

Kategorie mladší

Úloha 1A Luštěniny

Hynek ví, že všechny nápisy jsou špatně. Nápis, který patří k pytlíku s mixem hrášku a čočky tak určitě nemohl být na tomto pytlíku, musel tak být na pytlíku, který obsahoval pouze čočku, nebo pouze hrášek. Kdyby tedy Hynek vytáhl jednu kuličku z tohoto pytlíku, dokázal by s jistotou určit, co s v tomto pytlíku nachází. Předpokládejme, že si vytáhl např. čočku, pro hrášek by to fungovalo stejně, jen by se musely hrášek a čočka vyměnit.

Dále můžeme opět vycházet z toho, že všechny nápisy jsou špatně. Hynek už ví, že pytlík s čočkou obsahuje nápis „mix hrášku a čočky“. Kdyby se ale na pytlíku s mixem hrášku a čočky nacházel nápis „čočka“ znamenalo by to, že jsou pouze tyto dva nápisy prohozené a třetí by tak musel být správně. Ví ale, že prohozené jsou všechny tři nápisy. Z toho si tedy Hynek může odvodit, že na pytlíku s mixem hrášku a čočky musí být nápis „hrášek“ a na pytlíku s hráškem nápis „čočka“.

Takovýmto postupem tedy dokáže Hynek přiřadit správně nápisy po vytažení jediné kuličky.

Dodejme ještě, že pokud by Hynek vytáhl jednu kuličku z jiného pytlíku, než je ten s nápisem „mix hrášku a čočky“, nemuselo by to vždy stačit k přiřazení všech nápisů. Pokud by vytáhl jednu kuličku z pytlíku s nápisem „hrášek“ a vytáhl by hrášek, pak by věděl, že se v tomto pytlíku nachází mix hrášku a čočky, protože samotný hrášek se tam nacházet nemůže, protože nápis je jistě špatný. Poté by mohl přiřadit správně i zbylé nápisy. Pokud by ale ze sáčku s nápisem „hrášek“ vytáhl čočku, nemůže vědět, jestli se v tomto pytlíku skutečně nachází čočka, nebo mix čočky a hrášku. Jediné co ví je, že v něm není samotný hrášek, ale to není žádná nová informace, to už ví kvůli tomu, že se na tomto pytlíku nachází nápis „hrášek“, který je chybný.

Úloha 2A Tajemné číslo

Pokud umíme rovnice:

Základem je si uvědomit, co všechno kočička Karla ví:

Číslo je třímístné, tak si ho označíme jako číslo xyz.

$$x + y + z = 12$$

$$x = z + 2$$

Žádná číslice není kladným násobkem čísla 2, takže se v čísle nesmí objevit číslovka 2, 4, 6 a 8.

Takže pracujeme s číslicemi 0, 1, 3, 5, 7 a 9. Ovšem číslice 0 nemůže být ani na poslední (pokud k nule přičteme 2, tak poslední číslice vyjde 2, takže by číslo obsahovalo násobek čísla 2) ani na první pozici (pokud by byla, tak na poslední pozici bude -2 , což není v tomto případě možné).

Takže dvojice hned po sobě jdoucích lichých čísel musí být na první a poslední pozici. Zároveň součet všech číslic musí být 12, takže rozhodně nemůžeme použít dvojici 7 a 9, jelikož jejich součet je 16, což je více než 12.

Lze teď použít vylučovací metodu, jelikož si můžeme vyjádřit, že $y = 12 - x - z$:

$$1 + 3 = 4 \rightarrow 12 - 4 = 8$$

$$3 + 5 = 8 \rightarrow 12 - 8 = 4$$

$$5 + 7 = 12 \rightarrow 12 - 12 = 0$$

V prvním případě součet číslic vyjde 4 a pokud toto číslo odečteme od 12, tak zjistíme, že by prostřední číslo muselo být číslice 8, ovšem to nelze, jelikož je dělitelné 2.

V druhém případě zjistíme, že je velmi podobný s prvním, takže to také nelze.

Ve třetím případě nám součet vyjde rovnou 12, takže by druhá číslice musela být 0, což nám není ničím omezeno. Číslice nula není násobkem čísla 2.

