Kategorie mladší

Úloha 1A „Jabka, hrušky“

Musíme si celý text postupně rozebrat. (jablka - j; hrušky - h; broskve - b; švestky - s)

Zprvu víme, že nás zajímá součet dvou čísel.

První číslo má být podíl součinu a podílu hrušek s jablky. Tedy:

$$\frac{h \cdot j}{\frac{h}{j}}$$

Druhé číslo má být součin součtu broskví s jablky s podílem součtu a rozdílu švestek s hruškami

$$(b+j) \cdot \frac{s+h}{s-h}$$

Tyto dvě čísla se sečtou a poté se od nich má odečíst rozdíl dalších dvou čísel. (Zde se poté liší dvě možná řešení kvůli chybičce v textu, proto uvedu obě možnosti)

První řešení, pro zadání, kde nebyla chyba v textu:

Třetí číslo je součin jiného součinu.

Vnitřní součin se skládá z rozdílu součtu švestek s jablky a podílu švestek s broskvemi a to se násobí součtem hrušek se švestkami.

$$\left[\left(s+j-\frac{s}{b}\right)\right] \cdot (h+s)$$

Vnější součin násobí výsledek vnitřního součinu součtem broskví s jablky.

$$\left[\left[\left(s+j-\frac{s}{b}\right)\right] \cdot (h+s)\right] \cdot (b+j)$$

Čtvrté číslo je rozdíl podílu jablek s broskvemi a součtu broskví s jablky.

$$\frac{j}{b} - (b+j)$$

Třetí a čtvrté číslo od sebe odečteme. Nakonec tento rozdíl odečteme od součtu prvních dvou čísel.

Celá rovnice vypadá takto:

$$\frac{h \cdot j}{\frac{h}{j}} + (b+j) \cdot \frac{s+h}{s-h} - \left(\left[\left[\left(s+j-\frac{s}{b}\right) \cdot (h+s)\right] \cdot (b+j) - \left[\frac{j}{b} - (b+j)\right]\right]\right)$$

Po doplnění čísel:

$$\frac{2 \cdot 5}{\frac{2}{5}} + (4+5) \cdot \frac{3+2}{3-2} - \left(\left[\left[\left(3+5-\frac{3}{4}\right) \cdot (2+3)\right] \cdot (4+5) - \left[\frac{5}{4} - (4+5)\right]\right]\right)$$

$$70 - 334$$

Výsledek vyjde -264.

Druhé řešení, pro zadání, kde byla chyba v textu (chybělo zde "a to se násobí součtem hrušek se švestkami"):

Všechno vlastně vypadá stejně, jenom třetí číslo se vypočítá jinak:

$$\left[\left(s+j-\frac{s}{b}\right)\right] \cdot (b+j)$$

Takže výsledná celá rovnice poté vypadá:

$$\frac{h \cdot j}{\frac{h}{j}} + (b+j) \cdot \frac{s+h}{s-h} - \left[\left(s+j-\frac{s}{b}\right) \cdot (b+j) - \left[\frac{j}{b} - (b+j)\right]\right]$$

Po vyplnění čísel:

$$\frac{2 \cdot 5}{\frac{2}{5}} + (4+5) \cdot \frac{3+2}{3-2} - \left[\left(3+5-\frac{3}{4}\right) \cdot (4+5) - \left[\frac{5}{4} - (4+5)\right]\right]$$

$$70 - 73$$

Takto to vyjde -3.

Úloha 2A Obydlování lesů

Protože skupiny musí být stejné a a všechna zvířátka musí být v nějaké skupině, tak hledáme největší společný dělitel čísel. Nehledáme ale největší společný dělitel počtů zvířátek, protože to by nemuselo vyhovovat jejich požadavkům. Abychom měli jistotu, že požadavkům všech druhů vyhovíme, musíme počet zvířátek jednotlivých druhů vydělit jejich požadovaným číslem. Tak máme jistotu, že ve skupině bude násobek tohoto požadovaného čísla.

- Opičky: 468 / 2 = 234
- Leguáni: 780 / 3 = 260
- Papoušci: 1300 / 5 = 260

Teď najdeme největší společný dělitel těchto čísel, tedy 234 a 260. Najdeme ho pomocí rozkladu na prvočísla a následném vybraní všech společných.

$$234 = \underline{\mathbf{2}} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \underline{\mathbf{13}}$$

$$260 = \underline{\mathbf{2}} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \underline{\mathbf{13}}$$

$$2 \cdot 13 = \underline{\mathbf{26}}$$

Můžeme vytvořit maximálně 26 stejných skupin, které budou vyhovovat všem požadavkům. Ve skupinách pak bude 18 opiček, 30 leguánů a 50 papoušků.

