Kategorie mladší

Úloha 1A Tabulka čokolády

Strany obdélníku si pojmenujeme x a y. Počet kousků čokolády v tabulce je pak $S = x \cdot y$. Dál platí, že

1. $x > 2, y > 2, x \cdot y < 100$ a
2. $x \cdot y$ nesmí být dělitelný 2, 3, 4, 5.

Z těchto čtyř podmínek se nám výběr čísel omezil na čísla 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97. Toto všechno jsou čísla, která jsou větší než 2 a zároveň menší než 100. Nejsou dělitelná 2, 3, 4 ani 5. Potřebujeme najít číslo, které lze rozložit na součin dvou celých čísel, která jsou větší než 5 a nejsou dělitelná 2, 3, 4 ani 5. Zároveň musí splňovat podmínku, že obě strany čtverce musí být větší než 2.

Pokud se zvířátek sejde 7, tak čokoláda může mít 49, 77, 91. V případě, že kousků je 49, bude mít každé zvířátko 7 kousků, 77 kousků se rozdělí na 11 kousků pro každého a z 91 kousků bude pro každého kousků 13.

Pokud se zvířátek sejde 11, tak čokoláda bude mít 77 dílků (tedy pro každého 7) a pokud zvířátek bude 13, tak celá čokoláda bude mít 91 kousků a pro každé zvířátko bude opět 7 dílků.

Úloha 2A Špendlíky

V každém roce mají Jarek i Derek stejný počet špendlíků. Přesouvání špendlíků jim zabere stejný čas, v každém roce se jedná o tolik minut, kolik mají špendlíků. V roce, kdy oba vyrábí krabičku, stráví její výrobou více času Jarek, protože vyrábí krabičku s větším počtem přihrádek.

V prvním roce žádný z nich krabičku nevyrábí, oba tedy pouze 1 minutu vkládají špendlík do nové krabičky. I druhý rok oba konají stejné úkony, vyrobí krabičku o velikosti 2, vloží tam svůj nový špendlík a přesunou ten starý. Ve třetím roce ale vyrobí Derek krabičku o velikosti 3, což mu zabere 3 minuty, zatímco Jarek o velikosti 4, což mu zabere 4 minuty. Přendaváním špadlíků stráví oba stejně času, Jarek tedy stráví výrobou krabičky a ukládáním špendlíků více času poprvé ve třetím roce a to o 1 minutu.

Během prvních 6 let strávil Derek výrobami krabiček a přemisťováním špendlíků postupně 1, 4, 6, 8, 10 a 12 minut, tedy celkem 41 minut. Jarek vyráběl krabičku pouze v druhém, třetím a pátém roce, zabralo mu to tedy postupně 1, 4, 7, 1, 13 a 1 minutu, což je celkem 27 minut. K tomuto roku tedy naopak více času výrobou krabičky strávil Derek.

Obecně lze říci, že Jarek ušetří čas v letech, kdy nevyrábí krabičku, ale v letech, kdy ji vyrábí, stráví její výrobou více času než Derek. Jarek vždy vyrábí krabičku rok poté, co ji zaplní. Jeho krabička má na začátku velikost 1 a poté je vždy dvakrát větší. Velikosti jeho krabiček tedy odpovídají mocninám čísla 2. V těchto letech tedy zaplní krabičku a následující rok si bude potřebovat vyrobit novou. Roky, kdy si Jarek potřebuje vyrobit novou krabičku, a díky tomu stráví její výrobou více času než Derek tedy lze zapsat jako $2^n + 1$.

Úloha 3A Morseovka na míru

Nejprve bude vhodné si pěkně uspořádat tabulku s pravděpodobnostmi, viz 1.

pravděpodobnost	typ počasí
40 %	bude hezky
25 %	bude mírně zataženo
10 %	bude vedro
10 %	bude foukat
10 %	bude deštík
5 %	bude bouřka

Tabulka 1: Uspořádané pravděpodobnosti počasí.

