JÁMA LVOVÁ

Zadání 1. kola
IX. ročník

Ahoj!

Vítej v Jámě lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již devátým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na `https://jamalvova.cz` a dále na Google+ či Facebooku.

Pořádně popiš všechny svoje myšlenky! Bez postupu body nedostaneš.

Řeš úlohy samostatně, je to soutěž. Klidně ale hledej informace na internetu.

I za částečné řešení či dobrý nápad získáš body.

Přihlásit se můžeš kdykoliv! Stačí poslat jedinou úlohu.

Formát úloh

Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. Je-li listů více, očísluj je, ať vše najdeme. Pokud odevzdáváš přes webové stránky, dej každou úlohu do samostatného PDF dokumentu. Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon.

Svá řešení nám pošli do **17. listopadu** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

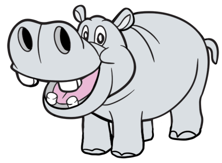
Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

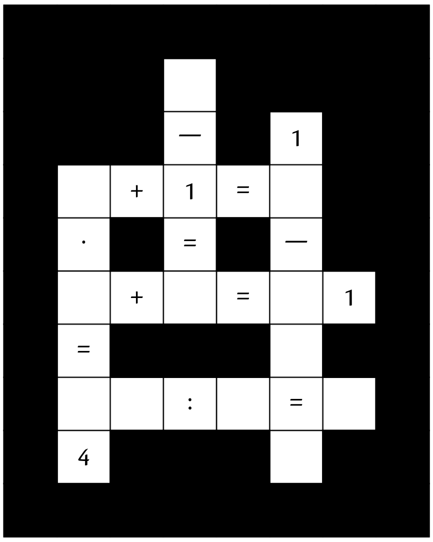
Alenka, Běňa, Čenda, Hanka, Honza a Honza, Klárka, Kobi, Kuba, Lenka, Láďa, Matěj, Maťa, Terka, Terka a Terka, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Křížovka (5 bodů)

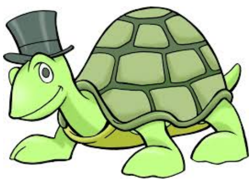
Hrošík Eda má stejně jako ostatní zvířátka rád různé hry a hlavolamy. Když mu tedy kamarádi donesli na vyluštění matematickou křížovku, byl nadšený – jeho nadšení ale brzy opadlo, protože se mu ji nedaří rozlousknout. Úkolem je doplnit do prázdných políček číslice tak, aby všechny příklady jak ve vodorovném, tak ve svislém směru byly vyřešené správně (operace i rovnosti už má Eda předepsané v tabulce, dvě číslice za sebou tvoří dvojciferné číslo – například 1 a 2 za sebou jsou dvanáct). Pomůžeš Edovi zvítězit nad tímhle záludným úkolem, pokud má do luštěnky správně vepsat číslice 0, 1, 2, 3, 5, 6, 6 , 7, 7, 7, 8 a 9?





Obrázek 1: Křížovka

Úloha 2A Divotvorná čísla (6 bodů)



Achilles se ve své oblíbené knížce s matematickými zajímavostmi dočetl o tzv. divotvorných číslech. Číslo je divotvorné, pokud z něj opakovaným používáním následujících pravidel můžeme získat 1:

1. Je-li číslo sudé, vydělíme jej 2.
2. Je-li číslo liché, vynásobíme jej 3 a k výsledku přičteme 1.

Například číslo 5 je divotvorné: 5 je liché, použijeme tedy druhé pravidlo, $5 \cdot 3 + 1 = 16$, 16 je sudé, použijeme první pravidlo, $16 : 2 = 8$, 8 je sudé, použijeme tedy první pravidlo, $8 : 2 = 4$, 4 je sudé, použijeme opět první pravidlo, $4 : 2 = 2$, 2 je sudé, použijeme opět první pravidlo, $2 : 2 = 1$.

