

Kategorie mladší

Úloha 1A Procházka

řešení A

Čtvercové dlaždice na náměstí si můžeme obarvit černou a bílou barvou tak, jako na šachovnici. S každou bílou dlaždicí tedy sousedí čtyři černé, a s každou černou sousedí čtyři bílé.

Pokud má Čestmír pravou nohu na bílé dlaždici a udělá jeden krok, tak musí skončit levou nohou na černé dlaždici. Stejně tak pokud má levou nohu na černé dlaždici, tak po jednom kroku musí stát pravou nohou na bílé dlaždici.

Z toho je vidět, že na bílých dlaždicích může stát pouze pravou nohou, a na černých pouze levou. Pokud tedy začal na pravé noze (bílé dlaždici), tak na pravé noze skončí.

řešení B

Na které noze skončí záleží na tom, jestli Čestmírova procházka měla sudý, nebo lichý počet kroků. Vždy, když Čestmír udělá krok, tak se od počáteční dlaždice vzdálí, nebo přiblíží (nikdy nemůže zůstat stejně daleko) o právě jeden krok („vzdáleností“ zde myslíme nejmenší počet kroků, které Čestmír musí udělat, aby se k počáteční dlaždici vrátil).

Na začátku procházky udělal Čestmír sudý počet kroků (nula). Po každém kroku se o jedna zvětší počet kroků, které udělal, ale zároveň se o jedna změní jeho vzdálenost od počáteční dlaždice; tudíž budou tato čísla buď obě sudá, nebo obě lichá.

Na konci své procházky bude Čestmír vzdálený od počáteční dlaždice 0 kroků. Protože 0 je sudá, tak počet kroků, který Čestmír udělal, bude také sudý. Tudíž musí skončit na stejné noze, na které procházku začínal.

Úloha 2A Jelení SUDOKU

Nejprve je potřeba uvědomit si základní princip kombinatoriky, a to že pokud vybírám dvakrát nezávisle na sobě z více možností, tak celkový počet možností dostanu vynásobením jednotlivých počtů. S tímto bude potřeba pracovat hlavně v druhé části. V sudoku také bude obecně platit, že když už někde v řádku doplním nějaké číslo, tak na doplnění příštího čísla budu mít o jednu možnost méně.

Nyní se podíváme na řešení první úlohy. Na začátku už máme přesně dané, která diagonála je vyplněná jedničkami. Zbývá už jen určit, kam dopsat dvojky a trojky. V prvním řádku už jsou jen dvě možnosti, jak napsat čísla 2 a 3. Nyní ukážu, že tímto výběrem už je zbytek sudoku jednoznačně určen.

Budu předpokládat, že na prvním řádku mám vyplněno 1, a a b . V druhém řádku je 1 uprostřed. V pravém políčku tak už nemůže být 1, protože je už ve stejném řádku jednou a nemůže tam být ani b , protože už je ve stejném sloupci. Proto tam musí být a .

1	a	b
b	1	a
		1

A nyní už je sudoku ve stavu, že každé políčko lze vyřešit, protože se nachází v řádku nebo sloupci, kde už chybí jen jedno číslo, takže zbytek sudoku už také doplním jednoznačně. Proto jsou jen dva možné způsoby, jak toto sudoku správně vyřešit:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

Nyní se podíváme na druhý úkol. Už víme, že pro každou zadanou diagonálu jsou dvě možná řešení. Když navíc zjistíme, kolik možných diagonál existuje, stačí tento počet vynásobit dvěma, protože každou diagonálu umíme doplnit dvěma způsoby. Ve čtverci máme diagonály dvě, jedna vede zprava doleva a druhá zleva doprava. Navíc na každou diagonálu můžu vyplnit tři možná čísla. To znamená, že existuje celkem 6 různých diagonál a pro každou dvě řešení. Díky tomu tak existuje 12 možných vyplnění prázdného sudoku 3×3 .



Úloha 3A Tuneliště lištičky Libušky – mladší

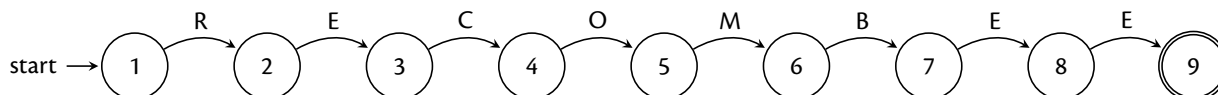
Podúloha i

Vzhledem k tomu, že nechceme omezovat vaši kreativitu, tak tady není vzorový domeček.

