Kategorie mladší

Úloha 1A Cestování sluneční soustavou

Anežčinu rychlost si dokážeme snadno spočítat, a to vydělením ušlé vzdálenosti časem, za který Anežka atrakci prošla: $15{,}6 : 1{,}5 = 10{,}4 km/h$ Dále víme, že k hvězdě by šla asi 4,22 let, protože její rychlost je podobná rychlosti světla - když si čas převedeme na hodiny ($4{,}22 \cdot 365 \cdot 24 = 36967{,}2$). Vynásobením času její rychlostí zjistíme, kolik by musela ujít kilometrů: $36967{,}2 \cdot 10{,}4 = 384458{,}88$ km.

Model hvězdy *Proxima Centauri* by tedy byl asi 384460 km vzdálený, což je přibližně vzdálenost Měsíce od Země. Model by se tedy nacházel na Měsíci. Anežku by ještě zajímalo, jak dlouho by trvalo projít celou atrakci. To zjistíme vydělením vzdálenosti Slunce od Proximy Centauri s Anežčinou rychlostí chůze: $384458{,}88/10{,}4 = 36967{,}2$h.

Převedením na roky by tak dlouhou trasu Anežka prošla za 4,22 let, což odpovídá tomu, jak dlouho by to trvalo světlu v reálném měřítku.

Úloha 2A Přednášková

Všichni učitelé musí 5 hodin přednášet a jelikož si všichni chtějí poslechnout 9 svých kolegů, musí dalších 4,5 hodiny strávit posloucháním ($9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$). Zbylou půlhodinu už nemohou využít k přednášení, takže budou buď poslouchat nějakého ze svých kolegů celou hodinu, nebo si dají sváču.

Žádný z přednášejících nemůže mít všechny přednášky ve stejný čas jako někdo jiný. Pokud si tedy učebny označíme A - J, můžeme sestrojit takovouto tabulku splňující naše podmínky. Nejdříve tedy k prvnímu sálu napíšeme přednášky na prvních 5 hodin a poté vždy dáme do dalšího sálu o hodinu posunuté přednášky. Tímto způsobem dosáhneme toho, aby všichni přednášející stihli jak své přednášky, tak přednášky kolegů.

blok	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A						G	H	I	J
2	A	B						H	I	J
3	A	B	C						I	J
4	A	B	C	D						J
5	A	B	C	D	E					
6		B	C	D	E	F				
7			C	D	E	F	G			
8				D	E	F	G	H		
9					E	F	G	H	I	
10						F	G	H	I	

Obrázek 1: Tabulka přednášek

Úloha 3A Výstavní vesnice

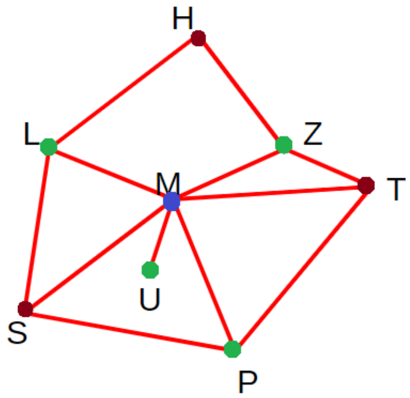
Podúloha i)

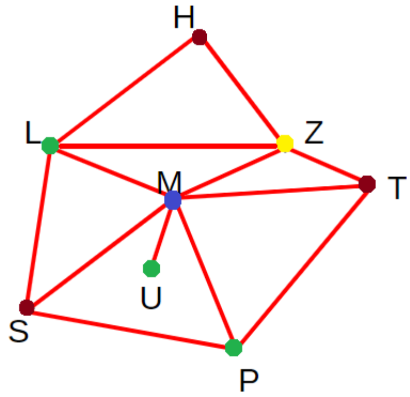
Obarvi Klementovi graf z příkladu tak, abys nepoužil více než čtyři různé barvy. Vždy musí platit, že každé dva spojené vrcholy mají různou barvu. V jakém pořadí je nejlepší vrcholy barvit a proč?

Tiskařský šotek z grafu sebral hranu mezi vrcholy L (Lví vsí) a Z (Zebrovem). Pokažený graf lze obarvit nejen čtyřmi, ale dokonce třemi barvami.