Úloha 3A Výroba učebnic

Chceme co nejvíce zjednodušit výpočet množství křídového a obyčejného papíru, a také počet textů a počet cvičení. Údaje o tom, kolik kopií bude tuší, pastelkami nebo inkoustem nepotřebujeme, a v rámci zjednodušování výpočtu se jich budeme chtít spíše zbavit.

Výsledná tabulka tedy bude ideálně vypadat jako:

	křídový	obyčejný
texty		
cvičení		

Kolik vznikne z jednoho originálu textu kopií na křídovém papíře? Tukanovi vytvoří 3 opisy, každý se přetiskne 3 krát, Pelikánovi vytvoří 5 opisů, každý se přetiskne 5 krát, Ibisové vytvoří 4 opisy, každý se přetiskne 4 krát.

Celkem tedy $3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 50$

Kolik vznikne z jednoho originálu textu kopií na obyčejném papíře? Tukanovi vytvoří 3 opisy, každý se přetiskne 4 krát, Pelikánovi vytvoří 5 opisů, každý se přetiskne 3 krát, Ibisové vytvoří 4 opisy, každý se přetiskne 2 krát.

Celkem tedy $3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 35$

Stejný postup zopakujeme pro cvičení a dostaneme tabulku

	křídový	obyčejný
texty	50	35
cvičení	46	34

Chci-li vědět, kolik mi z n originálů cvičení vznikne kopií na křídovém papíře, stačí vynásobit $46 \cdot n$.

Úloha 4A Výprava do džungle

Z plánovací schůzky pochytil Jiřík následující informace:

1. Pokud pojedou vlakem nebo busem, tak musí použít i kola nebo loď.
2. Pokud pojedou vlakem, tak nepojedou lodí.
3. Pokud nepojedou lodí, tak nepoužijou ani kola.
4. Pokud nepojedou busem, tak pojedou vlakem.

Kdyby jeli vlakem, tak by nemohli jet lodí (2. informace) a tudíž by nemohli použít kola (3. informace), což je ale v rozporu s první informací - tudíž nemůžou jet vlakem.

Ze čtvrté informace víme, že pokud nepojedou busem, tak pojedou vlakem. Protože ale už víme, že vlakem nepojedou, tak musí jet busem.

Z první informace pak vyplývá, že musí jet buď lodí nebo použít kola. Kdyby ale nejeli lodí, tak by nemohli ani použít kola (3. informace), což by bylo ve sporu s první informací - tudíž musí jet i lodí.

Zjistili jsme, že určitě nepojedou vlakem, ale musí jet busem a lodí. Jestli použijou kola už nelze zjistit, protože ať už je použijou, nebo ne, budou vždy platit všechny čtyři informace, které Jiřík z plánovací schůzky pochytil.

Kategorie starší

Úloha 1B Výběh pro hlemýždě

Označme si *'a'* a *'b'* jako strany obdélníku, které tvoří výběh pro hlemýždě.

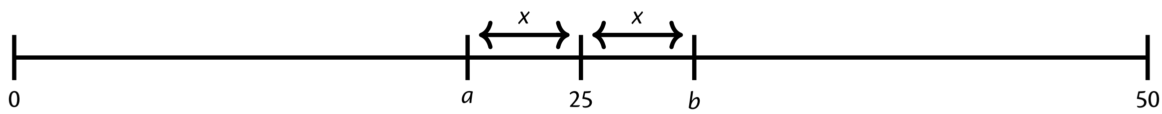
Obvod Horymírova plotu je 100 a počítá se jako $2a + 2b = 100$. Takže $a + b$ (jeho polovina) musí být rovna 50.

Intuice po prozkoušení několika různých velikostí *'a'* a *'b'* co splňují podmínku by nás mohla vést k tomu, že největší bude obsah, když budou obě strany sobě co nejblíže délkou - to znamená blízko 25. Ale co když nám tam šotek někde schoval nějakou velikost, kde obsah bude ještě větší? Šlo by to nějak dokázat?

Zkusme to přes následující trik. Průměr obou stran bude vždy 25, protože

$$\frac{a+b}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

Víme tedy, že *'a'* i *'b'* budou od 25 na číselné ose "stejně daleko".



