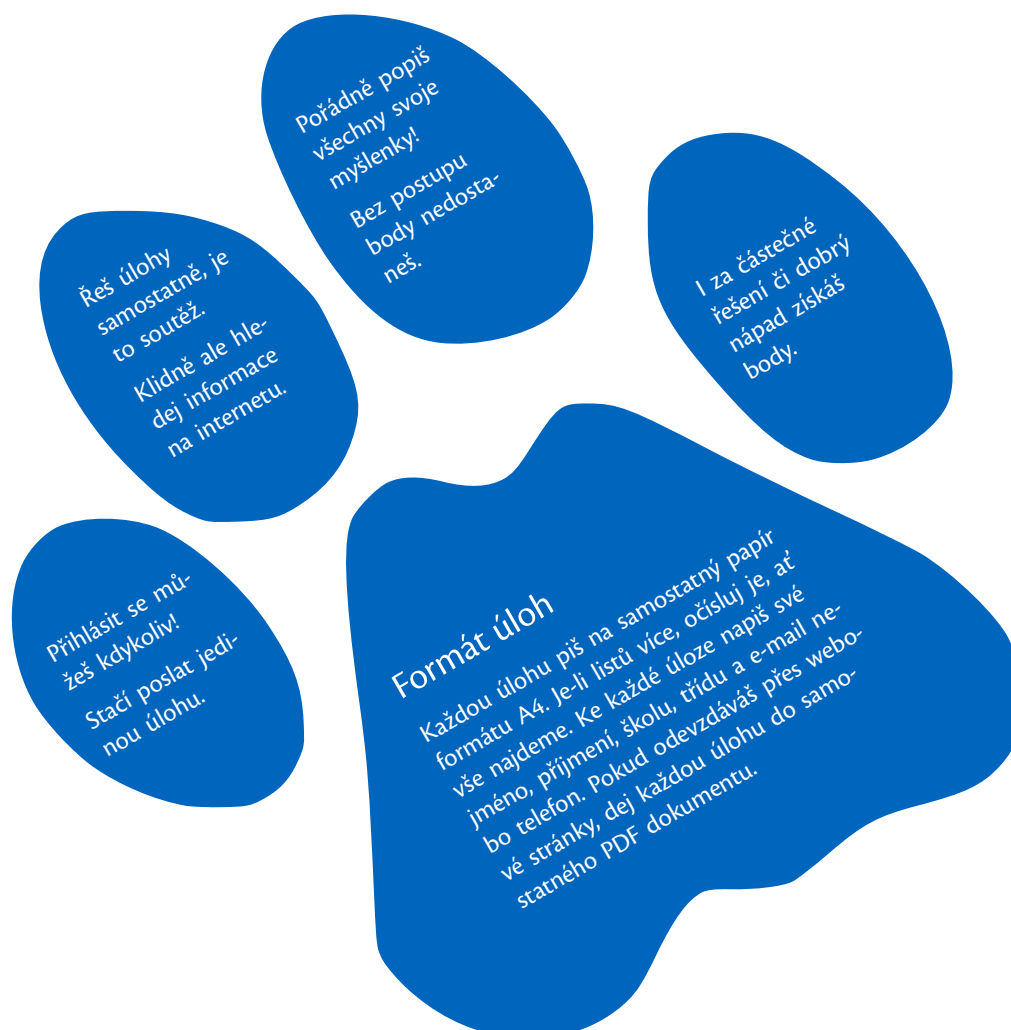


Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již desátým rokem Českým vysokým učení technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět základních úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama1vova.cz> a dále na Google+ či Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **21. ledna 2019** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přeji

Alenka, Čenda, Hanka, Honza, Kobi, Káťa, Lenka, Láďa, Matěj, Maťa, Terka a Terka, Vilda, Zuzka a Zuzka a další

Kategorie mladší

Úloha 1A Amfory

(5 bodů)

Tučňák Tomáš vlastní tři amfory: zelenou o objemu 10 l, žlutou o objemu 8 l a červenou o objemu 3 l. Dovede