Postup bude následující: První barvou obarvíme M (Mrkvičkov). Potom půjdeme po kruhu a vrcholům Z, T, P, S a L budeme přiřazovat střídavě druhou a třetí barvu. Uš obarvíme druhou nebo třetí barvou a H první nebo třetí barvou.

Pokud ale uvážíme i hranu mezi L a Z, budeme muset vrcholu Z přiřadit čtvrtou barvu.





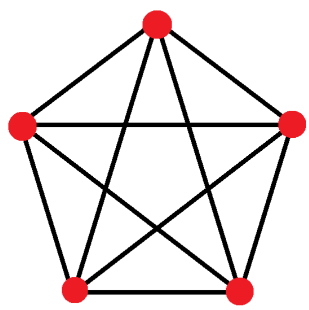
Barvení grafů je natolik složitá disciplína, že se často namísto zaručených postupů používají takzvané heuristiky. To jsou postupy, které sice nedojdou k nejlepšímu možnému řešení vždycky, ale s velkou pravděpodobností dojdou k dostatečně dobrému řešení.

Jednou z nejlepších heuristik pro obarvení grafu je tato: 1) Uspořádat vrcholy podle počtu hran do (zatím neobarvených) vrcholů. 2) Vzít první vrchol a obarvit ho první barvou, kterou obarvit lze. 3) Opakovat kroky 1 a 2, dokud není celý graf obarvený.

Podúloha ii)

Zkus nakreslit graf, který čtyřmi barvami obarvit nepůjde. To znamená, že nebude existovat takové rozvržení barev, aby pro každé dva spojené vrcholy platilo, že mají rozdílnou barvu. Stačí obecný graf, tj. hrany se ti můžou libovolně křížit. Hlavně nezapomeň napsat, proč není obarvení čtyřmi barvami možné.

Pokud spojíme všechny vrcholy grafu se všemi, budeme potřebovat tolik barev, kolik budeme mít vrcholů. Vezmeme si tedy graf o pěti vrcholech, a spojíme každý vrchol s každým.



Podúloha iii)

Klement tvrdí, že graf, kde se hrany kříží, neodpovídá jeho situaci. Může existovat takové rozložení vesnic, aby jejich graf obsahoval křížící se hrany? Nebo lze každý graf vzniklý z mapy překreslit tak, aby se hrany nekřížily? Lze tak překreslit graf vzniklý v podúloze ii)?

Za předpokladu, že z kteréhokoliv místa vesnice lze dojít do kteréhokoliv místa vesnice bez překročení hranice vesnic (Tj. pokud k vesnicím nepatří samoty nebo pozemky, které by byly až někde za hranicemi obce) lze každý graf vzniklý z mapy překreslit tak, aby se hrany nekřížily.

Proč? Za vrchol grafu budeme považovat obecní úřad. Odtud, stejně jako z kteréhokoliv místa vesnice, můžeme dojít k libovolné hranici obce jen po území naší obce. Totéž udělají všechny vesnice, na hranicích vesnic se sejdou a z cest k hranicím vzniknou hrany. Místo, kde se vesnice dotýkají pouze jedním bodem, tedy místo kde se setkávají hranice tří a více vesnic, za hranici nepovažujeme.

Na území naší obce se hrany křížit nemusí, stačí chodit chytře. Vybereme si hranici s první obcí, a dojdeme tam co nejkratší cestou tak, abychom se cestou nedotkli hranice s žádnou jinou obcí. Pak budeme volit hranice obcí popořadě po kruhu, a vždycky půjdeme podél předchozí cesty a pak podél hranic, až dorazíme na určená místa.

Vzniklému grafu se říká rovinný, protože jej lze zakreslit do roviny (na mapu). Rovinné grafy jsou skutečně vždy obarvitelné čtyřmi barvami, ale dokázat to bylo velmi složité. Nakonec se to vědcům podařilo až za pomoci počítače.

Graf vzniklý v podúloze ii) tedy z mapy vzniknout nemohl.

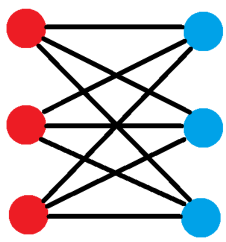
Podúloha iv)

Kozel Kryšpín hned všechno chápe. „No jó, jak je tam křížení, musí počet barev růst. Všechno je to úplně jednoduchý.“ Klement by rád mudrlanta usadil nějakým pěkným příkladem. Poradíš mu, jak by mohl sestrojit graf, který by sice nešel nakreslit bez křížení hran, ale zároveň by byl obarvitelný dvěma barvami?