Teď se musíme zaměřit na to, že první číslice je o 2 větší než poslední, takže číslo 7 musí být první číslice a číslo 5 poslední.

Takže kočička Karla musí odpovědět, že číslo, na které myšák Míša myslí, je 705.

Pokud neumíme rovnice:

Můžeme na to zkusit jít chytrou úvahou. Budeme postupně doplňovat číslo (_ _).

Víme, že součet číslic je roven 12, tedy je sudý, ale nesmíme použít kladné násobky čísla 2, takže v naší trojici číslic sčítáme číslice liché s nulami.

Abychom dostali sudý výsledek, musí být počet lichých číslic sudý. Tedy 0 lichých číslic (ale to by nám zbylo jen použít tři nuly (0 0 0), kde číslice dávají v součtu nulu, nebo mohou být liché číslice dvě. Z toho plyne, že přesně jedna z číslic bude 0.



Zároveň víme, že první číslice je o dva větší, než poslední. Kdyby ale poslední číslice byla rovna nule, první by byla 2 – a to je kladný násobek čísla 2. Díky tomu víme, že 0 bude uprostřed ($_0_$).

První a poslední číslice tedy budou liché, dávají součet 12 a první je o dva větší, než poslední. Kdyby první číslice nebyla o dvě větší, ale byla stejná, jako poslední, dávaly by dohromady součet 10. A teď mi hrabe hlavou, jak to funguje.

A teď už je to jednoduché. 10 je součtem dvou stejných čísel, takže můžeme 10 vydělit 2 a získáme poslední číslici – 5 ($_0\ 5$). První je o dva větší, takže jde o 7.

Kdyby nás poslední krok nenapadl, mohli bychom prostě jen ozkoušet všechny možné dvojice lichých čísel na začátku a na konci tak, aby první byla o dva větší, dokud by nám nevyšel součet 12. ($3 + 1 = 4$, $5 + 3 = 8$, $7 + 5 = 12$)

Takže kočička Karla musí odpovědět, že číslo, na které myšák Míša myslí, je 705.

Úloha 3A Hra

Pokud je na začátku hry na tabuli číslo 2, je jasné, že vyhraje první hráč a hra bude trvat pouze jeden tah.

Pokud je na začátku hry na tabuli číslo 3, tak první hráč ho musí smazat a místo něj napsat čísla 1 a 2. Jedničku můžeme ignorovat, protože nám už nijak nezmění výsledek. Naopak o dvojce už víme, že pokud je na tabuli pouze dvojka, vyhraje první hráč. Tudíž když je na tabuli na začátku trojka, vyhraje hráč druhý (a to za 2 tahy).

Pokud je na začátku na tabuli číslo 4, tak první hráč už má dvě možnosti: místo čtyřky může napsat dvě dvojky, nebo trojku a jedničku. Pokud zvolí první variantu, tak určitě prohraje (viz první odstavec), zvolí tedy variantu druhou, se kterou má jistou výhru (viz druhý odstavec).

Podobně můžeme postupovat dál a vytvořit si tabulku, kterou budeme postupně vyplňovat:

číslo na začátku	kdo vyhraje	nejlepší tahy
2	první hráč	$2 \rightarrow 1, 1$
3	druhý hráč	
4	první hráč	$4 \rightarrow 3, 1$
5	první hráč	$5 \rightarrow 3, 2$

Pokud je na začátku číslo 5, tak první hráč ho může přepsat na 4 a 1 nebo 3 a 2. V prvním případě prohraje, protože protihráči předá „výherní“ čtyřku (víme, že se čtyřkou vyhraje první hráč, který ji dostane). V druhém případě však vyhraje, protože protihráči předá „prohrávající“ 3. Všimněme si, že protihráč prohraje i přesto, že dostal „výherní“ 2, protože trojka je větší a trvá a kolo déle, než se rozloží na samé jedničky ($3 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 1, 1, 1$ a $2 \rightarrow 1, 1$).

