JÁMA LVOVÁ

Zadání 2. kola
IX. ročník

Ahoj!

Vítej v Jámě lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již devátým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na `https://jamalvova.cz` a dále na Google+ či Facebooku.

Pořádně popiš všechny svoje myšlenky! Bez postupu body nedostaneš.

Řeš úlohy samostatně, je to soutěž. Klidně ale hledej informace na internetu.

I za částečné řešení či dobrý nápad získáš body.

Přihlásit se můžeš kdykoliv! Stačí poslat jedinou úlohu.

Formát úloh

Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. Je-li listů více, očísluj je, ať vše najdeme. Pokud odevzdáváš přes webové stránky, dej každou úlohu do samostatného PDF dokumentu. Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon.

Svá řešení nám pošli do **26. ledna** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

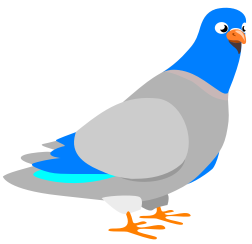
Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Běňa, Čenda, Hanka, Honza a Honza, Klárka, Kobi, Kuba, Lenka, Láďa, Matěj, Maťa, Terka, Terka a Terka, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

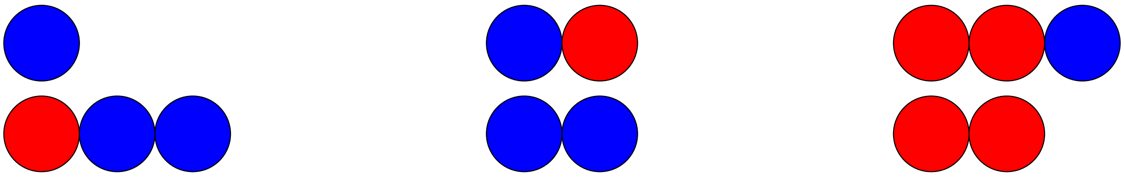
Úloha 1A Rosťův korálkový problém (5 bodů)



Holub Rosťa hraje počítačovou hru, v níž je jeho úkolem vytvořit dvě stejné řady korálků. Rosťa ve svém tahu vždy přidá několik korálků do první řady, poté je na tahu počítač, který přidá několik korálků do druhé řady. Rosťa si všiml, že na určité tahy počítač reaguje vždycky stejně (viz obrázek 1; v horní řadě jsou Rosťovy tahy, v dolní řadě tahy počítače):

1. Když Rosťa přidá do první řady jeden modrý korálek, počítač do druhé řady přidá jeden červený a dva modré.
2. Když Rosťa přidá jeden modrý a jeden červený korálek, počítač přidá dva modré.
3. Když Rosťa přidá dva červené a jeden modrý korálek, počítač přidá dva červené.

Rosťa zvítězí ve chvíli, kdy poté, co počítač odehraje svůj tah, budou obě řady korálků naprosto stejné. Poradíš mu, jak má korálky přidávat, aby se mu to povedlo?

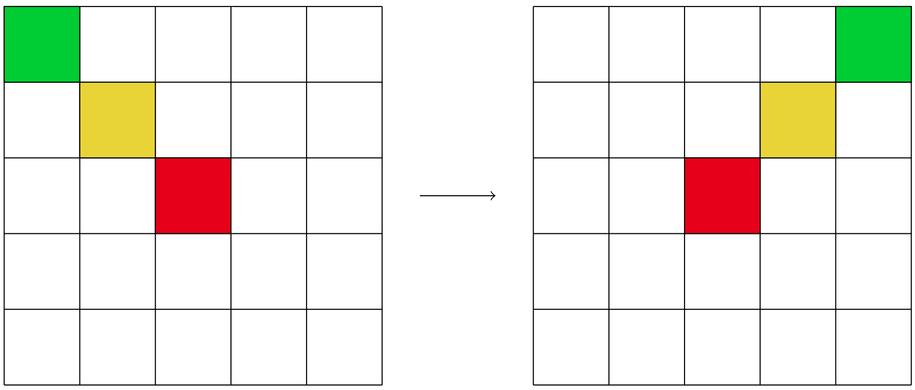


Obrázek 1: Tahy Rosti a počítače

Úloha 2A Šifra štíra Štefana (6 bodů)

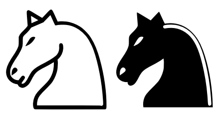
Štír Štefan si rád vybarvuje. Baví se tím, že si z papíru vystřihne dvě tabulky o velikosti 5×5 políček, z jedné tabulky některá políčka vystříhá a pak ji přiloží na druhou tabulku. Skrz díry pak vybarví všechna viditelná políčka druhé tabulky. Potom vrchní tabulku (tu s děrami) otočí o 90 stupňů (viz obrázek 2; vybarvená políčka si odpovídají) a znova vybarví všechna dosud nevybarvená viditelná políčka druhé tabulky. Takto pokračuje, dokud se po čtvrtém otočení tabulky nedostane zpátky do výchozí pozice.

