

Ahoj!

Vítej v VIII. ročníku korespondenční soutěže Jáma Lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma Lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, z nichž v každém na Tebe čeká pět záložných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro zájemce z řad soutěžících je připraven **letní tábor**. Kapacita tábora je 24 účastníků, přednost mají ti s lepším umístěním v soutěži. Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očíslej.
- Pokud úlohu odevzdáváš přes naše webové stránky, stačí, když bude každá úloha v samostatném PDF dokumentu.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- Úlohy řeš samostatně, ale nemusíš se bát konzultovat své nápady třeba s rodiči, učiteli, případně hledat informace na internetu.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 36 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě ten bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže: <https://www.jamalvova.cz>.

Své řešení nám pošli do **31. března** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Alenka, Běňa, Čenda, Hanka, Honza, Honza, Klárka, Kobi, Markéta, Terka, Zuzka a Zuzka

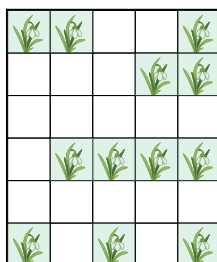
Kategorie mladší

Úloha 1A Elf Marek

(5 bodů)

Je po Vánocích, dárky v Království zvířat jsou rozdané a je potřeba postarat se o soby. Na severním pólu se o to vždycky stará elf Marek. Sobi se pasou na pastvině, která připomíná čtvercovou síť o rozměrech 5×6 políček. V některých polích roste zvláštní odrůda mrazuvzdorné trávy, kterou mají sobi rádi, v jiných je bohužel jen sníh (viz obrázek 1). Aby se sobi nerozutekli, je potřeba na pastvině postavit ohradu, ve které se budou sobi pohybovat. Uvnitř ohrady by se měla nacházet všechna políčka s trávou a zároveň je potřeba, aby se sobi ke každému poli pohodlně dostali. Sobi jsou velmi urostlí a po pastvině se umí pohybovat jen svisle nebo vodorovně. Pro stavbu plotu je potřeba zatlouct do některých rohů políček kůly a natáhnout mezi nimi roli pletiva. Elf Marek je velmi líný a nechce se mu pletivo stříhat, a tak by chtěl takovou ohradu, kde stačí jen pletivo protáhnout okolo kůlů. Plot se tedy nemůže v žádném místě křížit a na plánu musí jít namalovat jednou lomenou čarou.

Protože elf Marek dostal na stavbu plotu dotaci a potřebuje ji vyčerpat, chce postavit ohradu s co největším možným obvodem. Jak dlouhou roli pletiva si má objednat?

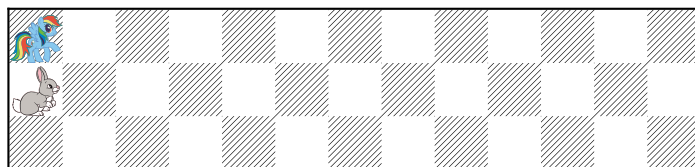


Obrázek 1

Úloha 2A Hyperkůň a králíček
(6 bodů)

Už je to pár týdnů, co se hyperkůň vrátil ze šatlavy a kopytko se mu již zcela zahojilo. Může tak opět skákat, jak je zvyklý – tedy o 3 pole jedním směrem a 1 pole druhým. S blížícími se Velikonoce do království Šach zavítala i velikonoční králice Aprikotka. Pro její obveselení si hyperkůň nachystal malý závod v hopsání. Závodní dráha bude 3 políčka široká a 13 políček dlouhá. Hyperkůň bude startovat v první, nejlepší, dráze, Aprikotka v prostřední, oba dva se před prvním skokem postaví na první políčko dané dráhy. Poskakování Aprikotky velmi připomíná šachového pěšce, Aprikotka ve svém tahu vždy poposkočí o jedno pole směrem k cíli (na rozdíl od hyperkoně tedy bude pořád hopsat ve své dráze). Hyperkůň, jakožto vyzvatel, má první skok, pak skáče Aprikotka, pak zase hyperkůň a tak dále, dokud někdo z nich neprotrhne cílovou pásku – tedy neskočí kamkoli za třinácté políčko. Během závodu smí být na každém políčku jen jeden z nich, jinak by si navzájem ublížili.