Velmi podobně je to s číslem 6, kde vyhraje první hráč s tahem $6 \rightarrow 3, 3$

Podobnými strategiemi, jako jsme si právě ukázali, lze vyplnit zbytek tabulky až do 20:

číslo na začátku	kdo vyhraje	nejlepší tahy
	$\vdots$	
6	první hráč	$6 \rightarrow 3, 3$
7	druhý hráč	
8	první hráč	$8 \rightarrow 7, 1$
9	první hráč	$9 \rightarrow 7, 2$
10	první hráč	$10 \rightarrow 7, 3$
11	první hráč	$11 \rightarrow 7, 4$
12	první hráč	$12 \rightarrow 7, 5$
13	první hráč	$13 \rightarrow 7, 6$
14	první hráč	$14 \rightarrow 7, 7$
15	druhý hráč	
16	první hráč	$16 \rightarrow 15, 1$
17	první hráč	$17 \rightarrow 15, 2$
18	první hráč	$18 \rightarrow 15, 3$
19	první hráč	$19 \rightarrow 15, 4$
20	první hráč	$20 \rightarrow 15, 5$

Při pohledu na tabulku pak jde vidět, že druhý hráč vyhraje když číslo je o jedna menší, než některá mocnina dvojky, tedy číslo ve tvaru $2^n - 1$ pro každé přirozené n (např. 1, 3, 7, 15, 31, 63, atd.). Dodejme ještě, že jednoduchá výherní strategie je rozložit aktuální nejvyšší číslo na součet nejbližšího proherního čísla a některého menšího čísla.



Úloha 4A Koničky

Co všechno víme:

Zvířátek je pět: žabka Žofka, klokanice Karolína, jelen Jindra, gepard Gustav, buvol Bořek

Sporty jsou čtyři: florbal, lakros, curling, volejbal

Oblíbených her je také 4: mariáš, člověče nezlob se, šachy, prší

A v ulici je 5 domů vedle sebe.

Dále z textu vyčteme následující informace:

- Klokanice Karolína bydlí úplně vpravo.
- Žabka Žofka bydlí vedle klokanice Karolíny.
- Jelen Jindra bydlí úplně vlevo.
- Šachy hraje jelen Jindra, gepard Gustav nebo klokanice Karolína.
- Jelen Jindra a gepard Gustav jsou sousedi.
- Gepard Gustav nehraje lakros.
- Klokanice Karolína nehraje prší.
- Buvol Bořek hraje mariáš nebo člověče nezlob se.
- Gepard Gustav hraje mariáš nebo člověče nezlob se.
- Mariáš hraje buvol Bořek nebo gepard Gustav.
- Člověče nezlob se hraje buvol Bořek nebo gepard Gustav.
- Soused žabky Žofky hraje mariáš.
- Zvířátko, které hraje prší, hraje curling.
- Zvířátko, které bydlí nalevo od žabky Žofky, hraje volejbal.

Následně všechno dáme do tabulky. Domy jsou číslovány zleva.

	florbal	lakros	curling	volejbal	mariáš	Člověče nezlob se	šachy	prší	1.	2.	3.	4.	5.
klokanice Karolína		✓					✓						✓
jelen Jindra			✓					✓	✓				
gepard Gustav	✓					✓				✓			
buvol Bořek				✓	✓						✓		
žabka Žofka	–	–	–	–	–	–	–	–				✓	

Postup:

1. V domě úplně vlevo bydlí Jelen, vedle něj gepard.
2. V domě úplně vpravo bydlí klokanice, vedle ní žabka.
3. Buvol bydlí v domě uprostřed.
4. Mariáš hraje buvol, jelikož je sousedem žabky a bavil se o něm s gepardem.
5. Gepard hraje Člověče nezlob se, protože s buvolem se bavil o mariáši a Člověče nezlob se a buvol hraje mariáš. Mariáš nemůže hrát, neboť není sousedem žabky.
6. Prší hraje jelen, jelikož klokanice prší nehraje.
7. Klokanice hraje šachy.
8. Buvol hraje volejbal, protože bydlí nalevo od žabky.
9. Jelen hraje curling, jelikož jeho oblíbená společenská hra je prší.
10. Gepard hraje florbal, neboť říkal, že lakros nehraje.
11. Klokanice hraje lakros.

