zapomnětlivá, chtěla by si sestavit zámek se třemi vstupy tak, aby se otevřel při zadání libovolné z jejich tří oblíbených kombinací: 011, 101 a 111 (viz tabulku 1). Takový zámek lze popsat i takto: pojmenujeme-li jeho vstupy ABC, pak se má odemknout vždy, když je 1 na C a zároveň je na alespoň jednom z A či B také jednička.

A	B	C	Výstup
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

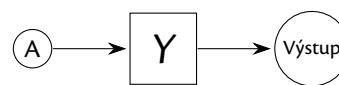
Tabulka 1: Jak by měl Mončin zámek fungovat

V sadě má k dispozici dva typy součástek a drátky na jejich spojování. Součástka X má dva vstupy a jejím výstupem je 1, právě pokud jsou oba vstupy 1 (viz tabulka 2a). Součástka Y má jen jeden vstup a jejím výstupem je vždy opak vstupu (viz tabulka 2b). Součástek obou typů má Monča k dispozici neomezené množství.



A	B	Výstup
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a) Součástka X

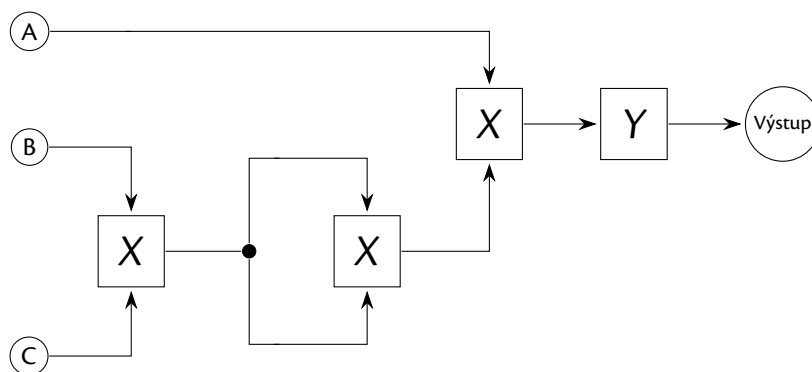


A	Výstup
0	1
1	0

(b) Součástka Y

Tabulka 2

Součástky se dají spojovat do sebe, na to slouží dráty, kterých má Monča také neomezené množství. Dráty se smí rozdvajovat, ale ne spojovat (to lze pouze v součástkách). Monča si zkusila vyrobit zámek se třemi vstupy, který přijímá vše kromě samých jedniček. Jeho zapojení je znázorněno na obrázku 6.



Obrázek 6: Zapojení zkušebního zámku

Pomoz Monče sestavit takový zámek, který se otevře pouze při zadání vstupů 011, 101 nebo 111 (podle tabulky 1).

Úloha 4B Datel na lodi

(9 bodů)

Lišák Lukáš se rozhodl, že zkusí obeplout svět se svojí hranolovitou lodí postavenou ze dřevěných prken o tloušťce 10 cm o hustotě $\rho = 120 \text{ kg/m}^3$. Jeho loď je ale velká – je 80 m dlouhá, 30 m široká a 20 m vysoká (podstavou hranolu je obdélník) – a tak si na plavbu pozval i své kamarády vlka Václava (80 kg), jezevce Jiřího (12 kg), veverku Verču (330 g), medvěda Matěje (200 kg), rysa Radima (25 kg) a datla Daniela (370 g). Lukáš sám váží 8 kg. Jenže datel Daniel je neposedný a pořád by ve všem tom dřevě okolo hledal něco k snědku, takže jsou po celé lodi díry.

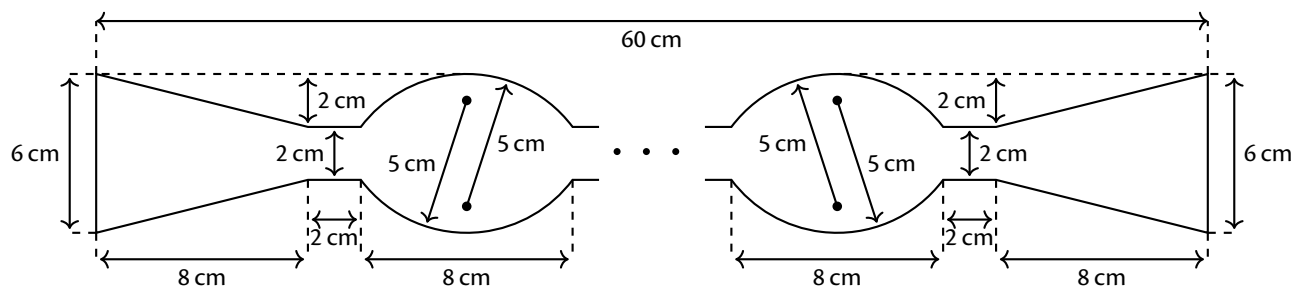
Daniel vždy začne hledat něco k snědku 10 cm pod okrajem lodi. Tam vyklove díru a posune se o 10 cm dolů. Takhle se posouvá dolů, dokud nenačká na dno lodi, nebo dokud ho někdo nezastaví. Po tom co ho někdo zastaví, se posune opět na vršek lodi a o 10 cm směrem doprava po vnitřním obvodu lodi a začne opět klovat díry od shora dolů.

Jenže Lukáš pod čarou ponoru samozřejmě žádné díry nechce, to by mu teklo do lodi a ta by se potopila. Poradíš mu, v jaké výšce má Daniela vždy zastavit, aby se díry nacházely jen nad hladinou? A když Daniel vyklove 5 děr denně, vystačí mu plocha lodi nad hladinou na 80denní plavbu? Odlehčení lodi způsobené vyklovanými dírami zanedbej a uvažuj, že loď pluje po sladké vodě (ano, i sladká moře mají ve světě království zvířat!) o hustotě 1000 kg/m^3 .



Úloha 5B Motýlek
(5 bodů)

Babočka Blanka se rozhodla luskounu lvovi k Vánocům ušít motýlek. Předem si připravila stříh: proužek šířky 2 cm, který je na obou koncích na každé straně rozšířen nejprve o kruhovou úseč a následně o pravoúhlý trojúhelník – viz obrázek 7. Blanka má v plánu si koupit pruh látky dlouhý 60 cm a široký 6 cm a napadlo ji, že by ze zbylé látky ještě mohla vyrobit kapesník, na který potřebuje 40 cm^2 stejné látky. Neví však, jestli jí tolik zbyde. Dokážeš spočítat, kolik látky bude Blanka na motýlek potřebovat a zda tedy bude moci ze zakoupené látky ušít i kapesník?



Obrázek 7: Stříh motýlku. V prostřední části (tři tečky) je motýlek tvořen jednoduchým proužkem šířky 2 cm. Černé puntíky představují středy kruhových úsečí, ty mají poloměr 5 cm, výšku 2 cm a šířku 8 cm.