Podúloha i)

Musíme vymyslet posloupnost jedniček a nul jen tak, aby každé počasí mělo svoji unikátní kombinaci. Stačit bude tedy třeba kód z tabulky 2:

Podúloha ii)

Teď budeme muset vždy vynásobit pravděpodobnost s délkou slova, to zvládneme hravě, je to zaznamenané v tabulce 3.

Průměrná délka s pravděpodobností tak bude:

$$0{,}4 \cdot 6 + 0{,}25 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}05 \cdot 6 = 6$$

Bez pravděpodobností by vyšla také 6, protože se nám přeci pravděpodobnosti musí nasčítat na 100 % (což je jednička) a každý den je stejně dlouze zapsaný.

pravděpodobnost	typ počasí	kódové slovo
40 %	bude hezky	000001
25 %	bude mírně zataženo	000010
10 %	bude vedro	000100
10 %	bude foukat	001000
10 %	bude deštík	010000
5 %	bude bouřka	100000

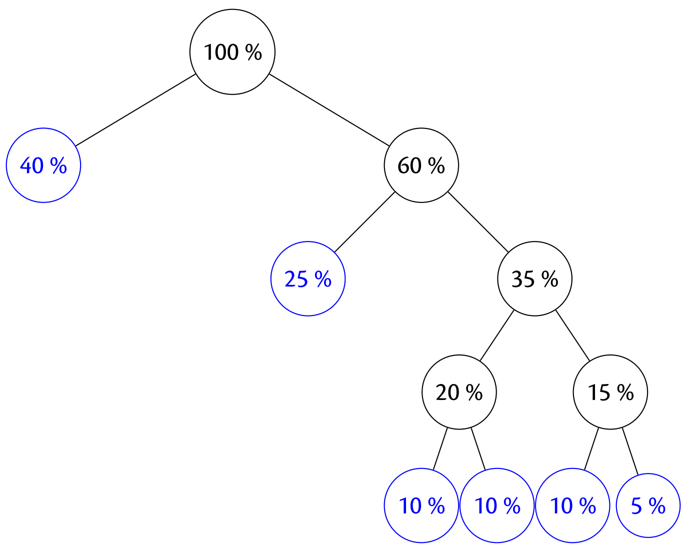
Tabulka 2: Unikátní kód pro každé počasí.

pravděpodobnost	typ počasí	kódové slovo	délka slova
40 %	bude hezky	000001	6
25 %	bude mírně zataženo	000010	6
10 %	bude vedro	000100	6
10 %	bude foukat	001000	6
10 %	bude deštík	010000	6
5 %	bude bouřka	100000	6

Tabulka 3: Pravděpodobnosti délek jednotlivých předpovědí.

Podúloha iii)

Musíme vymyslet, jak mít násobky délky slova a jeho pravděpodobnosti co nejmenší. Tady se nám bude hodit jejich seřazení. Pokud začneme spojovat nejméně pravděpodobné slova dohromady do jednoho většího slova postupně, vznikne nám obrázek 1, kde modře jsou původní slova:



Obrázek 1: Strom jednotlivých počasí dle jejich pravděpodobnosti.

Tenhle trik nám pomůže najít ten úplně průměrně s pravděpodobnostmi nejkratší kód. Tím jak jsme spojovali podle pravděpodobností, tak nám teď stačí jen přiřadit správné délky slov. A protože se nám pravděpodobnosti snižují čím níž v obrázku jsme, tím delší slova jim chceme nechat.

Když si každou úsečku doleva označíme jedničkou a každou úsečku doprava nulou. Dostaneme tabulku kódových slov 4:

Můžeme zkusit překontrolovat naší průměrnou délku s pravděpodobnostmi

$$0{,}4 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}05 \cdot 4 = 2{,}3.$$

A máme výsledek akorát pro Huberta.