=> Klokanice Karolína hraje lakros.

=> Žabka Žofka si má zahrát prší s jelenem Jindrou.

Kategorie starší

Úloha 1B Vážení na váze

Nejdříve budeme potřebovat 1 g závaží, ale kupovat dvě stejné závaží už nemá smysl. Výhodnější je si koupit 2 g závaží. S těmito dvěma závaží (1 g a 2 g) už jsme schopni dát dohromady i 3 g. Kupovat si 3 g závaží teď taky nedává smysl, protože ho jsme schopni poskládat. Takže další závaží bude 4 g, protože to nejsme schopni poskládat aniž by se některá závaží opakovala.

Takže, když takhle budeme pokračovat můžeme vytvořit následující tabulku:

součet závaží	zvážitelná váha		hmotnost závaží
	0 →	0 + 1 =	1
1 =	1 →	1 + 1 =	2
1 + 2 =	3 →	3 + 1 =	4
1 + 2 + 4 =	7 →	7 + 1 =	8
1 + 2 + 4 + 8 =	15 →	15 + 1 =	16
1 + 2 + 4 + 8 + 16 =	31 →	31 + 1 =	32
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 =	63 →	63 + 1 =	64
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 =	127 →	127 + 1 =	128
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 =	255 →	255 + 1 =	256
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 =	511 →	511 + 1 =	512
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 =	1023		

Takže Vážka Věrka bude potřebovat **10 závaží** o váhách **1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512**.

Úloha 2B Vitráže

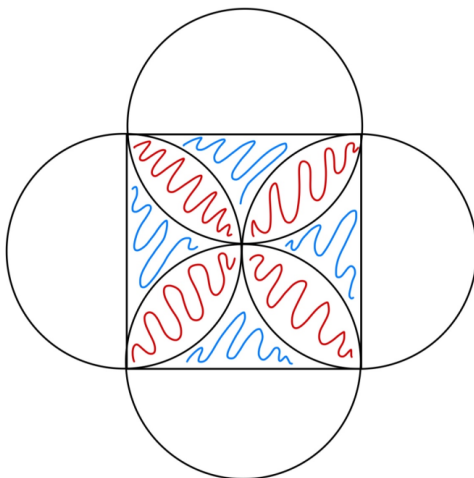
Začnu druhou vitráží. Jako první si představím celé kruhy, které vytvářejí červená "oka".

Vypočítám si obsah čtverce: $S_{\text{čtverce}} = a^2 = 100 \text{ cm}^2$

Vypočítám si obsah všech 4 půlkruhů, které zasahují do čtverce: $S_{\text{půlkruhu}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 5^2 = 157 \text{ cm}^2$

Obsah půlkruhů je větší z důvodu, že na některých místech se 2 kruhy překrývají (červená oka). Modré části naopak zasahují vždy pouze do jednoho půlkruhu. Když odečtu obsah čtverce od obsahu půlkruhů, získám tedy obsah červených ok: $S = S_{\text{půlkruhu}} - S_{\text{čtverce}} = 157 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2 = 57 \text{ cm}^2$

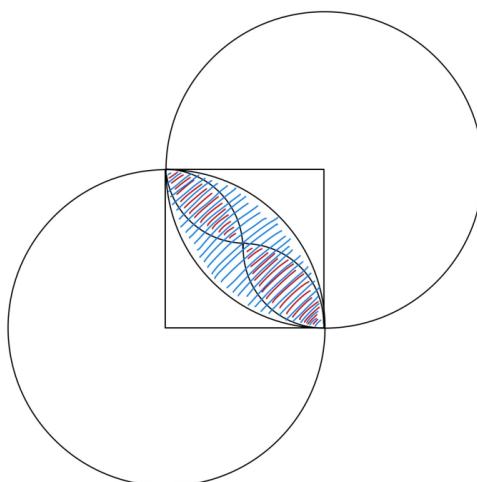
Obsah všech ok je výsledek, který hledám, já si ale pro další výpočty vypočítám i obsah jednoho oka: $S_{\text{oka}} = \frac{S}{4} = \frac{57 \text{ cm}^2}{4} = 14,25 \text{ cm}^2$