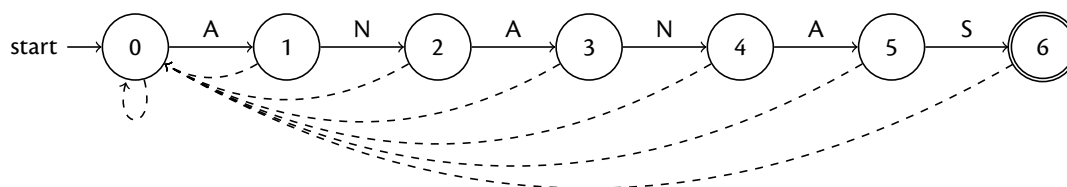
Protože je hyperkůň galantní, rozhodl se, že nechá Aprikotku vyhrát. Samozřejmě ale nechce, aby na to přišla, musí to tedy udělat tak, aby nevzbudil její podezření. Aprikotka má šachografickou paměť a zapamatuje si všechny skoky, které hyperkůň udělá, a začne ho podezřívát ve chvíli, kdy hyperkůň některý ze svých skoků zopakuje, tj. pokud bude skok začínat i končit na stejných políčkách jako některý z předchozích. Pokud z jednoho políčka udělá hyperkůň více skoků pokaždé na jiné pole, z různých polí skočí na stejné, případně prohodí počáteční a koncové políčko skoku, bude vše v pořádku. Pomůžeš hyperkonovi naplánovat, jak má skákat, aby Aprikotka vyhrála, nepojala žádné podezření a zároveň si ani jeden z nich během závodu neublížili?



Obrázek 2

Úloha 3A Ananas
(9 bodů)

Policejní velitelství Království zvířat řeší vážný problém: na hranicích s říší Bromeliů operují pašeráci ananasu a svou podvratnou činností již přivedli všechny zvířecí obchodníky s ananasem na pokraj bankrotu. Řešením situace byli pověřeni majorové velbloudi Knut, Moris a Patrik. Těm se s nesmírným úsilím a nasazením vlastního života podařilo zjistit, kudy si pašeráci posílají zprávy, a mohou tak nyní zachytávat jejich korespondenci a číst ji. Pašeráci moc rozumu nepobrali, nevymysleli žádný chytrý způsob, jak své zprávy šifrovat, a jejich jediným bezpečnostním opatřením tak je to, že v textu vynechají všechny mezery a že text jejich zpráv je hodně dlouhý – většina z něj je zcela nepodstatná a jen malá část se skutečně vztahuje k tomu, co mají v nejbližších dnech v plánu. Pašeráků je hodně, mohou si tedy dovolit zaměstnat několik zvířátek jen tím, že tyto strašlivě dlouhé a špatně čitelné zprávy luští a získávají z nich podstatné informace. Knut, Moris a Patrik ale tolik času nemají, a tak se rozhodli, že si na zpracování dopisů pořídí robota, který jim v textu vyznačí všechny výskyty slova „ananas“. Jejich robot se může vyskytovat v několika stavech (viz obr. 3). Robot vždy přečte jedno písmenko textu a podle toho, jaké písmenko to je, se přesune do jiného stavu: Pokud přečetl písmenko, kterým je označena šipka vedoucí vpřed z aktuálního stavu, přesune se do stavu o jedna většího. Pokud přečte písmenko jiné, vrátí se zpět do stavu 0 (naznačeno přerušovanými šipkami). Ve chvíli, kdy se dostane do stavu 6, znamená to, že přečetl slovo „ananas“, ohlásí výskyt, přesune se zpět do stavu 0 a pokračuje ve čtení následujícím znakem.



Obrázek 3

Zpočátku se zdálo, že robot funguje skvěle, a Knut, Moris a Patrik si spokojeně mnuli hrby, jak na pašeráky vyžráli. Během jedné rutinní kontroly ale zjistili, že automat nenajde všechny výskyty slova „ananas“ ve zprávách! Pokud se např. v některé zprávě vyskytovala posloupnost písmen „anananas“, robot výskyt slova „ananas“ neohlásil i přes to, že tam je! Dokážeš Knutovi, Morisovi a Patrikovi poradit, jak mají robota opravit, aby fungoval správně?