Podúloha iv)

Hubert by si mohl schovat do znaku C jedničku nebo nulu tak, aby vždy byl součet jedniček sudý. Pokud tedy dostal kód 00010000 (tedy že bude

pravděpodobnost	typ počasí	kódové slovo	délka slova
40 %	bude hezky	1	1
25 %	bude mírně zataženo	01	2
10 %	bude vedro	0011	4
10 %	bude foukat	0010	4
10 %	bude deštík	0001	4
5 %	bude bouřka	0000	4

Tabulka 4: Zkrácená kódová slova.

deštík a pak bouřka mohl by přidat na konec jedničku (tedy by zpráva vypadala jako 000100001). Součet jedniček by pak byl sudý. Naopak pokud by měl dostat předpověď, že bude dvakrát po sobě vedro (00110011) přidal by na konec nulu a měl by vystaráno. Součet jedniček by byl sudý (001100110). Pokud by se tak při přenosu změnila nějaká nula na jedničku, hned by poznal, že je něco špatně.

Podúloha v)

Pokud použijeme náš kód z první úlohy, tak si stačí uvědomit, že každý den je naše délka slova 6 a tedy dva dny budou vždy dlouhé 12 jedniček a nul. Pokud za každou osmou jednu jedničku nebo nulu přidáme, dostaneme tak 13 jedniček a nul na jeden den. Protože pravděpodobnost, že každý den budeme mít zprávu dlouhou šest znaků je 100 % nemusíme se vůbec pravděpodobností zabývat a víme, že naše hledané číslo je 13.

Kategorie starší

Úloha 1B Únos

Informace, které je potřeba si všimnout na začátku je, že Tamara měla slunce v zádech, zatočila doleva a potom přejela přes most. Protože slunce bylo na západě, původně vezli Tamaru směrem na východ. Po zahnutí doleva ji vezli směrem na sever, most tedy přejeli v tomto směru. Ze čtyř mostů ve městě vedou v tomto směru pouze dva, pouze na jeden z nich ale lze přijet ze západu. Jedná se o most na severovýchodním okraji města. Tuto informaci si lze potvrdit další cestou, která po třech zatáčkách projíždí kolem hodin, jedná se o hodiny na severozápadním okraji města.

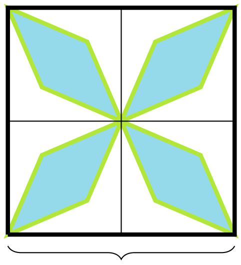
Nyní už Tamara přesně zná svou polohu v daném okamžiku. Odtud si může snadno určit cestu až do konce. Most, o kterém se vzápětí hovoří, se nachází uprostřed města a Tamara ho přejela směrem na východ. Dále se cesta částečně shoduje s cestou popsanou výše, ale před prvním mostem následuje odbočka doprava. Dále vezli Tamaru směrem na jih kolem dalších hodin, které ale neslyšela a cesta skončila na jihovýchodním okraji města (viz obrázek 2).

Nyní zbývá dopátrat, kde cesta začala. Ve zbývajícím úseku cesty se již nenachází žádný orientační bod, proto se Tamara musí orientovat jen podle zatáček. Ty se při zpáteční cestě změní na opačné, od cesty vedoucí k mostu je třeba odbočit doleva, doprava, dvakrát doleva, doprava a nakonec dvakrát doleva. Původní místo, kde věznili Tamaru se tedy nachází na jižní straně města v odlehlé uličce směřující na sever (viz obrázek 2).

Obrázek 2

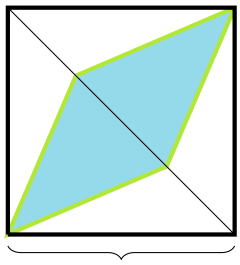
Úloha 2B Fascinující vitrážová okna

Prvně si všimneme, že okno můžeme rozdělit na čtyři stejné čtverce jako na obrázku 3:



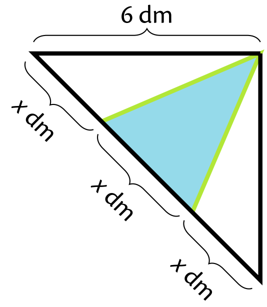
Obrázek 3: Rozdělení obrázku na čtyři stejné čtverce.