U první vitráže začnu tím, že si představím oba dva kruhy, které vytvářejí velké modré oko. Podobně jako u druhé vitráže si vypočítám obsah obou dvou čtvrtkruhů, které do čtverce zasahují: $S_{\text{čtvrtkruhu}} = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi r^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 10^2 = 157 \text{ cm}^2$

Odečtením obsahu čtverce získám obsah modrého oka (oblasti, kde se obě čtvrtkruhy překrývají): $S_{\text{modra}} = S_{\text{čtvrtkruhu}} - S_{\text{čtverce}} = 157 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2 = 57 \text{ cm}^2$

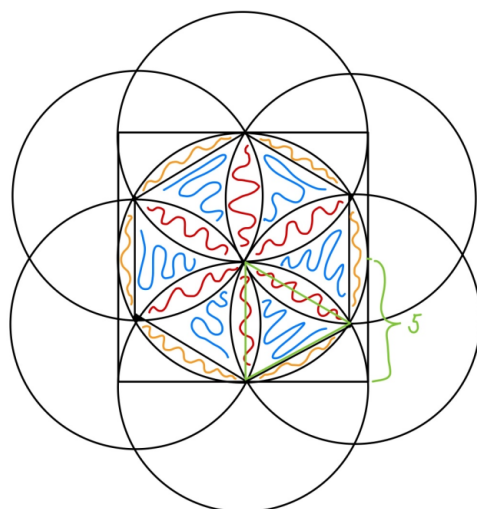
Od obsahu modrého oka odečtu obsah dvou červených ok, jejichž obsah znám z dřívějších výpočtů a mám výsledek: $S = S_{\text{modra}} - 2S_{\text{oka}} = 57 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 14,25 \text{ cm}^2 = 28,5 \text{ cm}^2$



Třetí vitráž si rozdělím na dva výpočty. Zaprvé zjistím obsah oranžových částí. Ten vypočítám odečtením obsahu šestiúhelníku od obsahu kruhu. Délku strany šestiúhelníku si odvodím pomocí zeleného trojúhelníku. Strana trojúhelníku, která se dotýká čtverce vede do středu vitráže, musí být tedy dlouhá 5 cm. Dále vím, že pravidelný šestiúhelník se skládá ze 6 rovnostranných trojúhelníků. Strana šestiúhelníku je tedy dlouhá 5 cm.

Odečtu obsah šestiúhelníku od obsahu velkého kruhu a mám obsah oranžových částí: $S_{\text{oranžova}} = \pi r^2 - \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = 3,14 \cdot 5^2 - \frac{3}{2} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3} = 13,55 \text{ cm}^2$

Zadruhé vypočítám obsah červených ok. Znovu si představím všech 6 celých kruhů, které oka vytvářejí. Tyto kruhy mají své středy ve vrcholech šestiúhelníku. Díky tomu vím, že do šestiúhelníku zasahuje vždy třetina kruhu (vnitřní úhel pravidelného šestiúhelníku je 120°). Podobně jako u ostatních vitráží si vypočítám obsah všech třetin kruhů, které do šestiúhelníku zasahují: $S_{\text{tretinkruhu}} = 6 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^2 = 157 \text{ cm}^2$



V modrých částech se překrývají dva kruhy, v červených pak tři kruhy. Obsah červených ok tedy získám odečtením dvojnásobku obsahu šestiúhelníků od obsahu třetin kruhů: $S_{\text{cervena}} = S_{\text{tretinkruhu}} - 2S_{\text{šestiuhelniku}} = S_{\text{tretinkruhu}} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 5^2 \sqrt{3} = 157 \text{ cm}^2 - 129,9 \text{ cm}^2 = 27,1 \text{ cm}^2$
Nakonec sečtu obsah červených ok a oranžových částí a mám poslední výsledek: $S = S_{\text{oranžova}} + S_{\text{cervena}} = 27,1 \text{ cm}^2 + 13,55 \text{ cm}^2 = 40,65 \text{ cm}^2$

Úloha 3B Rozbitý výtah

Na začátku řešení problému mám dvě tlačítka, jedno pro jízdu nahoru a druhé pro jízdu dolů. V průběhu řešení budu seskupovat jednotlivá stisknutí do bloků, kde každý blok bude mít novou hodnotu posunu. Např. v prvním úkolu po seskupení jízdy o 11 pater nahoru a 7 dolů budu mít blok s hodnotou +4 (nahoru) tvořený jedním stisknutím tlačítka nahoru a jedním stisknutím tlačítka dolů.

