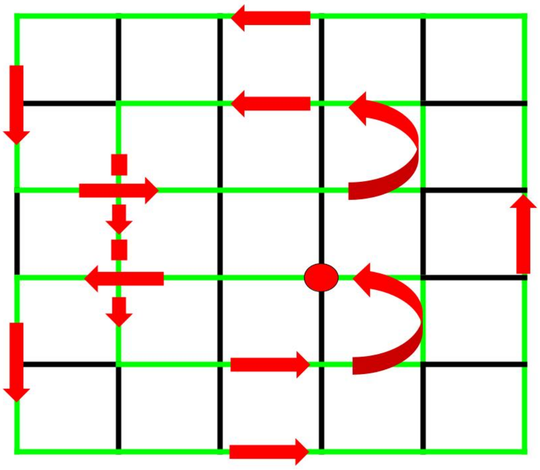
Kategorie mladší

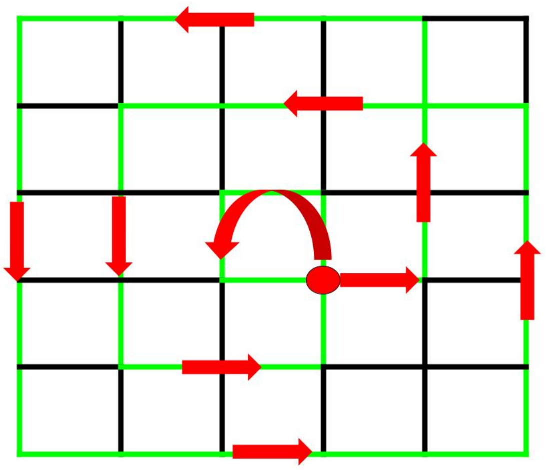
Úloha 1A Levácký autobus

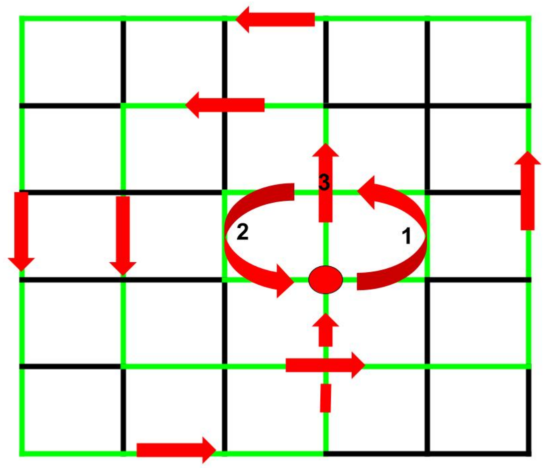
Do všech rohů města je cesta možná a bude mít 3600m.

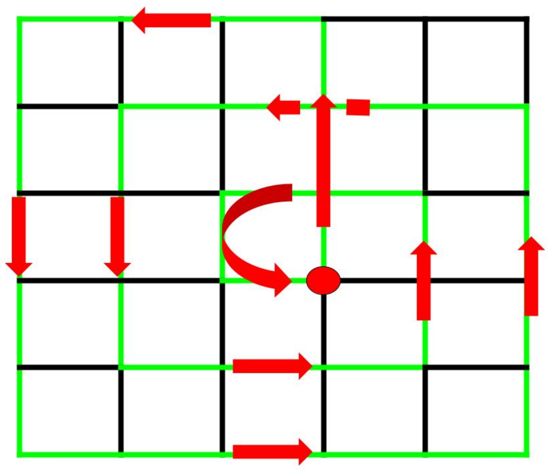
Ze startovního bodu se vydáme nejprve doleva, poté dolů do prvního rohu, pak postupujeme proti směru hodinových ručiček, přes zbylé tři rohy. Konec pojedeme dle obrázku až do cíle (viz obrázek níže).

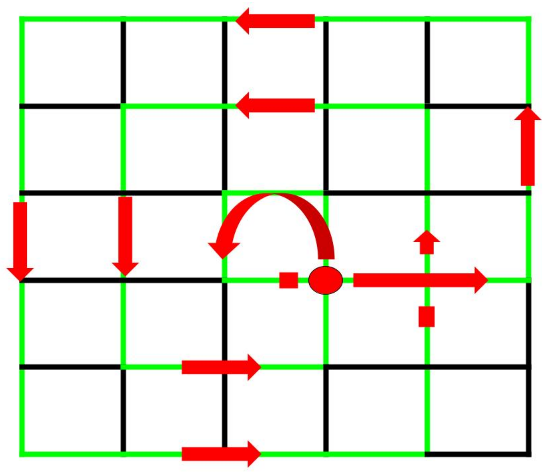


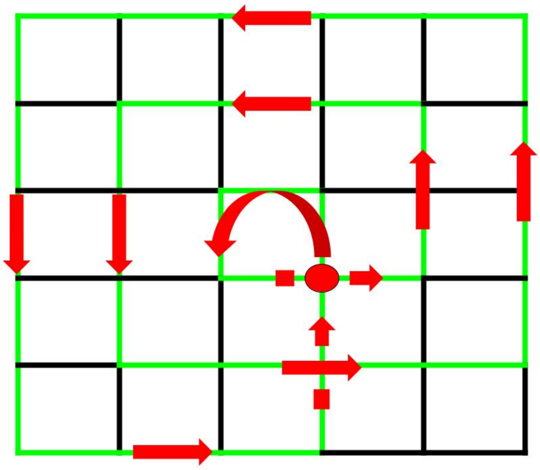
Tras delších, než 3600 m je možné najít hned několik. Jestliže je 1 malý čtverec o straně 100 m, pak je potřeba, aby se jelo přes 36 takových stran. Níže je 6 příkladů tras, které splňují všechny nutné podmínky.