Tuhle vzdálenost od středu si označíme jako *'x'* a vyjádříme si s ním obě strany obdélníka:

$$a = 25 - x; b = 25 + x$$

Můžeme si to představit tak, že se pokoušíme rovnicí popsat, co se nám s oběma stranami děje, když je měníme o různě velkou vzdálenost od délky, co by nám mohla připadat jako nejlepší – a když jednu stranu zvětšíme, musíme o stejnou délku druhou zmenšit. Můžeme si provést kontrolu, zda opravdu platí, že:

$$2a + 2b = 2 \cdot (25 - x) + 2 \cdot (25 + x) = 100$$

Obsah se počítá jako $S = a \cdot b$, takže

$$S = (25 - x) \cdot (25 + x)$$

Rozepíšeme si obsah dále:

$$S = (25 - x) \cdot (25 + x) = 25^2 + 25x - 25x - x^2 = 25^2 - x^2$$

A $25^2 - x^2$ je vždy menší nebo rovno $25^2 = 625$
(x^2 je krom případu čtverce vždy kladné – obě strany jsou stejné).

Tím jsme vlastně i přišli na další věc - čím menší bude rozdíl mezi *'a'* a *'b'* (rozdíl $d = a - b$ je roven $2x$), tím větší bude obsah výsledného obdélníku. Ve čtverci je tenhle rozdíl nulový (tedy i $x^2 = 0$), takže čtverec je obdélníkem s nejvyšším obsahem pro daný obvod.

Zbývá možná ještě zodpovědět jednu otázku – je čtverec obdélník? Inu, je obdélníkem stejně jako je rajče ovocem. Záleží, jak se to matematikům (či kuchařům a jiným) zrovna hodí. Správně tak může být i úvaha, že největší obsah dosáhneme s

$$a = 24.9999...999 = 24.\overline{9}; b = 25.0000...001 = 25.\overline{0}1$$

Pokud se omezíme jen na celá čísla, dostaneme odpověď

$$a = 24; b = 26$$

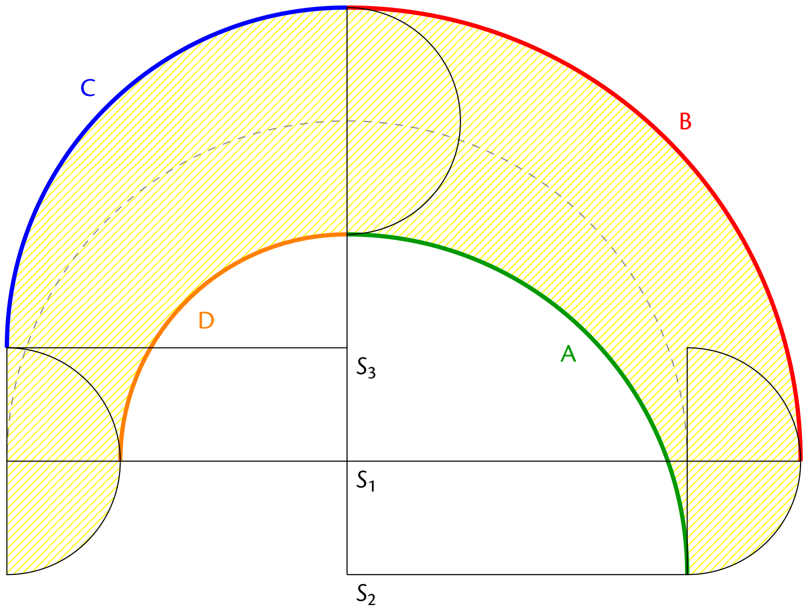
(Samozřejmě lze strany i prohodit)

Úloha 2B V cirkusu

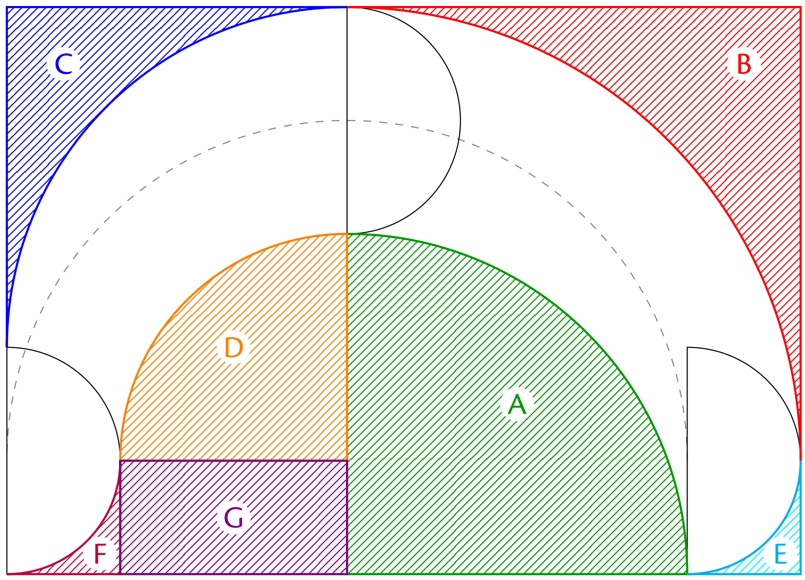
Prvně si rozmyslíme, které čáry ohraničují obrazec, který pultík vykreslí.