Podúloha ii

Protože chceme zjišťovat právě jedno slovo, tak Libuščin domeček může být tvořen 9 komůrkami, skrz které vedou tunely, které jsou postupně označeny písmeny „RECOMBEE“.

Takže pak Libuščin domeček bude vypadat takto:



Recombee je jinak jméno jednoho z našich dlouhodobých sponzorů, který pomáhá firmám přizpůsobovat na míru digitální domečky služeb na internetu při každé návštěvě a nám pronajmout skutečné domečky na tábor. Děkujeme.

Podúloha iii

Abychom měli 5ti písmenné slovo, tak potřebujeme udělat 5 průchodů mezi místnostmi. Aby to mohla být libovolná slova, tak k tunelům nenapišeme žádná písmenka. To znamená, že tímto tunelem projdou všechny zvířátka s jakýmkoliv písmenky.

Takže domeček pak bude vypadat takto:



Podúloha iv

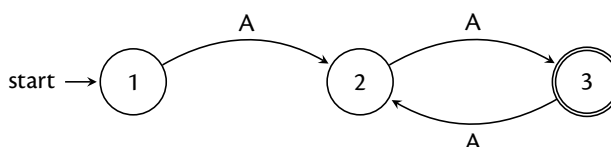
V podmínkách pro domečky a lístečky jsme neupřesnili, zda zvířátka bez lístečku nesmí projít, nebo zda prázdné lístečky prostě zvířátka nebudou používat. Podle toho může mít úloha více různých řešení, uvádíme dvě takové.

Zvířátka mohou chodit s prázdným lístečkem, ale pak nesmí projít

Lísteček nemůže být prázdný, takže první komůrka nemůže být obývací. Druhá komůrka taky nemůže být obývací, protože se do ní nejdříve dostaneme, když na lístečku máme právě jedno „A“. Ve třetí komůrce budeme mít konečně na lístečku „AA“, což už je sudý počet. Abychom mohli mít na lístečku **libovolný** sudý počet písmen, tak budeme potřebovat jít do nějaké jiné komůrky, která není obývací. A zároveň tahle komůrka musí vést zpátky do třetí, takže se tedy budeme vracet do druhé komůrky.

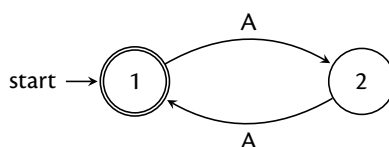
Protože na lístečku chceme jenom Ačka, tak všechny tunely jsou označeny „A“.

Takže pak bude domeček vypadat takto:



Zvířátka prázdné lístečky nikdy nebudou mít

Potom je řešení o něco jednodušší. Pokud žádné zvířátko nepřijde do tunelů s prázdným lístečkem, tak se v obývací (bude-li hned za vstupem) nikdy nezastaví. Z tohoto obývací nám pak stačí vyvést tunel s nápisem „A“ do další komůrky, stejně tak naopak. Pokud má zvířátko na lístečku sudý počet písmen Aček, skončí pokaždé v obývací (z obývací existuje za každé dvě Ačka jediná cesta, která opět končí v obývací). Když má lichý počet Aček, skončí nevyžádané zvířátko v komůrce. A jestli má na lístečku jakékoli jiné písmeno než „A“, okamžitě opouští domeček.



Kategorie starší

Úloha 1B Sprchovat, či vykoupat se? To je, oč tu běží!

Ideální teplota vody: 3 díly teplé a 1 díl studené vody

Tato úloha má 3 možná řešení.

A) Napouštění vody postupně

Nejdříve zjistíme, kolik vody se spotřebuje při vysprchování se.

- 1) 1 kyblík studené vody se napustí za 1 minutu.

1 kyblík teplé vody se napustí za 30 sekund = 1/2 minuty.

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1/2 = 2,5 \text{ minuty}$$

Hedvice sprcha trvá 30 minut.

$$\Rightarrow 30 : 2,5 = 12$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 4 = \underline{48 \text{ kbelíků}}$$

- 2) Spočítáme, za jak dlouho se naplní 1 kyblík vodou ideální teploty.