Abychom si v průběhu řešení rozuměli, tak je potřeba vysvětlit značení:

- $\uparrow$ - tlačítko pro jízdu nahoru
- $\downarrow$ - tlačítko pro jízdu dolů
- $1 \uparrow$ - posunutí o 1 patro nahoru

- $1 \downarrow$ - posunutí o 1 patro dolů

První část úlohy

Cílem je dostat se z přízemí do prvního patra pomocí tlačítek $11 \uparrow$ a $7 \downarrow$. Budu postupně vytvářet nové bloky, dokud nezískám blok s hodnotou $1 \uparrow$. Jakmile ho získám, použiji ho v přízemí k dosažení prvního patra. Vytvořím si tedy nový blok složením obou tlačítek:

$$4 \uparrow = 11 \uparrow + 7 \downarrow = 1 \uparrow + 1 \downarrow$$

To je menší posun, než jsem do teď měl možnost použít. Když budu takto zmenšovat posun dále, tak se dostanu až na hodnotu $+1$. Budu tedy pokračovat a vytvořím nový blok:

$$3 \downarrow = 7 \downarrow + 4 \uparrow = 1 \uparrow + 2 \downarrow$$

Udělám další blok opět ze dvou nejmenších posunů, které mám k dispozici:

$$1 \uparrow = 4 \uparrow + 3 \downarrow = 2 \uparrow + 3 \downarrow$$

Získal jsem tedy blok s hodnotou $1 \uparrow$, který mohu použít v přízemí k dosažení prvního patra. Jak je vidět, musím stisknout dvakrát tlačítko pro jízdu nahoru a třikrát tlačítko pro jízdu dolů. Ověřit to mohu následovně: $11 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 1$.

Druhá část úlohy

V druhé části úlohy je cílem dostat se z přízemí do prvního patra pomocí tlačítek $563 \uparrow$ a $271 \downarrow$. Budu postupovat velice podobně, jako minule. U vytváření prvního bloku se ale zastavím a všimnu si, že po jízdě nahoru o 563 pater mohu sjet dolů dvakrát o 271 pater. Získám tak blok, který směřuje nahoru a to s nejmenším možným posunem, který jsem momentálně schopný vytvořit. Nový blok bude tedy vypadat:

$$21 \uparrow = 563 \uparrow + 2 \cdot 271 \downarrow = 1 \uparrow + 2 \downarrow$$

U dalších bloků budu postupovat obdobně, akorát vždy menší směr použiji co nejvícekrát, abych získal co nejmenší posun (ale stále směr většího posunu):

$$19 \downarrow = 271 \downarrow + 12 \cdot 21 \uparrow = (1 \downarrow) + 12 \cdot (1 \uparrow + 2 \downarrow) = 12 \uparrow + 25 \downarrow$$

$$2 \uparrow = 21 \uparrow + 19 \downarrow = (1 \uparrow + 2 \downarrow) + (12 \uparrow + 25 \downarrow) = 13 \uparrow + 27 \downarrow$$

$$1 \downarrow = 19 \downarrow + 9 \cdot 2 \uparrow = (12 \uparrow + 25 \downarrow) + 9 \cdot (13 \uparrow + 27 \downarrow) = 129 \uparrow + 268 \downarrow$$

Získali jsme tedy blok s posunem 1, ale směrem dolů. To ale nevadí, protože stačí vyjet o libovolný počet pater nahoru a pak stačí sjet několikrát dolů o jedno patro. V tomto případě vyjedu nahoru o 2 patra (takový blok mám) a sjeďu dolů o 1 patro. Bude to tedy vypadat takto:

$$1 \uparrow = 2 \uparrow + 1 \downarrow = (13 \uparrow + 27 \downarrow) + (129 \uparrow + 268 \downarrow) = 142 \uparrow + 295 \downarrow$$

Jak je vidět, tak k dosažení prvního patra musím stisknout tlačítko pro jízdu nahoru 142 krát a tlačítko pro jízdu dolů 295 krát.