Achilles dal svému kamarádovi, panu Želvovi, následující hádanku: „Myslím si číslo. Je to číslo divotvorné a jedničku z něj získám po sedmi krocích. Jaké číslo si myslím?“

Budeš rychlejší než pan Želva a zjistíš, jaká čísla si Achilles může myslet?

Úloha 3A Černá skříňka (7 bodů)

Straky Něva a Pěva rády hledají blýskavé věci. Protože zjistily, že ve dvou se to nejen lépe táhne, ale také lépe hledá, rozhodly se, že budou poklady hledat společně. Straky jsou ale od přírody tak trošku lakomé, a tak chce mít každá z kamarádek svou vlastní pokladnici. Postupují tedy tak, že poklady, které naleznou, během týdne ukládají do společného skladiště, v neděli potom každý předmět zváží a nashromážděný poklad si pak rozdělí rovným dílem, tak, aby obě dvě měly přesně stejnou hmotnost předmětů (pokud takové dělení neexistuje, odloží straky dělení kořisti na příští týden). Najít takové dělení ale není žádná hračka, protože každý předmět má samozřejmě jinou hmotnost a rozdělit je na dvě stejně těžké hromádky je velice náročné. Mezi Něvou a Pěvou kvůli tomu vzniká mnoho hádek a svárů, chvílemi to dokonce vypadá, že se snad kvůli dělení kořisti rozkmotří navždy.

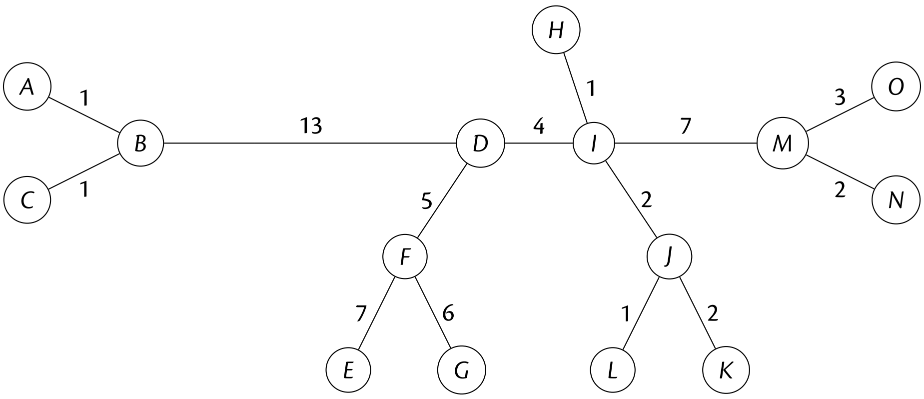
Při své poslední výpravě ale straky nalezly úžasnou věc – malou černou skříňku, která umí odpovídat na otázku „Lze z těchto předmětů vybrat skupinu takových, že dohromady váží přesně x g?“ (za x si dosaď libovolné číslo). Obě kamarádky okamžitě napadlo, že tato skříňka by mohla být řešením jejich problému. Dokážeš jim poradit, jakým způsobem pomocí černé skříňky zjistí spravedlivé rozdělení kořisti? (Černá skříňka na otázku odpoví jenom *Ano*/*Ne*, neprozradí tedy způsob, jakým předměty do dvou skupin rozdělit. Otázek jí Něva s Pěvou mohou položit, kolik chtějí.)

Úloha 4A Pandemie (9 bodů)

Vesmírná flotila jeho nakažlivosti císaře (dříve hraběte) Nestowitze Pravého pod vedením admirála Bacila se chystá zaútočit na bezejmennou planetu v souhvězdí Kentaura. Veškeré obyvatelstvo této planety žije ve městech, z nichž některá jsou spojená cestami. Kvůli nehostinným podmínkám na povrchu planety je však přesun po těchto cestách pro bakterie nebezpečný – aby cestu úspěšně zdolaly, musí cestovat v dostatečně velké skupině (jak velké, to závisí na konkrétní cestě). Bacil hodlá při podmanění této planety užít standardní strategii – v prvním dni dobývání do některého z měst vysadí jednu bakterii, která toto město okamžitě nakazí. Každý následující den pak přibude 1 nová bakterie v těch městech, která buď

1. jsou již obsazena alespoň jednou bakterií, anebo
2. jsou spojena cestou s městem, v němž je (na začátku dne) dostatek bakterií ke zdolání této cesty.