Úloha 4A Náramky pro lišky**(10 bodů)**

Do lesní školky chodí 40 malých lišek. Jejich paní učitelka je má moc ráda, a tak jim chce vyrobit náramky na památku. Změřila si obvod zápěstí každého žáčka a zjistila velice zajímavou věc: náramek pro nejmenší lištičku musí měřit 1 cm, pro největšího cvalíka 40 cm a každá lištička potřebuje náramek jinak dlouhý.

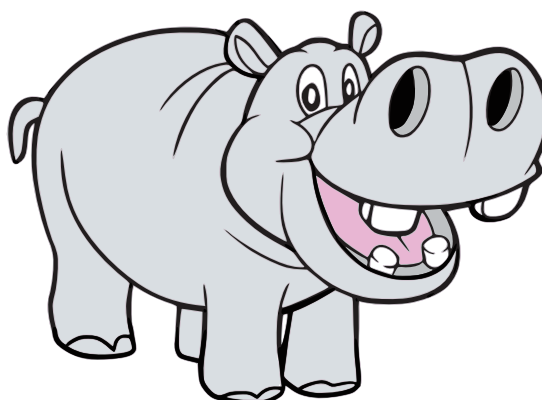
Paní učitelka si v lese našla čtyři klacíky, které dohromady měří 40 cm. Jen tak z legrace chtěla zkusit odměřit některé náramky pomocí těchto klacíků, shodou okolností ale zjistila, že jí stačí na odměření všech náramků! Jak dlouhé tyto klacíky jsou?



Měření si můžeme představit jako sčítání a odčítání délek některých (ne nutně všech) klacíků. Pokud by tedy paní učitelka měla dva klacíky o délkách 1 cm a 4 cm, je schopná změřit délku 1 cm (první klacík), 4 cm (druhý klacík), 5 cm (oba dva klacíky položené za sebe) a 3 cm (délka přečnávajícího kusu druhého klacíku, pokud oba klacíky položíme vedle sebe).

Úloha 5A Lod'**(6 bodů)**

V Království zvířat se rozšířila nová móda – stavění hranolovitých lodí. Jednu takovou už si nechal postavit lišák Lukáš (viz úloha 4B), hned po něm si jednu pořídil také hroch Eda. Eda by na své lodi rád uspořádal narozeninovou oslavu pro sebe a své kamarády, velbloudy a slony. Každý velbloud váží 600 kg a jako dárek s sebou přinese 20 kg Edových oblíbených lotosových kořínků, každý slon váží 1 t a protože je větší, i lotosových kořínků přinese více, 35 kg. Eda by rád dostal kořínků co nejvíce, jeho loď má ale bohužel omezenou nosnost – pouhých 15 tun. Kolik velbloudů a kolik slonů má Eda na oslavu pozvat, pokud on sám váží 3 t?



Ahoj!

Vítej v VIII. ročníku korespondenční soutěže Jáma Lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma Lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, z nichž v každém na Tebe čeká pět základních úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro zájemce z řad soutěžících je připraven **letní tábor**. Kapacita tábora je 24 účastníků, přednost mají ti s lepším umístěním v soutěži. Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očíslej.
- Pokud úlohu odevzdáš přes naše webové stránky, stačí, když bude každá úloha v samostatném PDF dokumentu.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- Úlohy řeš samostatně, ale nemusíš se bát konzultovat své nápady třeba s rodiči, učiteli, případně hledat informace na internetu.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 36 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě ten bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže: <https://www.jamalvova.cz>.