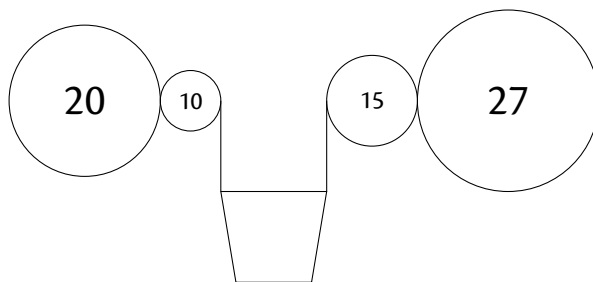
- kteroukoliv amforu dolít po okraj vodou z kohoutku,
- kteroukoliv amforu zcela vyprázdnit,
- z jedné amfory lít vodu do druhé, dokud nebude buďto první zcela prázdná, nebo druhá plná po okraj. Tedy např. pokud se v jednu chvíli nachází v zelené amfoře 2 l vody a ve žluté 7 l, umí Tomáš buďto přelit 1 l ze zelené do žluté (čímž se žlutá naplní po okraj), nebo všech 7 l ze žluté do zelené (čímž se žlutá zcela vyprázdní).

Urči, pro která čísla x z 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 svede Tomáš docílit toho, aby bylo v zelené amfoře nalito přesně x litrů.

Úloha 2A Zaječice zalévá

(6 bodů)

Zaječice Kristýna se rozhodla pěstovat zelí. Kvůli suchu musí zalévat, a protože se nechce tahat s konvemi, vymyslela si svůj vlastní systém zavlažování. Jenže aby měla voda dostatečný spád a dostala se opravdu všude, potřebuje Kristýna sud s vodou zvednout. Jezevec Adam se jí jakožto gentleman nabídl, že jí pomůže, a nainstaloval na zeď za sudem ozubená kola (viz obrázek 1). S velkými koly lze otáčet pomocí klik, velká kola pohybují malými. Na malá kola jsou připevněny cívky a lana, lana jsou napnutá a připevněná k sudu jako na obrázku. Čísla na kolech uvádějí počet zubů, cívka na kole s deseti zuby má obvod 50 cm, cívka na kole s patnácti zuby 80 cm. Jestliže Kristýna otočí kolem s dvaceti zuby o dvě otáčky (720°), o kolik stupňů musí otočit Adam s kolem o sedmadvaceti zubech, aby sud zůstal vodorovně? O kolik cm sud zvednou?



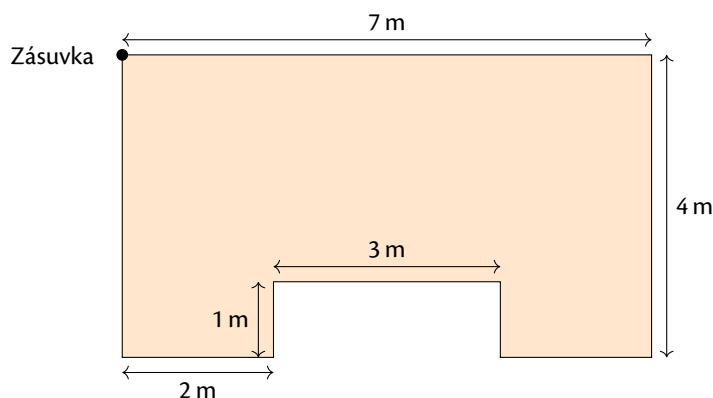
Obrázek 1: Ozubená kola a sud; čísla značí počty zubů

Úloha 3A Kozel zahradníkem

(7 bodů)

Kozel Mustafa se konečně vrátil z cest domů a s hrůzou zjistil, že má neposekaný trávník. Bohužel se svou elektrickou sekačkou dovede sekat jen tam, kam dosáhne s kabelem dlouhým 7 m, který může na zahradě zapojit pouze do jediné zásuvky, která se nachází v severozápadním rohu jeho domu. Půdorys jeho domu spolu s umístěním zásuvky je znázorněn na obrázku 2. Spočti (s přesností na alespoň dvě desetinná místa), kolik metrů čtverečných trávy může posekat, pokud se kromě samotného domu na zahradě nikde v dosahu nenacházejí žádné překážky.