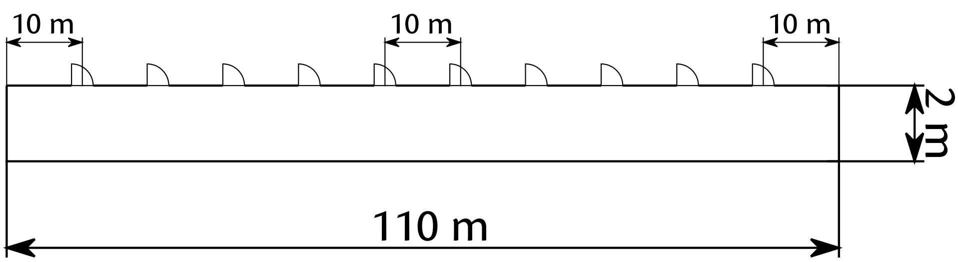
Admirál Bacil si na základě pozorování planety nechal vytvořit její mapu, v níž si města označil písmeny *A*–*O* a ke každé cestě si zapsal, kolik bakterií je třeba na její zdolání (viz obrázek 2). Samozřejmě by chtěl, aby planeta byla dobyta (tj. aby v každém městě byla alespoň jedna bakterie) co nejrychleji. Poraď mu, do kterého města má vysadit první bakterii, a spočti, kolikátého dne bude planeta dobyta.



Obrázek 2: Mapa planety

Úloha 5A Faxování (5 bodů)

Zvířátka si staví novou budovu sídla vlády. Chodba jejich nové vládní budovy má tvar obdélníka s délkami stran 110 m a 2 m a z jedné z delších stran vede v pravidelných 10metrových rozestupech 10 dveří do jednotlivých kanceláří (viz obrázek 3). U protější strany chodby mají být umístěny dva faxy. Protože zvířátka fax používají docela často, chtějí, aby to nikdo k přístroji neměl příliš daleko. Chtějí proto faxy umístit tak, aby číslo, které získáme jako součet vzdáleností jednotlivých kanceláří k nejbližšímu faxu, bylo co nejmenší. Poradíš architektce vlaštovce Evičce, kam má faxy umístit, aby byla podmínka splněna? Protože ministerstvo není žádný holubník, počítej s tím, že zvířátka se chovají způsobně, a vyjdou proto při své cestě za faxem nejprve ven ze dveří, potom pokračují podél stěny, a až když jsou přímo naproti faxu, přejdou přes uličku k němu.



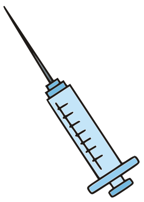
Obrázek 3: Plánek chodby

Kategorie starší

Úloha 1B Korálky (5 bodů)

Kapybara Helča je mezi zvířátky proslulá výrobou náhrdelníků z barevných korálků. Nejraději má, když je její výtvor souměrný – tedy když má první korálek stejnou barvu jako poslední, druhý stejnou jako předposlední a tak dále. Když jí tedy nějaké zvířátko přinese hromádku korálků, z nichž by chtělo vyrobit náhrdelník, ráda by nějak jednoduše zjistila, jestli to půjde souměrně. Poradíš jí, jakou podmínku musí počty korálků jednotlivých barev splňovat?