Rozdělíme si papír na dvě poloviny. Na levou půlku papíru budeme kreslit vrcholy, které obarvíme červeně, na pravou modře. Vrcholy téže barvy nesmíme spojit, takže mezi žádnými dvěma modrými vrcholy nepovede hrana a mezi žádnými dvěma červenými vrcholy nepovede hrana. Za to však z každého červeného vrcholu povede hrana do všech modrých vrcholů.

Teď jen stačí dodat dostatek vrcholů na obě strany. Minimální počet pro splnění zadání jsou tři vrcholy na každé straně, celkem tedy šest vrcholů.

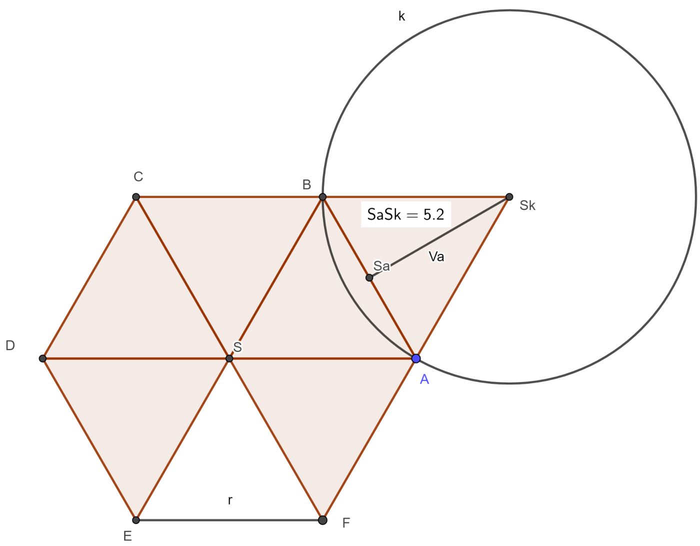
Tomuto druhu grafů (grafy obarvitelné dvěma barvami) se říká bipartitní.



Kategorie starší

Úloha 1B Pavučinové cukroví

Nejdříve si načrtneme, jak bude vypadat výsledné cukroví a jak jeho tvar získáme:



Obrázek 2: Tvar cukroví

Když máme náčrt hotový, zjistíme, že původní šestiúhelník lze rozdělit na 6 rovnostranných trojúhelníků. K nim můžeme ze strany dokreslit ještě jeden trojúhelník, jehož vrchol použijeme jako střed kružnice, jejíž část bude tvořit okraj cukroví. Zároveň strana šestiúhelníku tvoří tětivu kružnice. Platí:

$$\begin{aligned} |S_kA| &= 6\text{cm} \\ |S_aA| &= 3\text{cm} \\ \sphericalangle AS_aS_k &= 90^\circ \end{aligned}$$

Vzdálenost středu kružnice od středu strany šestiúhelníku spočítáme přes Pythagorovu větu. K tomu využijeme $\triangle AS_aS_k$:

$$\begin{aligned} S_aS_k^2 &= AS_k^2 - S_aA^2 \\ v_a^2 &= 6^2 - 3^2 \\ v_a^2 &= 36 - 9 \\ v_a &= \sqrt{27} \doteq 5{,}2\text{cm} \end{aligned}$$

Vzdálenost od středu strany šestiúhelníku ke středu kružnice je $\sqrt{27}$ tedy asi 5,2cm. Poloměr kružnice je 6 cm. Obecně můžeme říci, že poloměr kružnice se rovná straně pravidelného šestiúhelníku a vzdálenost jejího středu od středu strany šestiúhelníku jde vypočítat dosazením délky strany do vztahu:

$$v_a = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

Úloha 2B Zpěvníček

Nejrychlejší zařazení nové písničky bude trvat 1 sekundu a jsou dvě možnosti, jak toho dosáhnout.

Buď bude písnička začínat na takové písmeno, že jí půjde zařadit pouhým zasunutím do poloprázdného obalu ve zpěvníku (obal je obsazený pouze jednou písničkou). To by pravděpodobně znamenalo, že bude hned na začátku nebo hned na konci.