Obecný případ

Algoritmus, který byl výše popsán je Rozšířený Euklidův algoritmus. Tento algoritmus nám řekne největšího společného dělitele dvojice čísel a zároveň nám poví, kolikanásobek prvního čísla máme sečíst s kolikanásobkem druhého čísla, abychom získali největšího společného dělitele. To znamená, že pro čísla 6 a 16 nám algoritmus řekne, že jejich největší společný dělitel je 2 a že $6 \cdot 3 - 16 \cdot 1 = 2$. Jelikož naše výchozí čísla jsou m a n , která jsou nesoudělná (jsou to prvočísla), tak jejich největší společný dělitel je 1. Tedy existují taková čísla a a b , že $m \cdot a + n \cdot b = 1$. A právě tento algoritmus nám tato čísla a a b najde.

V každém kole si vezmu 2 bloky s nejmenším posunem. Budou to vždy poslední dva bloky, které jsem vytvořil. Z toho bude jeden kladný a druhý záporný, tedy oba budou mít opačný směr. Označím si je A , B , N , kde A je blok s větším posunem, B je blok s menším posunem a N je nový blok, který vytvořím. Způsobem, který popíšu níže, vytvořím nový blok N tak, aby platilo:

- $|N|$ je menší než $|B|$ (a tedy i než $|A|$)¹
- N má stejný směr jako A , tedy opačný než B

V příštím kole bude ve tvůrčí dvojici blok B a N a zjevně budou mít opět opačný směr.

Nyní mohu vytvořit nový blok a to tak, že od většího bloku A odečtu tolikrát blok B , kolik se vejde do A . Zjevně bude platit, že směr nového bloku N bude stejný jako A . Nový blok bude mít menší posun než blok B , protože jinak bych mohl blok B odečíst ještě jednou. Protože vstupní čísla jsou nesoudělná, v žádném kroku se nestane, že by nový blok měl posun 0, tedy že by se jeden z bloků vešel do

¹ $|x|$ značí absolutní hodnotu z x , tedy pokud x je záporné tak $|x| = -x$ a pokud x je kladné, tak $|x| = x$.

druhého přesně. Tedy $|N|$ bude vždy větší nebo roven 1 a menší než $|B|$. Jelikož se každým krokem zmenšuje absolutní hodnota bloku, tak nakonec musím získat blok s absolutní hodnotou 1.

Pokud je blok se zápornou hodnotou, tedy víme jen, jak se dostat o jedno patro dolů, tak stačí vyjet o libovolný počet pater nahoru a pak sjíždět dolů po jednom patře. Nakonec tedy získáme blok s hodnotou $+1$. Pak už jen stačí dopočítat, kolik kterých stisknutí každý blok obsahuje.

Úloha 4B Šimonův jahodový stánek

Nejdříve si v závislosti na jednotlivých dobrotách spočítáme, kolik litrů či kilogramů které suroviny ze zásob budeme potřebovat.

- Pro smetanu: potřebujeme 3 l za každou zmrzlinu a jeden litr za každý řez
(chceme použít 24 l)
- Pro mouku: potřebujeme 2 kg za každý řez a 3 kg za každý koláč
(chceme použít 24 kg)
- Pro jahody: potřebujeme 1 kg za každou zmrzlinu, 2 kg za každý řez a 2 kg kilogramy za každý koláč
(chceme použít 25 kg)

Ideální počet dobrot můžeme zjistit vícero cestami. Pokud **neznáme rovnice**, nabízí se malá úvaha – kilogramů jahod je lichý počet, nicméně řezy i koláče vyžadují počet sudý. Počet zmrzlin co Šimon vyrobí tedy musí být lichý – tedy 1, 3, 5, ...