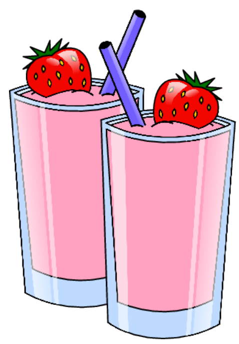
Úloha 2B Stříkačky (6 bodů)



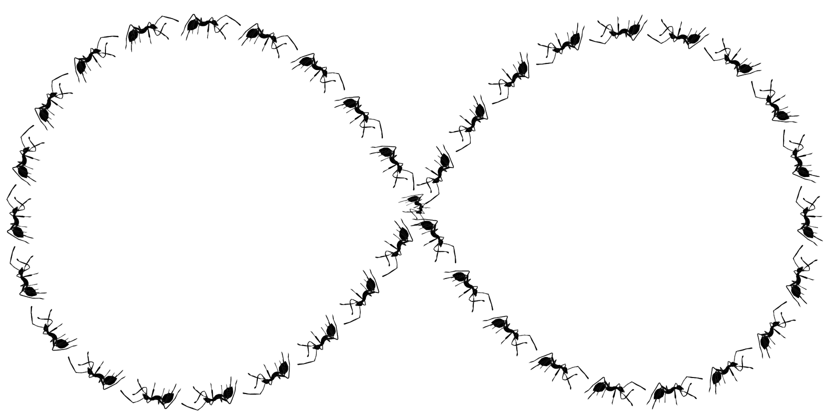
Na poušti je sucho, a tak si musí fenek Filip a jeho 23 sourozenců nosit vodu z nedaleké artézské studny. Bohužel k tomu nemají lepší pomůcky než každý jednu stříkačku ve tvaru válce o průměru 1,5 cm a výšce 6 cm. Poraď fenkům, kolikrát se musí vydat ke studni, chtějí-li doma naplnit válcový kbelík o průměru 25 cm a výšce 50 cm.

Pro objem V válce o poloměru r a výšce h platí vzorec $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, kde π je tzv. Ludolfovo číslo, která má hodnotu přibližně 3,14. Odpařování vody či jakékoliv jiné ztráty po cestě zanedbej.

Úloha 3B Mravenci a milkshake (7 bodů)



V Království zvířátek se koná velikánská diskotéka. Hrdlička Hanka a tuleň Terka mají na starost bar, ve kterém se za koktejly platí Jámacoiny. Jelikož tam dělají i legendární Mšicí milkshaky, je to oblíbené místo mravenců. Deset z nich si dohromady naspořilo spoustu Jámacoinů a schovalo si je do trezoru u baru. Dohodli se, že je dnes večer utratí stejným dílem. Pokud ovšem některý z nich začne tančit, propadne jeho část Jámacoinů ostatním. Jeden Jámacoin se jim ale odkutálel doprostřed tanečního parketu, aniž by si toho kterýkoliv z nich všiml. A tak, když si přišel první mravenec vyzvednout svůj podíl, nepodařilo se mu rozdělit Jámacoiny na deset stejných hromádek, jak to původně mělo vycházet. Všiml si ale Jámacoinu uprostřed parketu a chtěl pro něj zajít. Jak ale vstoupil na plac, zachvátila ho hudba a on začal tancovat. Poté přišel druhý mravenec. Uviděl prvního, jak tančí na parketu, a zaradoval se. Teď si může s ostatními rozdělit Jámacoiny na devět stejných hromádek. Pokusil se Jámacoiny rozdělit na devět dílů, ale jeden Jámacoin mu chyběl. Najednou ho spatřil uprostřed parketu. Chtěl pro něj dojít, ale také jeho strhla muzika. Třetí mravenec se rozhodl objednat si pití, a tak také zašel do trezoru. Cestou uviděl dva tančící kamarády, zaradoval se, teď může rozdělit Jámacoiny jen na osm stejných hromádek. Když však rozděloval Jámacoiny spravedlivě mezi zbylé mravenčí kamarády, i jemu jeden chyběl. V tu chvíli ho spatřil uprostřed parketu. Vydal se pro něj, ale také jeho strhla hudba a úplně na nějaké milkshaky zapomněl. Stejný osud potkal i zbylých šest mravenců. Až ten poslední zjistil, že si může všechny Jámacoiny nechat, a tak si spokojeně objednal u hrdličky Hanky Mšicí milkshake a přemýšlel, kolik těch Jámacoinů na začátku vlastně měli. Věděl, že původně na každého mravence nepřipadalo více než 500 Jámacoinů. Pomůžeš mu dopátrat se, kolik měli mravenci na začátku diskotéky Jámacoinů?