1/4 kyblíku studená voda $\Rightarrow 1 : 4 = 0,25 \text{ minuty} = 15 \text{ s}$

3/4 kyblíku teplá voda $\Rightarrow (0,5 : 4) \cdot 3 = 0,375 \text{ minuty} = 22,5 \text{ sekundy}$

1 kyblík se napustí za $15 + 22,5 = 37,5 \text{ sekundy}$

Hrošici sprcha trvá 30 minut = 1800 sekund

$$\Rightarrow \text{Spotřebuje } 1800 : 37,5 = \underline{48 \text{ kbelíků}}$$

Poté spočítáme, kolik vody musí napustit do vany.

Teplá voda: 40,5 kbelíku

Studená voda: 1/3 teplé vody $\Rightarrow 40,5 : 3 = 13,5$

Celková spotřeba vody: $40,5 + 13,5 = \underline{54 \text{ kbelíků}}$

$48 \text{ kbelíků} < 54 \text{ kbelíků} \Rightarrow$ Hedvika spotřebuje méně vody při sprchování se

Je rozdíl do 25%?

- 1) 48 kbelíků je 100%

$$48 \cdot 1,25 = 60 \text{ kbelíků je } 125\%$$

$$60 \text{ kbelíků} > 54 \text{ kbelíků}$$

$\Rightarrow$ Hrošice Hedvika se raději vykoupe.

- 2) 48 kbelíků je základ = 100%

54 kbelíků je část

část : základ $\cdot 100 =$ procenta

$$54 : 48 \cdot 100 = 112,5 \%$$

Rozdíl je o 12,5 %

$$12,5 \% < 25 \%$$

$\Rightarrow$ Hrošice Hedvika se raději vykoupe.

B) Napouštění vody rovnou v ideálním poměru

Sprcha:

Aby voda tekla v ideálním poměru, musí platit $3S = 1T$, kde S je průtok studené vody za minutu a T je průtok teplé vody za minutu. Průtok teplé vody musí být třikrát větší než průtok studené vody.

Za 1 minutu se naplní 1 kbelík studené vody nebo 2 kyblíky teplé vody.



$$\Rightarrow S \leq 1$$

$$\Rightarrow T \leq 2$$

$$3S = 1T \leq 2 \Rightarrow 3S \leq 2 \Rightarrow S \leq 2/3$$

$\Rightarrow$ Maximální průtok studené vody je $2/3$ kyblíku za minutu.

$$3S = 1T \Rightarrow T = 3 \cdot 2/3 = 2$$

$\Rightarrow$ Průtok teplé vody je 2 kyblíky za minutu.

Celkový průtok za minutu: $S + T = 2/3 + 2 = 8/3$ kyblíku za minutu

Hedvice trvá sprcha 30 minut $\Rightarrow 30 \cdot 8/3 = 80$ kyblíků

$\Rightarrow$ Hrošice při sprchování spotřebuje 80 kyblíků vody.

Vana: 54 kyblíků

Co spotřebuje méně vody?

$80 > 54 \Rightarrow$ Méně vody spotřebuje vana. $\Rightarrow$ Hrošice Hedvika se raději vykoupe.

C) Řešení založené na váženém průměru

Sprcha:

$1/4$ – podíl studené vody

1 kyblík za minutu – maximální průtok studené vody

$3/4$ – podíl teplé vody

2 kyblíky za minutu – maximální průtok teplé vody

$$1/4 \cdot 1 + 3/4 \cdot 2 = 7/4 \text{ kbelíku za minutu}$$

Sprcha trvá 30 min. $\Rightarrow 30 \cdot 7/4 = 52,5$ kbelíků

$\Rightarrow$ Hedvika při sprchování spotřebuje 52,5 kbelíků vody.

Vana: 54 kyblíků

$54 \text{ kbelíků} > 52,5 \text{ kbelíků} \Rightarrow$ větší spotřeba vody je při koupeli

Je rozdíl do 25 %?