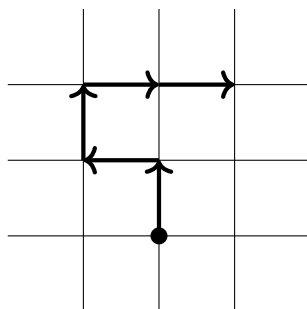
Při řešení se ti může hodit znalost, že obsah kruhu o poloměru r je roven πr^2 , přičemž π je přibližně 3,1416.



Obrázek 2: Půdorys Mustafaova domu

Úloha 4A Cesty na síti
(9 bodů)

Mravenec Martin stojí na křižovatce čtvercové sítě cest a hledí přímo na sever. V jednu chvíli se rozhodne vydat se na procházku – na kousek papíru si napíše nějaký řetězec složený z písmen L , V , R a vyrazí. Na první křižovatce (tj. té, na níž stojí na začátku) se podívá na první písmeno na papíru: je-li to L , vydá se po cestě doleva, je-li to V , vydá se vpřed a konečně je-li to R , vydá se doprava. Takto dojde na další křižovatku, kde se podobně rozhodne podle druhého písmena na papíru, a takto bude pokračovat dál a dál. Pokud dojde na konec řetězce, tj. rozhodne se na nějaké křižovatce podle posledního písmene, bude se na další křižovatce rozhodovat podle prvního písmene, na další podle druhého atp. (viz příklad v obrázku 3).


 Obrázek 3: Ukázka prvních pěti kroků cesty podle řetězce $VLRRV$. Po jejich provedení hledí Martin směrem na východ.

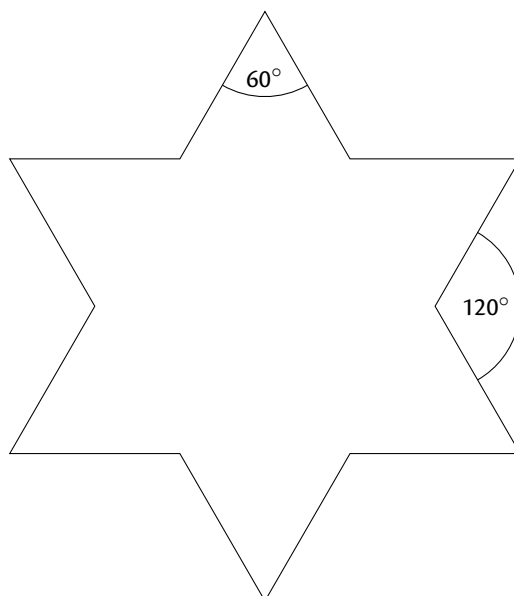
Martin si pro svou cestu napsal následující řetězec:

$$VRVVLVVVR \dots L \underbrace{V \dots V}_{2019\text{-krát}} R$$

Ten si lze představit tak, že vznikl z řetězce $RLRLRL \dots LR$, v němž se střídá R a L a je dohromady složen z celkem 2019ti znaků, tak, že se před první znak vložilo jedno V , před druhý dvě V , před třetí tři V atp. až před 2019tý 2019 V . Rozhodni a zdůvodni, zda se Martin někdy vrátí na křižovatku, z níž vyrazil, bude-li dostatečně dlouho cestovat podle uvedeného řetězce.

Úloha 5A Vánoční hvězda
(5 bodů)

Hrdlička Hanka by chtěla vyrobit jmenovky na dárky ve tvaru pravidelné šesticípé hvězdy se stranou délky 3 cm (stranou se myslí libovolná úsečka tvořící hvězdu), vnitřními úhly velikosti 60° v každém z cípu a vnějšími úhly velikosti 120° v každém ze vrcholů, který není cípem (viz obrázek 4). Na papíře již má úsečku délky 3 cm a v penálu našla obyčejnou tužku, pravítko (bez měřidla) a kružítko, neví ale, jak s jejich pomocí takovou pravidelnou šesticípou hvězdu narýsovat. Poradíš jí, jak na to?