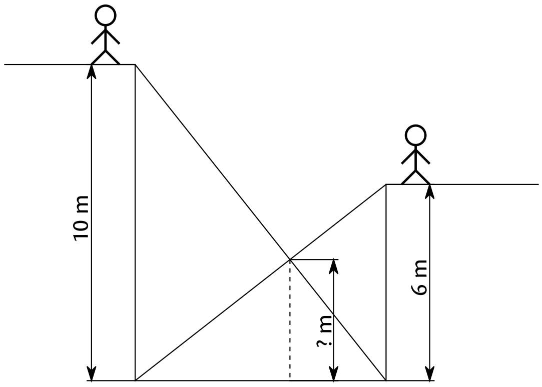


Úloha 4B V jámě lvové (9 bodů)

V jámě žije lev. Už dlouho nejedl, a tak je hladový. Hodně hladový.

Z každé strany nyní k jámě přišel jeden poutník. Oba dva se chtějí dostat na druhou stranu a oba dva s sebou shodou okolností mají dostatečně dlouhý žebřík. Rozhodli se tedy, že žebříky opřou o dno jámy proti sobě tak, aby se uprostřed dotýkaly (viz obrázek 4), a přelezou po nich na druhou stranu, aniž by museli sestoupit na dno jámy. Přece jen v nich ale hlodají pochybnosti – je místo, kde se žebříky setkají, dostatečně vysoko? Vědí, že na jedné straně je jáma hluboká 10 m a na druhé 6 m a že hladový lev může vyskočit až 5 m vysoko. Je za těchto okolností bezpečné pokoušet se jámu po žebřících překonat, anebo mají poutníci raději hledat jiný způsob?

Úlohu můžeš vyřešit i tak, že si situaci narýsuješ a výšku změříš, za takové řešení ale dostaneš jenom část bodů.



Obrázek 4: Jáma

Úloha 5B Tabulka (5 bodů)

Úhoř Olda narazil při své plavbě po světě na zvláštní vodní nádrž. Má tvar čtverce, který je navíc rozdělený přepážkami na 16 menších čtverečků. Přepážky je možné podplavat, nicméně aby bylo toto podplavání bezpečné, může se Olda vynořit vždy pouze o určitý počet políček dále, navíc musí plavat pouze kolmo vzhledem k přepážkám – nemůže se tedy pohybovat po diagonálách. Olda naštěstí ví, jak to se spodními proudy a přepážkami v každém malém čtverečku vypadá, a sestavil si proto tabulku, která celou situaci znázorňuje. Čísla v daných čtverečcích určují, o kolik políček dále by se měl vynořit. Tedy například pro číslo 1 by se měl vynořit na jednom ze čtyř sousedních políček dle svého výběru, pro číslo 2 musí napřed minout jedno políčko bez vynoření a vynořit se až na nějakém následujícím. Při plavbě pod hladinou může změnit směr – například může plavat o políčko doprava a následně o políčko nahoru. Na jedno ponoření nicméně nemůže podplavat pod jedním políčkem víckrát – pokud by chtěl podplavat pod daným čtverečkem znovu, musí se mezitím vynořit. Na červeném políčku Olda začíná a ze zeleného políčka by měla vést cesta z nádrže pryč, tam by tedy chtěl skončit. Předtím by se ale rád podíval na všechna ostatní políčka, jestli tam náhodou není něco k snědku. Aby políčko prozkoumal, musí se na něm vynořit, nestačí pod ním jen proplout. Olda by rád nalezl co nejrychlejší cestu, tedy nejraději by se na každém čtverečku vynořil právě jednou. Poradíš mu, jak taková cesta nádrží bude vypadat?

1	5	3	
4	2	4	2
2	4	3	3
1	2	2	2

Obrázek 5: Tabulka spodních proudů