52,5 kbelíků je 100 %

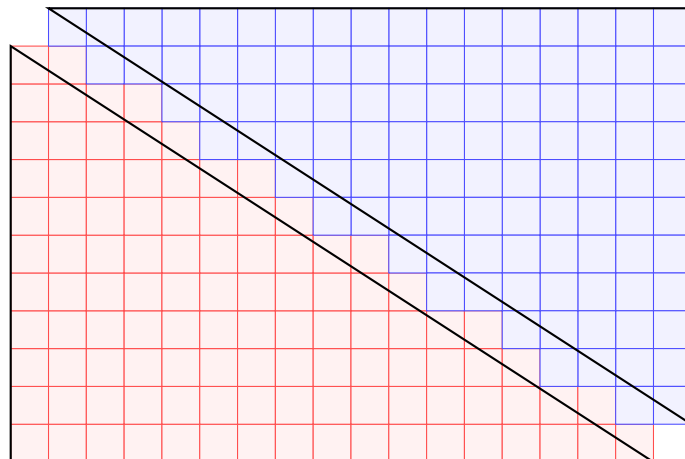
$$52,5 \cdot 1,25 = 65,625 \text{ kbelíků}$$

$65,625 \text{ kbelíků} > 54 \text{ kbelíků}$

$\Rightarrow$ Rozdíl je do 25 %. $\Rightarrow$ Hrošice Hedvika se raději vykoupe.

Úloha 2B Stavba

Spočítat pro každý čtvereček u odvěsny, jestli ke stavbě patří nebo ne, by bylo velmi náročné. Pokusíme se proto obrázek doplnit tak, abychom si počty zjednodušili. Představte si, že ony stavby máte dvě, jednu z nich otočíte a položíte je odvěsnami k sobě tak, aby vznikl obdélník. Každý pozemek obdélníka buď patří právě jedné stavbě, nebo se rohem dotýká obou.





Proč to musí fungovat? Odvěsny jsou rovnoběžky. Vycházejí z diagonálních rohů prvního pozemku, tj. je mezi nimi vzdálenost přesně pro jeden pozemek.

Kolika pozemků se bude stavba dotýkat rohem? Určitě minimálně tři u rohů stavby. Ale co s diagonálou? Budeme potřebovat největší společný dělitel délek stran. Největší společný dělitel 85 a 55 je 5. K čemu nám to bylo? Představte si první místo odshora, kde se diagonála dotkne rohu pozemku. Mezi tímto rohem pozemku a horním rohem stavby si můžeme dokreslit pravoúhlý trojúhelníček, který bude mít poměr stran stejný jako stavba a bude ležet na hranicích pozemků. Kolikrát ho na odvěsnu vejde? Ano, pětkrát.

1. Pozemek bude mít velikost: 1×85 volný sloupec + 1×55 volný řádek + 3 rohy = 143 pozemků a potom to, co zabere samotná stavba a diagonála.

Celý obdélník (viz výše) bude mít rozměry 56×86 . Z toho rohem by se oba pozemky dotýkaly jednoho pozemku na začátku diagonály plus pěti dalších na diagonále. Celý obdélník tedy má $(85 + 1) \cdot (55 + 1) = 4816$. Z toho oběma stavbám by patřilo 6 pozemků a zbytek by si rozdělily rovným dílem, jedné stavbě tedy patří $(4816 - 6) / 6 = 2411$ pozemků.

V případě, že zvířátka chtějí skoupit i pozemky dotýkající se rohem, budou potřebovat 2554 pozemků.

2. 85 volný sloupec + 55 volný řádek + $(4816 - 6) / 2$ část obdélníka. V případě, že zvířátka nechtějí skoupit pozemky dotýkající se rohem, budou potřebovat 2545 pozemků.

$$3.1. X + Y + 3 + ((X + 1) \cdot (Y + 1) - \text{počet rohových pozemků na diagonále}) / 2 + \text{počet rohových pozemků na diagonále}$$

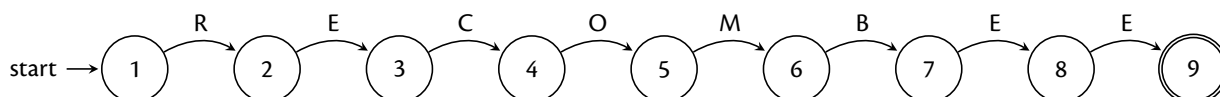
$$3.2. X + Y + ((X + 1) \cdot (Y + 1) - \text{počet rohových pozemků na diagonále}) / 2$$

Úloha 3B Tuneliště lištičky Libušky – starší

Podúloha i

Protože chceme zjišťovat právě jedno slovo, tak Libuščin domeček může být tvořen 9 komůrkami, skrz které vedou tunely, které jsou postupně označeny písmeny „RECOMBEE“.