Obrázek 4: Šesticípá hvězda

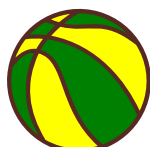
Kategorie starší

Úloha 1B Střed kružnice

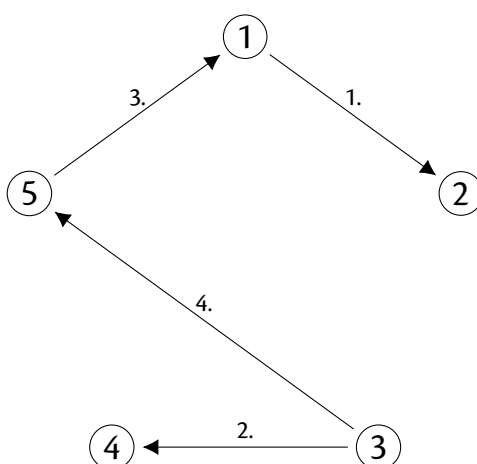
(5 bodů)

Medvěd Matěj vášnivě rád řeší geometrické úlohy. Na papíru má nakreslenu kružnici a rád by sestrojil její střed. Porad' mu, jak to učinit pomocí kružítko a pravítka (bez měřidla) tak, aby (navrch k dané kružnici) nenarýsoval více než dvě přímky a tři další kružnice.

Úloha 2B Podivná vybíjená

(6 bodů)


Zvířátka hrají podivuhodnou vybíjenou. Rozdají si čísla 1,2,... atd. tak, že nejvyšší číslo je celkový počet hrajících zvířátek. Následně se v rozdaném pořadí rozestaví do kroužku. První zvířátko si vezme míč a vybijí zvířátko po své levici (tj. zvířátko s číslem 2). Nejbližší dosud nevybité zvířátko, které stálo v kroužku za právě vybitým, si míč chytne a hraje dál (vybijí nejbližší nevybité zvířátko po své levici atp.) – viz příklad v obrázku 5. Urči číslo zvířátka, které vyhraje, tedy zůstane jako poslední nevybito, pokud bude hrát 65 zvířátek.



Obrázek 5: Příklad vybíjené s pěti zvířátky; očíslované šipky značí postupné vybíjení se

Úloha 3B Ciferný součet

(7 bodů)

Daněla Klárka je mezi zvířátky nechvalně proslulá tím, že ne vždy říká tak docela pravdu. Nedávno se na matematickém večírku vytasila s tím, že našla přirozené číslo n takové, že n^2 má v desítkové soustavě ciferný součet 3. Dokaž, že žádné takové číslo n neexistuje.

(Ciferným součtem daného čísla rozumíme součet všech jeho cifer, tedy např. ciferný součet čísla 2019 je $2 + 0 + 1 + 9 = 12$.)

Úloha 4B Heslo

(9 bodů)

Mravenečník Miloš si před mravenci schovává svůj milkshake do elektronicky zabezpečeného trezoru. Pro otevření je třeba zadat osmimístné heslo složené z nul a jedniček, které se zadává pomocí osmi žárovek v řadě vedle sebe, z nichž každá je opatřená vlastním vypínačem (svítící žárovka znamená jedničku, zhasnutá nulu) a velkého červeného tlačítka.

Jednoho ale Miloš zjistil, že ono osmimístné heslo k trezoru zapoměl. Trezor naštěstí vždy po zadání hesla zobrazí na displeji, kolik cifer zadaného hesla bylo správně (samozřejmě už ale nepoví, které to byly). Jelikož se Milošovi nechce trávit dlouhé večery zkusmým přepínáním žárovek, rozhodl se, že si naprogramuje robůtka, který to udělá za něj.

Milošův nový robot se jmenuje Karel a umí vykonávat příkazy zapsané v programovacím jazyce Múzy 2.0. Takovými příkazy mohou být:



- **proměnná** ← **výraz** – nejprve spočítá hodnotu výrazu a poté ji uloží do proměnné. Proměnnou může být jakékoliv slovo složené z malých písmen bez háčeků či čárek zapsané bez mezer, tedy např. `x`, `cislo` nebo `pocetmravencu`. Výraz se může skládat z čísel, názvů proměnných, znaků `+`, `-`, `*`, `/`, které značí sčítání, odčítání, násobení a dělení (beze zbytku, tj. `x ← 10 / 3` uloží do proměnné `x` hodnotu 3) a závorek `()`.
- **Jestlize**(podmínka) **pak** (příkazy) – jestliže je splněna podmínka, vykoná příkazy v závorce. Pokud splněna není, neudělá nic. V podmínce se porovnávají hodnoty dvou čísel nebo proměnných (pomocí znaků `=`, `<`, `>`, `≤`, `≥`) – podmínkou tedy může být např. `20 > 19`, `x = 5` nebo `a ≥ b`.
- **Jestlize**(podmínka) **pak** (příkazy) **Jinak** (příkazy) – funguje podobně jako předchozí. Pokud je podmínka splněna, vykoná příkazy v první závorce. Pokud splněna není, vykoná příkazy v druhé závorce.