Své řešení nám pošli do **31. března** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

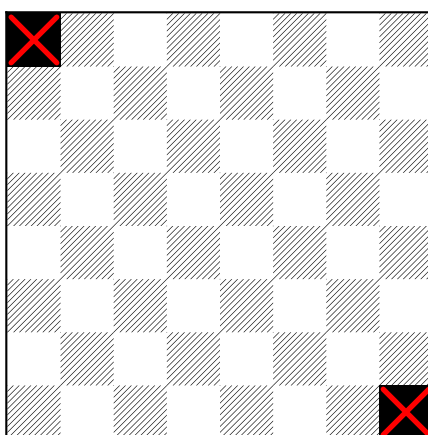
Alenka, Běňa, Čenda, Hanka, Honza, Honza, Klárka, Kobi, Markéta, Terka, Zuzka a Zuzka

Kategorie starší

Úloha 1B Domino

(5 bodů)

Medvídek Brumla si v minulém kole (úloha 1B) úspěšně vyrobil flotilu parníků. Nyní by si ze své další šachovnice 8×8 políček chtěl vyrobit kostičky domina. Problém je, že mu myška Šibalka z šachovnice vyhrýzla dva protilehlé rohy (viz obrázek 4). Povede se mu i přesto vyrobit 31 kostiček domina? Ani v tomto případě není přípustné žádné slepování.

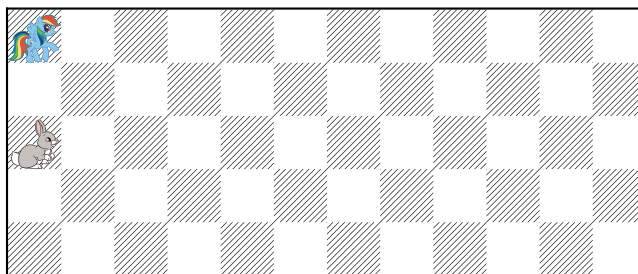


Obrázek 4

Úloha 2B Hyperkůň a králíček
(6 bodů)

Už je to pár týdnů, co se hyperkůň vrátil ze šatlavy a kopýtko se mu již zcela zahojilo. Může tak opět skákat, jak je zvyklý – tedy o 2 pole jedním směrem a 2 pole druhým. S blízcími se Velikonoce do království Šach zavítala i velikonoční králice Aprikotka. Pro její obveselení si hyperkůň nachystal malý závod v hopsání. Závodní dráha bude 5 políček široká a 12 políček dlouhá. Hyperkůň bude startovat v první, nejlevější, dráze, Aprikotka v prostřední, oba dva se před prvním skokem postaví na první políčko dané dráhy. Poskakování Aprikotky velmi připomíná šachového pěšce, Aprikotka ve svém tahu vždy poposkočí o jedno pole směrem k cíli (na rozdíl od hyperkoně tedy bude pořád hopsat ve své dráze). Hyperkůň, jakožto vyzvavatel, má první skok, pak skáče Aprikotka, pak zase hyperkůň a tak dále, dokud někdo z nich neprotrhne cílovou pásku – tedy neskočí kamkoli za dvanácté políčko. Během závodu smí být na každém políčku jen jeden z nich, jinak by si navzájem ublížili.

Protože je hyperkůň galantní, rozhodl se, že nechá Aprikotku vyhrát. Samozřejmě ale nechce, aby na to přišla, musí to tedy udělat tak, aby nevzbudil její podezření. Aprikotka má šachografickou paměť a zapamatuje si všechny skoky, které hyperkůň udělá, a začne ho podezřívát ve chvíli, kdy hyperkůň některý ze svých skoků zopakuje, tj. pokud bude skok začínat i končit na stejných políčkách jako některý z předchozích. Pokud z jednoho políčka udělá hyperkůň více skoků pokaždé na jiné pole, z různých polí skočí na stejné, případně prohodí počáteční a koncové políčko skoku, bude vše v pořádku. Pomůžeš hyperkonovi naplánovat, jak má skákat, aby Aprikotka vyhrála, nepojala žádné podezření a zároveň si ani jeden z nich během závodu neublížil?