Takže pak Libuščin domeček bude vypadat takto:



Recombee je jinak jméno jednoho z našich dlouhodobých sponzorů, který pomáhá firmám přizpůsobovat na míru digitální domečky služeb na internetu při každé návštěvě a nám pronajmout skutečné domečky na tábor. Děkujeme.

Podúloha ii

Abychom měli 5ti písmenné slovo, tak potřebujeme udělat 5 průchodů mezi místnostmi. Aby to mohla být libovolná slova, tak k tunelům nenapišeme žádná písmenka. To znamená, že tímto tunelem projdou všechny zvířátka s jakýmákoliv písmenky.

Takže domeček pak bude vypadat takto:



Podúloha iii

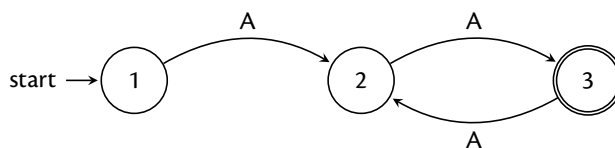
V podmínkách pro domečky a lístečky jsme neupřesnili, zda zvířátka bez lístečku nesmí projít, nebo zda prázdné lístečky prostě zvířátka nebudou používat. Podle toho může mít úloha více různých řešení, uvádíme dvě takové.

Zvířátka mohou chodit s prázdným lístečkem, ale pak nesmí projít

Lísteček nemůže být prázdný, takže první komůrka nemůže být obývací. Druhá komůrka taky nemůže být obývací, protože se do ní nejdřív dostaneme, když na lístečku máme právě jedno „A“. Ve třetí komůrce budeme mít konečně na lístečku „AA“, což už je sudý počet. Abychom mohli mít na lístečku **libovolný** sudý počet písmen, tak budeme potřebovat jít do nějaké jiné komůrky, která není obývací. A zároveň tahle komůrka musí vést zpátky do třetí, takže se tedy budeme vracet do druhé komůrky.

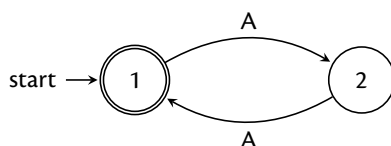
Protože na lístečku chceme jenom Ačka, tak všechny tunely jsou označeny „A“.

Takže pak bude domeček vypadat takto:



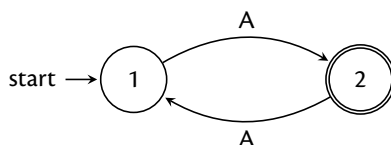
Zvířátka prázdné lístečky nikdy nebudou mít

Potom je řešení o něco jednodušší. Pokud žádné zvířátko nepřijde do tunelů s prázdným lístečkem, tak se v obývací (bude-li hned za vstupem) nikdy nezastaví. Z tohoto obývací nám pak stačí vyvést tunel s nápisem „A“ do další komůrky, stejně tak naopak. Pokud má zvířátko na lístečku sudý počet písmen Aček, skončí pokaždé v obývací (z obývací existuje za každé dvě Ačka jediná cesta, která opět končí v obývací). Když má lichý počet Aček, skončí nevyžádané zvířátko v komůrce. A jestli má na lístečku jakékoli jiné písmeno než „A“, okamžitě opouští domeček.