Při druhém způsobu musí být splněn jeden požadavek. Láďa musí mít ve zpěvníku nula nebo jeden poloprázdný obal, takže může přidat písničku pouhým zandáním písničky do nového obalu a založením obalu na příslušné místo. V tomto případě je jedno, zda nová písnička začíná na takové písmeno, aby mohla být zařazena na začátek, či by musela být zařazena kamkoli jinam. Jedinou podmínkou je možnost přidání nového obalu bez přendavání již zařazených písniček.

Při nejpomalejším zařazení je to složitější. Bude velmi záležet na tom, kolik písniček je již zařazených ve zpěvníku. Láďa vždy určitě využije tu nejrychlejší možnost. Proto nám momentálně půjde o ten případ, kdy bude Láďa muset přerovnat co nejvíce písniček, tudíž nová písnička, kterou chce zařadit, bude muset patřit přímo do středu, přičemž budou využity oba poloprázdné obaly a to po jednom na každém konci. Představme si situaci:

_A BC DE GH IJ K_
F

V tomto případě je jedno, zda budeme posouvat písničky vlevo nebo ty vpravo. Tentokrát si vybereme to vpravo. Pro zařazení písničky F musíme posunout písničky G, H, I, J a K. Abychom zařadili písničku F vyndáme písničku G. To nám zabere 2 sekundy (1 s vyndáváme G a 1 s vkládáme F):

_A BC DE FH IJ K_
G

Tentokrát máme ale písničku G, kterou musíme vložit do zpěvníčku, proto budeme tento krok opakovat (1 s vyndáváme H a 1 s vkládáme G). Takto musíme pokračovat, dokud nám nezbude písnička K, kterou již pouze vložíme do poloprázdného obalu k písničce J:

_A BC DE FG HI J_
K

_A BC DE FG HI JK

Vložení písničky do zpěvníčku s 10 písničkami nám tedy trvalo 11 sekund neboli obecně N + 1 sekund. Toto však platí pouze u sudého počtu písniček. Kdybychom měli lichý počet písniček, zákonitě by nám zbýval jeden prázdný obal a vložení nové písničky by nám zabralo pouze 1 s a dostali bychom se k nejrychlejšímu možnému způsobu vložení písničky.

Úloha 3B Výstavní vesnice

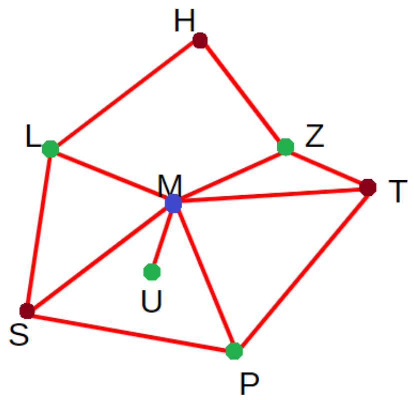
Podúloha i)

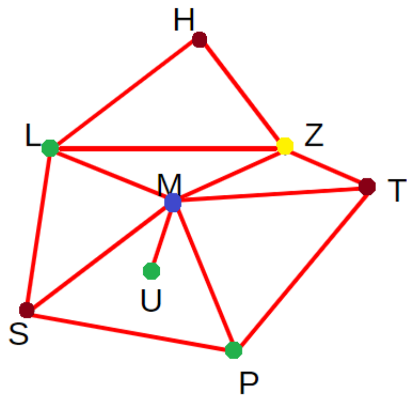
Obarvi Klementovi graf z příkladu tak, abys nepoužil více než čtyři různé barvy. Vždy musí platit, že každé dva spojené vrcholy mají různou barvu. V jakém pořadí je nejlepší vrcholy barvit a proč?

Tiskařský šotek z grafu sebral hranu mezi vrcholy L (Lví vsí) a Z (Zebrovem). Pokažený graf lze obarvit nejen čtyřmi, ale dokonce třemi barvami.

Postup bude následující: První barvou obarvíme M (Mrkvičkov). Potom půjdeme po kruhu a vrcholům Z, T, P, S a L budeme přiřazovat střídavě druhou a třetí barvu. Uš obarvíme druhou nebo třetí barvou a H první nebo třetí barvou.

Pokud ale uvážíme i hranu mezi L a Z, budeme muset vrcholu Z přiřadit čtvrtou barvu.