Obrázek 5

Úloha 3B Marticové počty 3
(9 bodů)


Díky vaší pomoci již zvířecí matematikové vědí, jak vypadá marticová jednička (viz úloha 4B z 1. kola), i to, že marticové násobení sice obecně není komutativní, ale lze najít dvojice martic, pro které komutativita násobení platí (viz úloha 3B z 2. kola). Většina matematiků již začíná věřit, že martice by mohly být k něčemu dobré, a mrož Pavel se dokonce rozhodl, že je využije ve své vědecké práci. Všechno šlo jako po másle až do té chvíle, kdy Pavel v jednom z matematických důkazů zjistil, že by z martic potřeboval umět získat pouze první řádek, případně první sloupec. Jinými slovy, potřeboval by umět nalézt takové martice S a R , pro které platí, že pokud vynásobíme martici S s libovolnou jinou marticí M , získáme jako výsledek nezměněný první sloupec M , a pokud vynásobíme martici R s libovolnou jinou marticí M , získáme jako výsledek nezměněný první řádek martice M . Z martice $M = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$ tak chceme jako výsledek získat martice $M_S = \begin{array}{c} 1 \\ \hline \end{array}$, resp. $M_R = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \end{array}$.

Dokážeš Pavlovi poradit, jak martice S a R vypadají?

Vzhledem k tomu, že spolu můžeme násobit jen martice určitých rozměrů, může (podobně jako u marticové jedničky) platit, že existuje celá skupina takových martic S a R , z nichž všechny vypadají podobně, ale mají různé rozměry. Nezapomeň, že marticové násobení není komutativní a záleží tedy na tom, v jakém pořadí martice vynásobíš!

Úloha 4B Lod'**(10 bodů)**

V Království zvířat se rozšířila nová móda – stavění hranolovitých lodí. Mezi nejlepší stavitele patří dikobraz Az-kar-min An-yl-in, který své lodě buduje z jasanového dřeva o hustotě 620 kg/m^3 z prken silných 20 cm (výsledná loď má tedy stěny tlusté 20 cm). Jeho kamarád lišák Lukáš si u něj objednal loď, která má šířku 300 loktů, délku 50 loktů a výšku 30 loktů (1 loket měří 0,45 m, jedná se o vnější rozměry). Ještě před vyplutím by ale chtěl vědět, kolik jeho nová loď unese zátěže, aby věděl, kolik kamarádů může pozvat na večírek. Mezi jeho kamarády patří: slon Samuel (váží 1 t), žirafa Ziva (900 kg), hroch Haniel (3 t), orangutan Ozeáš (90 kg), nosorožec Nathaniel (3,6 t), medvěd Michael (250 kg), jelen Jeremiáš (300 kg), varanka Varda (166 kg), datel Daniel (370 g), tygr Teofilus (300 kg), lvice Lea (250 kg) a krokodýl Kornel (1,2 t). Které kamarády může Lukáš pozvat, jestliže on sám váží 8 kg a ve vyhlášce o bezpečnostních předpisech lodní dopravy Království zvířat stojí, že loď by měla při plavbě čnít nad vodu alespoň o 20 cm?

Lukášova loď nemá střechu, skládá se tedy pouze ze dna a čtyř svislých stěn. Lukáš se bude s lodí plavit především po jezeře Tarara, v němž je průměrná hustota vody 1 g/cm^3 .

Úloha 5B Velikonoční vajíčka**(6 bodů)**

Králíček Tomáš se před časem pohádal se slepičkou Tamarou a teď najednou zjistil, že nemá kde sehnat vajíčka na Velikonoce. Naštěstí je to ale nadšený kutil a to by bylo, aby ve své dílně nenašel něco, co mu pomůže jeho problém vyřešit. Hned za dveřmi Tomáš objevil poloprázdný sáček se sádrou a dvě duté koule, které minulý rok vyrobil na kuželky. Když koule rozřízl na polovinu, zjistil, že je do sebe může vložit tak, aby do vzniklé dutiny mohl nalít sádrou a vytvořit tak velmi originální velikonoční kuličky.

Pro kolik kamarádů budou Tomášovi kuličky stačit, jestliže vnitřní průměr větší koule je 8 cm, vnější průměr menší koule 4 cm a sádry si může připravit 2,5 l?

Objem koule lze vypočítat podle vztahu $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, kde r je poloměr koule a π tzv. Ludolfovo číslo, které má hodnotu přibližně 3,14.