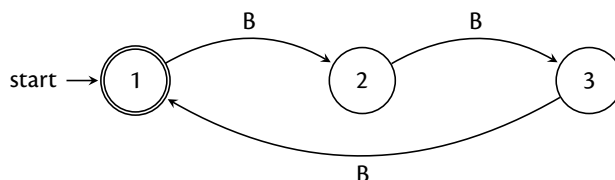


Podúloha iv

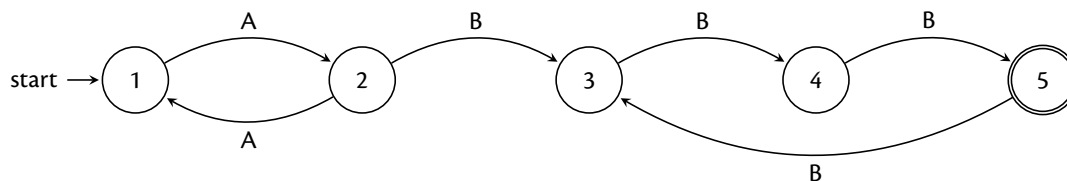
Nejdříve uděláme dvojcyklus pro detekci lichého počtu „A“. V izolaci by to vypadalo takhle:



Pak potřebujeme zjišťovat zda je počet „B“ dělitelný třemi. To bude vypadat skoro stejně jako detekování dělitelnosti dvěma, ale s komůrkou, která není obývací, navíc. To bude vypadat takhle:



A nakonec je spojíme dohromady a to tak, že z konce předešlého domečku uděláme tunel označený „B“ na začátek tohoto domečku. Ještě kvůli tomu, že je spojujeme tunelem, tak musíme posunout obývací o komůrku dál v cyklu. To bude vypadat takhle:

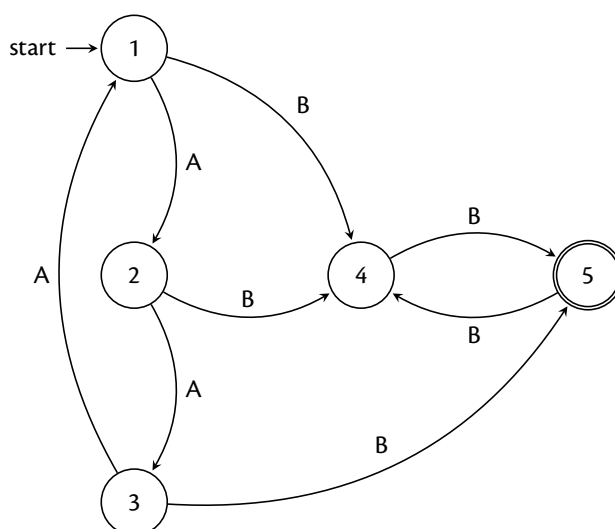


Podúloha v

Zase je budeme dávat dohromady, ale trochu jinak. Místo toho, abychom dělali tunel jenom z „obývací“ prvního cyklu, ale ze všech komůrek cyklu.

Tunely z komůrek, které nesplňují první podmínku, tak vedou do lichého stavu druhého cyklu. A naopak tunel vedoucí z komůrky, která splňuje první podmínku, tak vede do sudého stavu. Tímhle uděláme negaci druhé podmínky.

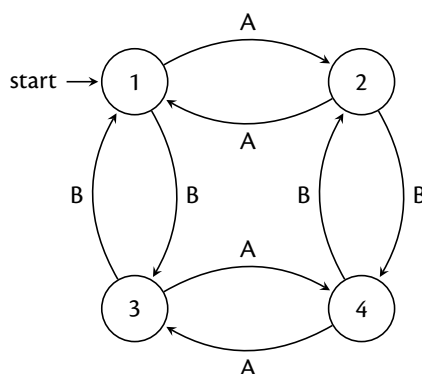
Tento domeček pak bude vypadat takto:



Podúloha vi

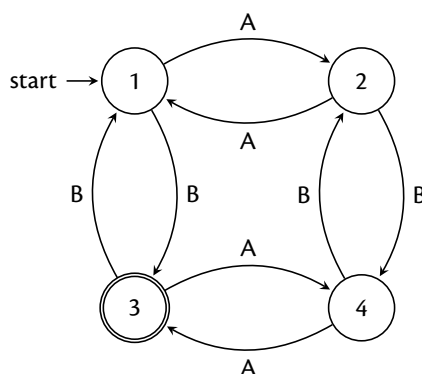
Z každé komůrky musí vždy vést tunel označený „A“ a „B“. Stačily by jenom dva cykly (pro A a pro B), ale písmenka můžou být v libovolném pořadí, takže cykly pro zjišťování „A“ a „B“ musí vést z druhé komůrky v cyklu.