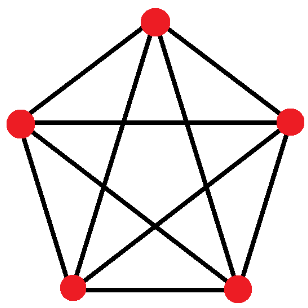
Barvení grafů je natolik složitá disciplína, že se často namísto zaručených postupů používají takzvané heuristiky. To jsou postupy, které sice nedojdou k nejlepšímu možnému řešení vždycky, ale s velkou pravděpodobností dojdou k dostatečně dobrému řešení.

Jednou z nejlepších heuristik pro obarvení grafu je tato: 1) Uspořádat vrcholy podle počtu hran do (zatím neobarvených) vrcholů. 2) Vzít první vrchol a obarvit ho první barvou, kterou obarvit lze. 3) Opakovat kroky 1 a 2, dokud není celý graf obarvený.

Podúloha ii)

Zkus nakreslit graf, který čtyřmi barvami obarvit nepůjde. To znamená, že nebude existovat takové rozvržení barev, aby pro každé dva spojené vrcholy platilo, že mají rozdílnou barvu. Stačí obecný graf, tj. hrany se ti můžou libovolně křížit. Hlavně nezapomeň napsat, proč není obarvení čtyřmi barvami možné.

Pokud spojíme všechny vrcholy grafu se všemi, budeme potřebovat tolik barev, kolik budeme mít vrcholů. Vezmeme si tedy graf o pěti vrcholech, a spojíme každý vrchol s každým.



Podúloha iii)

Klement tvrdí, že graf, kde se hrany kříží, neodpovídá jeho situaci. Může existovat takové rozložení vesnic, aby jejich graf obsahoval křížící se hrany? Nebo lze každý graf vzniklý z mapy překreslit tak, aby se hrany nekřížily? Lze tak překreslit graf vzniklý v podúloze ii)?

Za předpokladu, že z kteréhokoliv místa vesnice lze dojít do kteréhokoliv místa vesnice bez překročení hranice vesnic (Tj. pokud k vesnicím nepatří samoty nebo pozemky, které by byly až někde za hranicemi obce) lze každý graf vzniklý z mapy překreslit tak, aby se hrany nekřížily.

Proč? Za vrchol grafu budeme považovat obecní úřad. Odtud, stejně jako z kteréhokoliv místa vesnice, můžeme dojít k libovolné hranici obce jen po území naší obce. Totéž udělají všechny vesnice, na hranicích vesnic se sejdou a z cest k hranicím vzniknou hrany. Místo, kde se vesnice dotýkají pouze jedním bodem, tedy místo kde se setkávají hranice tří a více vesnic, za hranici nepovažujeme.

Na území naší obce se hrany křížit nemusí, stačí chodit chytře. Vybereme si hranici s první obcí, a dojdeme tam co nejkratší cestou tak, abychom se cestou nedotkli hranice s žádnou jinou obcí. Pak budeme volit hranice obcí popořadě po kruhu, a vždycky půjdeme podél předchozí cesty a pak podél hranic, až dorazíme na určená místa.

Vzniklému grafu se říká rovinný, protože jej lze zakreslit do roviny (na mapu). Rovinné grafy jsou skutečně vždy obarvitelné čtyřmi barvami, ale dokázat to bylo velmi složité. Nakonec se to vědcům podařilo až za pomoci počítače.

Graf vzniklý v podúloze ii) tedy z mapy vzniknout nemohl.

Podúloha iv)

Kozel Kryšpín hned všechno chápe. „No jó, jak je tam křížení, musí počet barev růst. Všechno je to úplně jednoduchý." Klement by rád mudrlanta usadil nějakým pěkným příkladem. Poradíš mu, jak by mohl sestrojit graf, který by sice nešel nakreslit bez křížení hran, ale zároveň by byl obarvitelný dvěma barvami?

Rozdělíme si papír na dvě poloviny. Na levou půlku papíru budeme kreslit vrcholy, které obarvíme červeně, na pravou modře. Vrcholy téže barvy nesmíme spojit, takže mezi žádnými dvěma modrými vrcholy nepovede hrana a mezi žádnými dvěma červenými vrcholy nepovede hrana. Za to však z každého červeného vrcholu povede hrana do všech modrých vrcholů.

Teď jen stačí dodat dostatek vrcholů na obě strany. Minimální počet pro splnění zadání jsou tři vrcholy na každé straně, celkem tedy šest vrcholů.

Tomuto druhu grafů (grafy obarvitelné dvěma barvami) se říká bipartitní.