Štefanovi se ale často stává, že některá políčka ve spodní tabulce zůstanou nevybarvená. Pomůžeš mu zjistit, jaký je nejmenší počet políček, které musí z vrchní tabulky vystřihnout, aby vybarvil všechna políčka spodní tabulky?



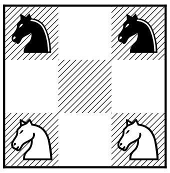
Obrázek 2: Otočení tabulky o 90 stupňů

Úloha 3A Šachová akrobacie (7 bodů)

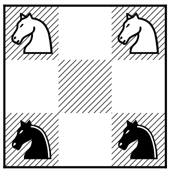


Do království Šach přijel cirkus! Věže se staví na cimbuří, pěšci chodí okolo, střelci střílí naslepo, král s královnou žonglují korunami a jezdci? Jezdci, ti si nacvičili zcela unikátní a dosud nevídaný akrobatický kousek: Na šachovnici o rozměrech 3×3 políčka se do dvou rohů vedle sebe postaví černí jezdci a do dvou protějších jezdci bílí (viz 3a) A pak tři, dva, jedna, teď, začnou skákat, a skáčou a skáčou a po chvíli znovu stojí v rozích, ale přesně naopak. Tam, kde předtím stáli jezdci bílí, jsou nyní jezdci černí, a na pozicích vraníků podupávají běloši (3b). Celé království je z tohoto triku u vytržení – jak jen se jezdci na tak malé ploše mohou vyhnout? Jak to, že se nepošlapou? Nepodvádí? Skáčou vůbec jako řádní šachoví koně?

Dokážeš vymyslet postup, jakým se jezdci během triku po šachovnici pohybují za předpokladu, že skáčou jako normální šachoví jezdci (o dvě políčka jedním směrem a jedno políčko druhým směrem), že na jednom políčku může v každou chvíli stát jenom jeden jezdec a že se jezdci navzájem dokážou přeskočit? Anebo takový postup neexistuje a cirkusáci jen celé království tahají za nos?



(a) Situace na začátku

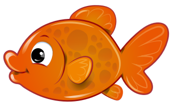


(b) Situace na konci

Obrázek 3

Úloha 4A Zlatá rybka (10 bodů)

Zlaté rybky mají, jak známo, paměť děravou jako řešeto, a spousta obyčejných věcí jim tak činí obtíže. Třeba zapamatovat si datum v podobě roku, měsíce a dne (a ještě k tomu vědět, který je den v týdnu) jim dělávalo trable, a tak se kdysi dávno rozhodly, že si svůj kalendář zjednoduší. Tomuto slavnému Dni (s velkým D) bylo přiřčeno datum 0, den na to následoval den s datem 1 a tak dále – datem každého dne nového kalendáře je tedy vždy jedno celé číslo. Rybky ale nepřestaly rozlišovat dny v týdnu (jejich týden má 7 dní, tak jako náš) – stránka z rybčího kalendáře by tedy mohla vypadat třeba takto (pokud Den 0 byla kupříkladu neděle):



29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56

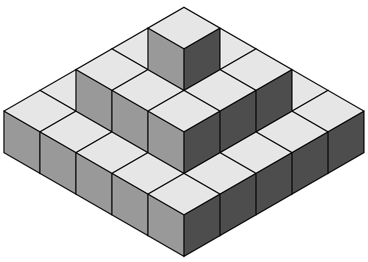
Obrázek 4: Rybčí kalendář

Rybka Klaudie má ráda čísla. Jednoho dne se probudila, podívala se, jaké je datum, jaké bylo datum týden předtím a jaké bude týden nato (z kalendáře si tedy přečetla tři čísla přímo pod sebou), a tato čísla vynásobila. Výsledek byl násobkem šesti, což Klaudii udělalo velikou radost, protože šestka je její oblíbené číslo.

Ukaž Klaudii, že na tom není nic výjimečného a že totéž nastane kterýkoliv jiný den.

Den 0 je už dávnou minulostí – Klaudie ještě nebyla na světě – a žádná rybka už si tedy bohužel nepamatuje, jaký den v týdnu to byl.

Úloha 5A Domeček pro mouchu (5 bodů)



Obrázek 5: Plánek domečku

Moucha Kamilka je královská archeoložka a nyní řeší ošemetný úkol. Nalezla podzemní budovu, která je od okolního prostředí izolována tak dobře, že vzduch nemůže proudit ani dovnitř ani ven a je do ní přiváděn pouze speciální odvětrávací šachtou. Kamilka se snaží zjistit, jak dlouho by v takovémto obydlí mohli přebývat jeho obyvatelé, aniž by větrali. Budova má tvar pyramidy vytvořené z dutých krychlí o hraně 1 dm (to znamená, že objem jedné krychle je 1 dm^3): Spodní patro pyramidy má půdorys čtverce o hraně 5 dm, druhé patro má půdorys čtverce o hraně 3 dm a nejhořejší patro tvoří jediná krychle (viz obrázek 5; všechna patra jsou úplná, žádné krychle v nich nechybí). Kamilka ví, že jeden muší obyvatel spotřebuje za den 0,5 dm^3 vzduchu. Poradíš Kamilce, jak dlouho mohlo v této budově přežít pět much, aniž by větraly? Zkus také vymyslet, k čemu mohla tato budova sloužit.