Zároveň víme, že máme 24 l smetany. Jedna zmrzlina vyžaduje na výrobu 3 l, takže více, než 8 zmrzlin nevyrobíme. Číslo 8 je však sudé, více než 7 zmrzlin vyrobit nemůžeme. Pokud má Šimon využít všechny zásoby, počet zmrzlin musí být určité 1, 3, 5 nebo 7. Použijeme, co víme o mouce, abychom si výběr zúžili:

- Pokud bude zmrzlina jen jedna, zbude nám 21 l smetany na řezy. Na 21 řezů nicméně nemáme dost mouky ($2 \cdot 21 = 42$ kg). To samé platí, pokud budou zmrzliny 3 – zbude nám smetana na 15 řezů a $2 \cdot 15 = 30$ kg mouky je stále více, než Šimonovi zbylo.
- Zbývají tedy dvě možnosti, při nichž plně využijeme 24 l smetany:
 - a) 5 zmrzlin a 9 řezů
 - b) 7 zmrzlin a 3 řezy

Pojďme si je dále rozebrat s tím, co víme o jahodách:

- a) V případě, kdy vyrobíme 5 zmrzlin a upečeme 9 řezů, nám zbude 6 kg mouky, tedy akorát na 2 koláče. Budeme však mít tak akorát jahod? 5 kg z nich použijeme na zmrzliny, 18 kg na řezy a 4 kg na koláče. To je 27 kg jahod, máme však jen 25.
- b) Zbývá nám tedy poslední možnost a skutečně – po upečení 3 řezů nám zbude 18 kg mouky na 6 koláčů. Když si spočítáme použité jahody za zmrzliny, řezy i koláče, vyjde nám $7 + 6 + 12 = 25$ kilogramů jahod.

Šimon tedy může vyrobit **7 zmrzlin, 3 řezy, 6 koláčů** a spotřebuje tím veškeré své zásoby. :)

Známe-li rovnice, existuje ještě jednodušší řešení. Vrátime se k původnímu zápisu:

- Pro smetanu: potřebujeme 3 l za každou zmrzlinu a jeden litr za každý řez
(chceme použít 24 l)
- Pro mouku: potřebujeme 2 kg za každý řez a 3 kg za každý koláč
(chceme použít 24 kg)
- Pro jahody: potřebujeme 1 kg za každou zmrzlinu, 2 kg za každý řez a 2 kg za každý koláč
(chceme použít 25 kg)

Označíme si zmrzlinu jako z , řezy jako $ř$ a koláče jako k . Pak víme, že:

$$3z + 1ř = 24 \text{ (litrů smetany)}$$

$$2 + 3k = 24 \text{ (kilogramů mouky)}$$

$$1z + 2ř + 2k = 25 \text{ (kilogramů jahod)}$$

Z první rovnice si vyjádříme

$$ř = 24 - 3z$$

Z druhé rovnice si vyjádříme

$$3k = 24 - 2ř$$

tedy

$$k = \frac{24 - 2ř}{3}$$

dosadíme za $ř$

$$k = \frac{24 - 2(24 - 3z)}{3} = \frac{24 - (48 - 6z)}{3} = \frac{24 - 48 + 6z}{3} = 8 - 16 + 2z = -8 + 2z$$



A obě dvě proměnné $\check{r}$ a k dosadíme do poslední rovnice:

$$1z + 2\check{r} + 2k = 25$$

$$z + 2(24 - 3z) + 2(-8 + 2z) = 25$$

$$z + 48 - 6z - 16 + 4z = 25$$

$$-z + 32 = 25 \quad | - 32$$

$$-z = -7 \quad | \cdot (-1)$$

$$z = 7$$

Zmrzlin víme, že bude 7, zbývá dopočítat řezy

$$\check{r} = 24 - 3z = 24 - 21 = 3$$

a koláče

$$k = -8 + 2z = -8 + 14 = 6$$

Dostáváme stejný výsledek – Šimon potřebuje vyrobit **7 zmrzlin, 3 řezy a 6 koláčů**.