- Dokud (podmínka) opakuj (příkazy) – dokud je splněna podmínka, opakuje příkazy v závorce stále dokola. To, zda je podmínka splněna, nebo ne, se zjišťuje pokaždé před tím, než se vykoná první z příkazů v závorce.

Např. následující program spočítá součet všech přirozených čísel od 1 do 10 do proměnné soucet, načež jej vynásobí dvěma, pokud je menší nebo roven 50, případně od něj odečte 1, pokud je větší:

```
soucet ← 0
x ← 1
Dokud(x ≤ 10) opakuj (
    soucet ← soucet + x
    x ← x + 1
)
Jestlize(soucet ≤ 50) pak (
    soucet ← soucet * 2
)
Jinak (
    soucet ← soucet - 1
)
)
```

Navrch k základním příkazům se ještě Milošovi podařilo naučit Karla vykonávat následující tři s trezorem související funkce:

- `precti(x)` – přečte, zdali x -tá žárovka zleva na trezoru svítí (pak vrátí 1), nebo je zhasnutá (vrátí 0). x může být nějaké konkrétní číslo, nebo název proměnná. Pokud bude x jiné číslo než 1,2,...,8, vrátí vždy nulu (neexistující žárovky přeci nesvítí).
- `prepni(x)` – pokud je x některé z čísel 1,2,...,8, přepne x -tou žárovku zleva na trezoru (pokud svítí, bude nyní zhasnutá, a naopak). Pokud má x jakoukoliv jinou hodnotu, neudělá nic (x může být opět číslo nebo proměnná). Vždy vrátí 0.
- `vyzkousej()` – zmáčkne velké červené tlačítko na trezoru, tedy zadá heslo, které je v tu chvíli nastavené na žárovkách, a vrátí počet správných cifer, které trezor ohlásil (vrátí tedy vždy některé z čísel 0,1,2,...,8).

Tyto nové příkazy lze libovolně kombinovat s těmi základními, např.:

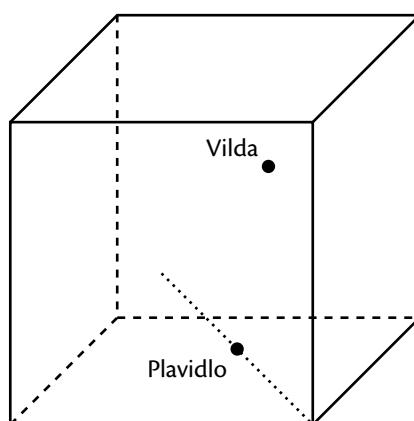
`sedmacifra ← precti(7), Jestlize(x ≤ 8) pak (prepni(x))` nebo `pocetspravnychcislic ← vyzkousej()`.

Pokud víš, že na začátku jsou všechny žárovky zhasnuté, napiš podle uvedených pravidel program, po jehož seběhnutí bude na trezoru nastaveno správné heslo. Učiň to tak, aby se funkce `vyzkousej()` zavolala nanejvýš desetkrát.

Úloha 5B Hranatá planetka

(5 bodů)

Astronaut kanárek Vilda přistál na podivné planetce, která má tvar krychle o délce hrany 1 km. Vilda došel do středu jedné stěny této planetky, ale najednou mu začal docházet kyslík. Potřebuje se proto co nejrychleji dostat po povrchu planetky ke svému vesmírnému plavidlu, které se nachází na protější stěně, ve středu úsečky spojující její střed s jedním z jejích vrcholů (viz obrázek 6). Poradíš Vildovi, kudy vede nejkratší cesta a jak je dlouhá?



Obrázek 6: V tomto obrázku se Vilda nachází na vzdálenější stěně, zatímco jeho plavidlo na bližší.