To bude vypadat takto:



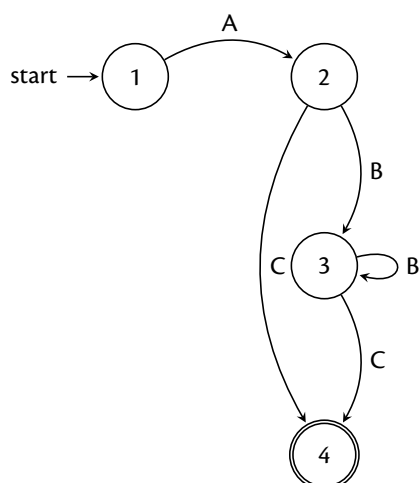
A ještě potřebujeme vybrat, kde bude obýván. Aby počet „A“ byl sudý, tak obýván musí být v komůrce 1 nebo 3. A aby počet „B“ byl lichý, tak obýván musí být v komůrce 3 nebo 4. Protože chceme, aby platily obě podmínky, tak obýván bude v komůrce 3.

Takže pak domeček bude vypadat takhle:



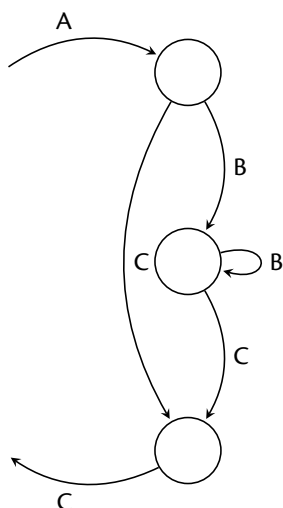
Podúloha vii

Nejdříve uděláme zjišťování, jestli na lístečku je právě jedno „A“ a jedno „C“ a mezi nimi 0 nebo víc „B“.

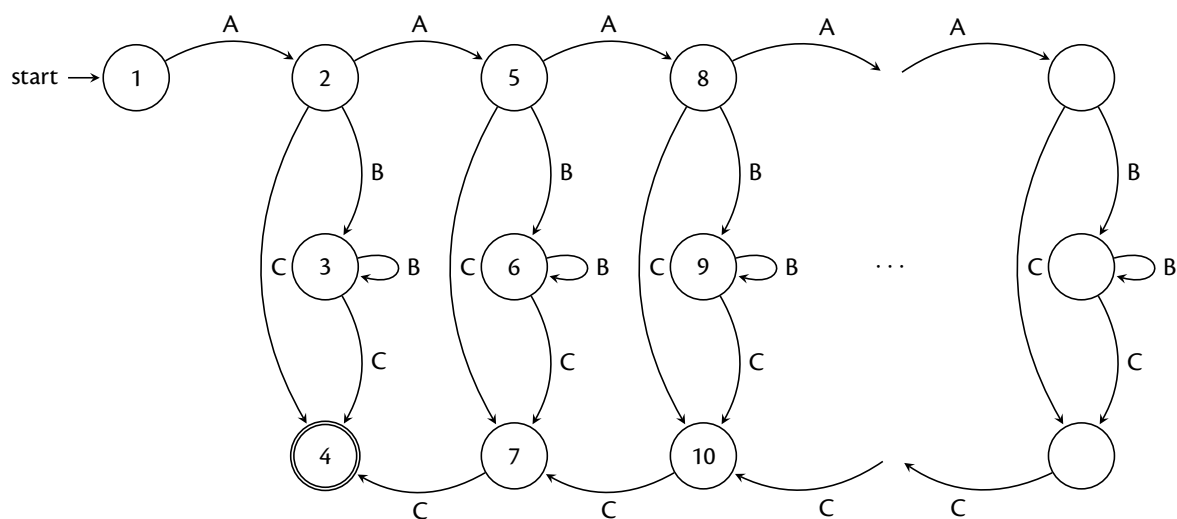


Tunel z komůrky 2 do komůrky 4, tam je kdyby byl počet „B“ 0. A komůrka 3 má tunel, který vede zpátky do ní, abychom postupně vyškrtali všechna „B“.

Abychom zvýšili počet „A“ a „B“, které jsme schopni zjišťovat, potřebujeme přidat následující kousek:



Nakonec takovýchto kousků dáme 10 za sebe a vyjde nám tohle:



(všech deset kousků tu není ukázaných, protože by se nevešli)