Tloušťku stěn krychlí zanedbej, počítej, jako kdyby byly celé vyplněné vzduchem.

Kategorie starší

Úloha 1B Vynuluj tabulku! (5 bodů)

Surikaty Saša a Nataša si krátí čekání na Ježíška tím, že si dávají hádanky. Zrovna teď Saša nakreslil na papír tabulku o velikosti 3×3 políčka vyplněnou přirozenými čísly (viz obrázek 6) a řekl Nataše: „Můžeš provádět dvě operace: Buď si vybereš nějaký řádek tabulky a všechna čísla v něm vynásobíš dvěma, anebo si vybereš nějaký sloupec a ode všech čísel v něm odečteš jedničku. Tvým úkolem je získat ve všech políčkách číslo 0. Dokážeš to?“

A co Ty, dokážeš vynulovat Sašovu tabulku?

1	2	1
2	3	2
1	2	1

Obrázek 6: Sašova tabulka

Úloha 2B Střelba (6 bodů)

Lišák Felix, nejlepší střelec v okolí, se vydal se svým kamarádem Tondou na střelnici. Stříleli do terče ve tvaru rovnostranného trojúhelníka o straně 10 cm. Po prvních 5 ránách Tonda poznamenal jednu zajímavost:„Nyní už určitě existují dvě střely, které jsou od sebe vzdáleny nejvýše 5 cm.“ Felix se zamyslel, a posléze se zeptal: „Jak jsi na to přišel?“ Na Tobě teď je vcítit se do lišáka Tondy a pokusit se Felixovi odpovědět.

Všemi pěti ranami se Tonda s Felixem trefili do terče.

Úloha 3B Stříkačky 2 (7 bodů)

Když se fenek Filip z úlohy 2B z předchozího kola jednou toulal po poušti, našel válcový soudek a v něm 25 stříkaček. Soudek i stříkačky byly mnohem větší než ty, které měli doma, a tak se Filip rozhodl, že soudek i stříkačky se sourozenci odnesou domů a začnou je využívat pro nošení a skladování vody. Bohužel ale doma nenašel žádný metr, a tak mohl změřit jejich rozměry jenom provázkem, který je rozdělen čárkami na stejně velké části. Filip zjistil, že stříkačky mají na výšku 8 čárek a obvod 3 čárky a že soudek má na výšku 12 čárek a obvod 90 čárek. Pomůžeš Filipovi spočítat, kolikrát bude muset on a jeho 24 sourozenců (od minule se jim jeden další sourozenec narodil) ke studni, aby soudek naplnili celý, a mohli jít pro vodu zase až za týden?

Úloha 4B Nekonečná tancovačka (10 bodů)

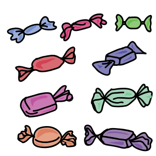
Matematici v Království zvířat uspořádali tancovačku. Na nekonečné louce si ze stejných čtvercových desek s délkou strany 1 m naskládaných bez mezer k sobě postavili nekonečně mnoho čtvercových tanečních parketů tak, že pro každé přirozené číslo x (jako třeba 1, 2, 3, …) existoval právě jeden parket s délkou strany x m. Nakonec se ale matematiků sešlo jen konečně mnoho a všichni se pohodlně vešli na parket s délkou strany n m. Ani nedohrála první písnička, a přišli – jako vždy pozdě – daňci vedení danělou Klárkou. Ti už se na parket nevešli, a jelikož se zvířátkům nechtělo přecházet na jiný, rozhodla se nějaký jiný rozebrat na původní metrové desky a ty pak všechny beze zbytku rozmístit kolem čtvercového parketu s délkou strany n m, na němž dosud tancovala, tak, aby se z něj stal čtverec s délkou strany $(n+1)$ metrů. Po troše hledání se jim to podařilo, a tanec tak mohl vesele pokračovat.

Rozhodni, zdali n mohlo být liché. *Pokud ano, nalezni alespoň jedno takové n a uveď i délku strany čtverce, který mohla zvířátka rozebrat a použít. Pokud ne, ukaž, proč tomu tak musí být.*

Při řešení by se Ti mohly hodit tyto vzorce: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a^2 - b^2) = (a+b) \cdot (a-b)$.

Úloha 5B Vážení (5 bodů)

Kajmanka Karla má hromadu čokoládových bonbonů a prastarou váhu. Váha už má ale svá nejlepší léta za sebou, a tak ukazuje jenom to, zda předměty na ní váží více než jeden kilogram, nebo ne. Karla by ráda věděla, jakou hmotnost čokoládových bonbonů má. Ví, že žádný bonbon neváží více než jeden kilogram, a také si všimla, že ať už bonbony rozdělí jakkoliv na dvě skupiny, nikdy neplatí, že by pro obě skupiny zároveň platilo, že váží více než jeden kilogram.



Poradíš Karle, jakou maximální hmotnost bonbonů může vlastnit?