V první polovině pohybu pultíku bude spodní roh opisovat vnitřní stranu obrazce (v obrázku strana A) - tedy čtvrt kružnici se středem v S_2 a poloměrem 1.5 m. Půlkružnicová strana pultíku bude opisovat vnější stranu obrazce (v obrázku strana B) tak, že tato strana bude půlkružnice se středem v S_1 a poloměrem 2 m.

V druhé polovině pohybu bude horní roh pultíku opisovat vnější stranu obrazce (v obrázku strana C) - tedy čtvrt kružnici se středem v S_3 a poloměrem 1.5 m. Půlkružnicová strana pultíku bude opisovat tentokrát *vnitřní* stranu obrazce (v obrázku strana D) tak, že tato strana bude půlkružnice se středem v S_1 a poloměrem 1 m.



Nyní můžeme vypočítat obsah. To uděláme tak, že celý obrazec si dáme do obdélníku 3.5 × 2.5 m a pak od něj budeme odečítat obsahy, které v obrazci nejsou.



Obsahy A, D jsou jednoduché čtvrt kružnice:

$$S_A = \frac{\pi r_A^2}{4} = \frac{\pi 1.5^2}{4} = \frac{2.25}{4}\pi$$

$$S_D = \frac{\pi r_D^2}{4} = \frac{\pi 1^2}{4} = \frac{1}{4}\pi$$

Obsah G je jednoduchý obdélník o stranách 1 × 0.5 m:

$$S_G = 1 \cdot 0.5 = \frac{1}{2}$$

Obsahy B, C, E, F jsou všechny čtverec se stranou stejně dlouhou jako čtvrt kružnice, mínus ta čtvrt kružnice, tedy $r^2 - \frac{\pi r^2}{4}$. Navíc obsahy E a F jsou stejné.

$$S_B = r_B^2 - \frac{\pi r_B^2}{4} = 2^2 - \frac{\pi 2^2}{4} = 4 - \frac{4}{4}\pi = 4 - \pi$$

$$S_C = r_C^2 - \frac{\pi r_C^2}{4} = 1.5^2 - \frac{\pi 1.5^2}{4} = 2.25 - \frac{2.25}{4}\pi$$

$$S_E = S_F = r_F^2 - \frac{\pi r_F^2}{4} = 0.5^2 - \frac{\pi 0.5^2}{4} = 0.25 - \frac{0.25}{4}\pi$$

Obsah celého obdélníku je $S_o = 3.5 \cdot 2.5 = 8.75\ \mathrm{m}^2$. Obsah obrazce je tedy obsah tohoto obdélníku, mínus obsah oblastí A až G:

$$\begin{aligned} S &= S_o - S_A - S_B - S_C - S_D - S_E - S_F - S_G = \\ &= 8.75 - \frac{1}{4}\pi - (4 - \pi) - (2.25 - \frac{2.25}{4}\pi) - \frac{2.25}{4}\pi - (0.25 - \frac{0.25}{4}\pi) - (0.25 - \frac{0.25}{4}\pi) - \frac{1}{2} = \\ &= 1.5 + 0.875\pi \approx 4.2489\ \mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Úloha 3B Železniční

Došlo nám několik řešení, ve kterých bylo zadání interpretováno jinak, než jak jsme originálně zamýšleli (časté byly variace, že Linda nesmí v jednom městě zůstat dvakrát, nebo že nesmí zůstat na den v Albertově nebo Ementálu), proto prvně zadání upřesníme, než se vrhneme do jeho řešení. (Jako cvičení si můžete zkusit promyslet, jak by se řešení změnilo kdyby platila jedna z výše uvedených variací.)

Linda začíná svoji výpravu ve městě Albertov. Každý den má dvě možnosti:

1. Strávit tento den ve městě, ve kterém se právě nachází (může i libovolně krát za sebou).
2. Přejet vlakem do sousedního města - z Brneinu může do Albertova nebo do Cepínovic, ale až do Drákulova to za jeden den nestihne.