Každou z těchto částí můžeme dále rozdělit na dva další trojúhelníky (viz obrázek 4):



Obrázek 4: Rozdělení čverce na dva stejné trojúhelníky.

Nyní nám vznikli tři trojúhelníky – dva bílé, a jeden modrý. Protože je obsah modré části třetina celkového obsahu, musí mít všechny tři tyto trojúhelníky stejný obsah. Trojúhelníky mají všechny stejnou výšku, tudíž musejí mít i stejnou základnu, jak je vidět na obrázku 5.

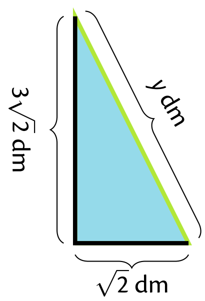


Obrázek 5: Rozdělení trojúhelníku na tři trojúhelníky se stejným obsahem.

Pythagorova věta říká, že

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x &= \sqrt{6^2 + 6^2} \\
3 \cdot x &= \sqrt{36 + 36} \\
3 \cdot x &= \sqrt{2 \cdot 36} \\
3 \cdot x &= 6\sqrt{2} \\
x &= 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Nyní už jen zbývá vypočítat délku zelené úsečky. Přes Pythagorovu větu víme, že výška modrého trojúhelníku je $3\sqrt{2}$. Nyní už můžeme vypočítat délku zelené strany, znovu použitím Pythagorovy věty (tentokrát na trojúhelníku z obrázku 6: Výpočet pak vychází následovně:



Obrázek 6: Polovina modrého trojúhelníku.

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} \\
y &= \sqrt{9 \cdot 2 + 2} \\
y &= \sqrt{20} \\
y &= 2\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Těchto zelených úseček je v okně celkově 16, takže lemování vitráže má celkově délku $16 \cdot 2\sqrt{5}\,\text{dm} = 32\sqrt{5}\,\text{dm}$. $32\sqrt{5}$ dm je přibližně 71,55 dm, takže bude potřeba $\frac{71{,}55\,\text{dm}}{3\,\text{dm}} \doteq 3$ namočení štětce.

Na 24 namočení štětce budou potřeba $\frac{24}{14} \doteq 2$ plechovky barvy.

Úloha 3B Morseovka na míru

Nejprve bude vhodné si pěkně uspořádat tabulku s pravděpodobnostmi, viz 5.

Podúloha i)

Musíme vymyslet posloupnost jedniček a nul jen tak, aby každé počasí mělo svoji unikátní kombinaci. Stačit bude tedy třeba kód z tabulky 6:

pravděpodobnost	typ počasí
40 %	bude hezky
25 %	bude mírně zataženo
10 %	bude vedro
10 %	bude foukat
10 %	bude deštík
5 %	bude bouřka

Tabulka 5: Uspořádané pravděpodobnosti počasí.

pravděpodobnost	typ počasí	kódové slovo
40 %	bude hezky	000001
25 %	bude mírně zataženo	000010
10 %	bude vedro	000100
10 %	bude foukat	001000
10 %	bude deštík	010000
5 %	bude bouřka	100000

Tabulka 6: Unikátní kód pro každé počasí.

Podúloha ii)

Teď budeme muset vždy vynásobit pravděpodobnost s délkou slova, to zvládneme hravě, je to zaznamenané v tabulce 7.

pravděpodobnost	typ počasí	kódové slovo	délka slova
40 %	bude hezky	000001	6
25 %	bude mírně zataženo	000010	6
10 %	bude vedro	000100	6
10 %	bude foukat	001000	6
10 %	bude deštík	010000	6
5 %	bude bouřka	100000	6

Tabulka 7: Pravděpodobnosti délek jednotlivých předpovědí.

Průměrná délka s pravděpodobností tak bude:

$$0{,}4 \cdot 6 + 0{,}25 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}05 \cdot 6 = 6$$

Bez pravděpodobností by vyšla také 6, protože se nám přeci pravděpodobnosti musí nasčítat na $100\,\%$ *(což je jednička) a každý den je stejně dlouze zapsaný.*

Podúloha iii)

Musíme vymyslet, jak mít násobky délky slova a jeho pravděpodobnosti co nejmenší. Tady se nám bude hodit jejich seřazení. Pokud začneme spojovat nejméně pravděpodobné slova dohromady do jednoho většího slova postupně, vznikne nám obrázek 7, kde modře jsou původní slova:

Tenhle trik nám pomůže najít ten úplně průměrně s pravděpodobnostmi nejkratší kód. Tím jak jsme spojovali podle pravděpodobností, tak nám teď stačí jen přiřadit správné délky slov. A protože se nám pravděpodobnosti snižují čím níž v obrázku jsme, tím delší slova jim chceme nechat.

Když si každou úsečku doleva označíme jedničkou a každou úsečku doprava nulou. Dostaneme tabulku kódových slov 8:

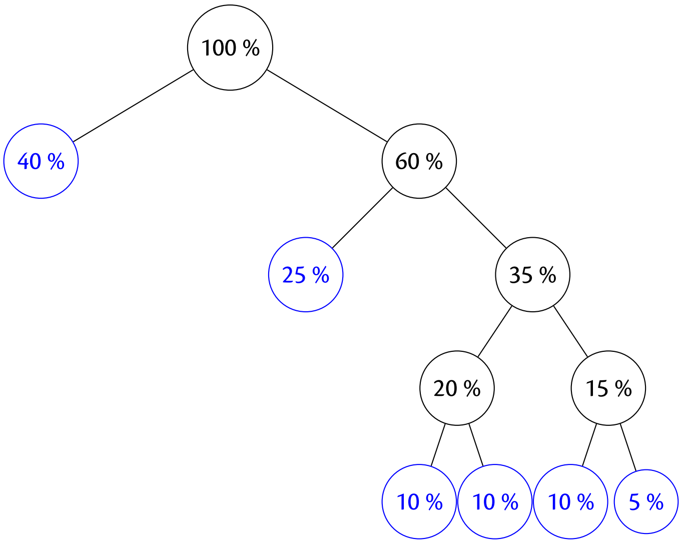
Můžeme zkusit překontrolovat naší průměrnou délku s pravděpodobnostmi

$$0{,}4 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}05 \cdot 4 = 2{,}3.$$

A máme výsledek akorát pro Huberta.

Podúloha iv)

Hubert by si mohl schovat do znaku C jedničku nebo nulu tak, aby vždy byl součet jedniček sudý. Pokud tedy dostal kód 00010000 (tedy že bude deštík a pak bouřka mohl by přidat na konec jedničku (tedy by zpráva vypadala jako 000100001). Součet jedniček by pak byl sudý. Naopak pokud by měl dostat předpověď, že bude dvakrát po sobě vedro (00110011) přidal by na konec nulu a měl by vystaráno. Součet jedniček by byl sudý (001100110). Pokud by se tak při přenosu změnila nějaká nula na jedničku, hned by poznal, že je něco špatně.



Obrázek 7: Strom jednotlivých počasí dle jejich pravděpodobnosti.

pravděpodobnost	typ počasí	kódové slovo	délka slova
40 %	bude hezky	1	1
25 %	bude mírně zataženo	01	2
10 %	bude vedro	0011	4
10 %	bude foukat	0010	4
10 %	bude deštík	0001	4
5 %	bude bouřka	0000	4

Tabulka 8: Zkrácená kódová slova.

Podúloha v)

Pokud použijeme náš kód z první úlohy, tak si stačí uvědomit, že každý den je naše délka slova 6 a tedy dva dny budou vždy dlouhé 12 jedniček a nul. Pokud za každou osmou jednu jedničku nebo nulu přidáme, dostaneme tak 13 jedniček a nul na jeden den. Protože pravděpodobnost, že každý den budeme mít zprávu dlouhou šest znaků je 100 % nemusíme se vůbec pravděpodobností zabývat a víme, že naše hledané číslo je 13.