Linda smí cestovat mezi městy jak se jí za chce, ale poslední den výpravy musí skončit v Ementálu (ale už je jedno, jestli do Ementálu dorazila dříve a několik dní zde zůstala, nebo jestli zrovna přijela ze sousedního Drákulova). Zajímá nás, kolika různými způsoby si Linda může svůj výlet naplánovat (např. pro 7-denní cestu má mimo jiné možnosti AABCBCDE nebo ABCDEEE).

Pro řešení úlohy uděláme malý trik: budeme počítat nejen kolika způsoby se může za n dní dostat do Ementálu, ale i kolika způsoby se může za n dní dostat do ostatních měst. Tyto údaje si budeme psát do tabulky:

Počet dní	0	1	2	3	4	
Albertov	1	1	2	?	?	
Brnein	0	1	2	?	?	
Cepínovice	0	0	1	?	?	. . .
Drákulov	0	0	0	?	?	
Ementál	0	0	0	?	?	

Nyní potřebujeme doplnit čtvrtý sloupec, tedy kolika možnostmi se může dostat do jednotlivých měst po 3 dnech cestování. Za dva dny se může dostat do Albertova 2 způsoby a do Brneinu také 2 způsoby, tudíž za 3 dny se může dostat do Albertova 4 způsoby - má 2 způsoby jak se za dva dny dostat do Albertova a pak může v Albertově třetí den zůstat a má 2 způsoby jak se za dva dny dostat do Brneinu a třetí den pak může přejet z Brneinu do Albertova. Obecně tedy platí, že pokud chceme počet možností, kolika se Linda za n dní může dostat do Albertova, stačí sečíst počty možností, kterými se může za $n - 1$ dní do Albertova nebo Brneinu.

Stejně tak pokud chceme zjistit počet možností, kolika se můžeme dostat do Brneinu za 3 dny, stačí sečíst počty možností, kolika se může dostat do Albertova, Brneinu nebo Cepínovic za 2 dny. Podobně postupujeme i u ostatních měst.

Tabulku pak stačí tímto postupem sloupec po sloupci doplňovat, dokud se nedostaneme na požadovaný počet dní:

Počet dní	0	1	2	3	4	5	6	7
Albertov	1	1	2	4	9	21	51	127
Brnein	0	1	2	5	12	30	76	196
Cepínovice	0	0	1	3	9	25	69	189
Drákulov	0	0	0	1	4	14	44	132
Ementál	0	0	0	0	1	5	19	63

Pro 7 dní je tedy výsledek 63 možností.

Úloha 4B Zahrada

Z informací o Tondově zahradě vyplývají tři rovnice. Délky stran zahrady označím jako a a b, z nichž a bude ta delší, a délku strany domu c. Obvod zahrady, tedy $2a + 2b$, je šestkrát větší než obvod domu, tedy $4a$. Platí proto $2(a + b) = 6 \cdot 4 \cdot c$. Strana domu má velikost rozdílu délek stran zahrady, tedy $c = a - b$. Nakonec ještě druhá mocnina délky strany domu je rovna součtu délek stran zahrady, tedy $a + b = c^2$.

Nyní již stačí vyřešit soustavu rovnic. To jde vyřešit hned několika způsoby. Jedním možným je upravit první rovnici na $a + b = 12 \cdot c$. Protože ze třetí rovnice vyplývá, že $a + b = c^2$, můžu výrazy $12 \cdot c$ a c^2 dát do rovnosti. Zde se nabízí dvě možná řešení, buď $c = 12$, nebo $c = 0$.

Pokud by ale byla velikost domu nulová, byly by nulové i rozměry zahrady, protože by zároveň platilo $a - b = 0$, tedy $a = b$ a $a + b = 0$.

Budu tedy uvažovat pouze situaci, kdy zahrada i dům má nenulovou velikost.

Do druhé a třetí rovnice dosadím 12 za c a dostanu $a - b = 12$ a zároveň $a + b = 144$. Pokud obě rovnice sečtu, mám $2a = 156$, tedy $a = 78$. Po dosazení do libovolné rovnice (například třetí $78 + b = 144$), dostanu $b = 66$.

Již známe všechny rozměry, stačí tedy spočítat obsah zahrady. Ten vypočtu jako obsah obdélníku, $S = a \cdot b$, tedy $S = 66 \cdot 78 = 5148$. Protože ale Tonda nechce započítat obsah svého domu, je potřeba tuto hodnotu odečíst. Od 5148 tedy odečtu $c^2 = 12 \cdot 12 = 144$, obsah Tondovy zahrady bez domu je tedy 5004.