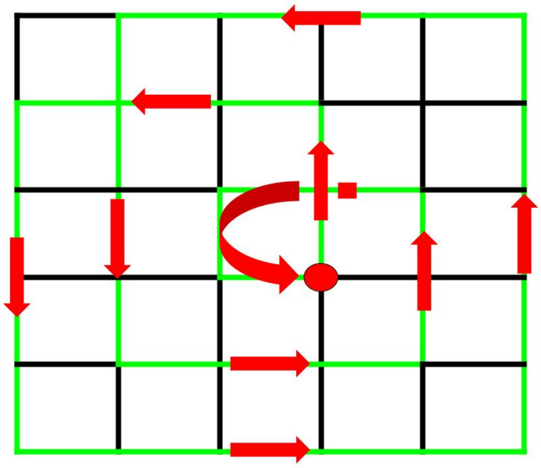












Úloha 2A Kuličky

Když Bětuška začíná se 3 kuličkami a každý den si koupí o 3 více, můžeme také říci, že si každý den Bětuška koupí 3x více kuliček, než kolikátý den je. Celkový počet jejích kuliček se tedy dá vyjádřit jako součet násobků 3 od 3 do $3n$ nebo také 3x součet čísel od 1 do n.

Musíme zjistit vzorec pro součet čísel $1+2+3+\cdots+n$. Nejprve je třeba podívat se na to, jakou hodnotu má n. Pokud je n sudé, dokážeme všechna čísla od 1 do n rozdělit do dvojic tak, že jejich součet bude vždy $n+1$, tzn. $n+1$, $(n-1)+2$, $(n-2)+3$, ..., $\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{n}{2}+1\right)$. V tom případě vynásobíme $\frac{n}{2}$ dvojic se součtem $n+1$, celkový součet tedy bude: $\frac{n(n+1)}{2}$.

Pokud je n liché, dokážeme takto rozdělit všechna čísla, až na prostřední hodnotu. Opět dostanu v $\frac{n-1}{2}$ případech součet $n+1$, tzn. $n+1$, $(n-1)+2$, $(n-2)+3$, ... , $\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}+2\right)$. Jako jediné nepoužité číslo mi zbude $\frac{n-1}{2}+1$. Součet každé dvojice tedy bude:

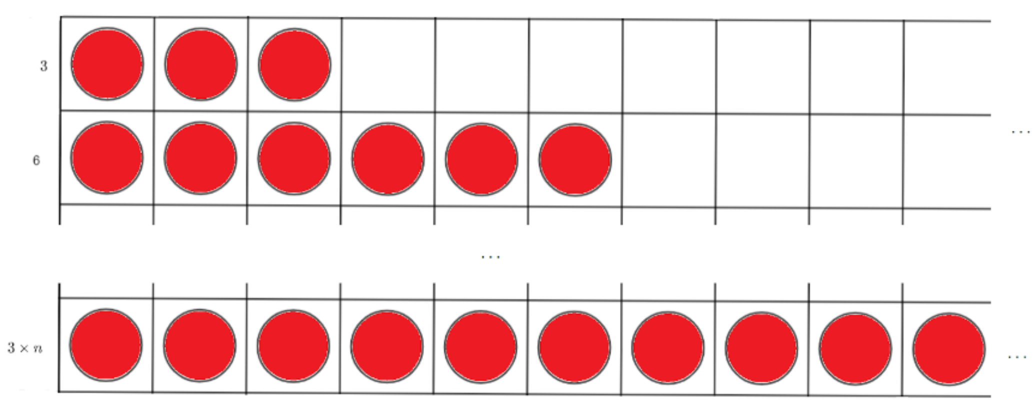
$$\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+2=n+1$$

A když sečteme všechny tyto dvojce a naše zbylé číslo:

$$\left((n+1)\cdot\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{(n+2)\cdot(n-1)}{2}+1=$$
$$\frac{(n+2)\cdot(n-1)}{2}+\frac{2}{2}=\frac{(n+2)\cdot(n-1)+2}{2}=\frac{(n^2+n-2)+2}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

A to je přeci ten samý vzoreček jako pro sudá čísla! Dá se tedy použít pro všechna celá čísla.

Nyní už stačí pouze výše odvozený vzoreček pro součet čísel od 1 do n vynásobit 3 a vyjde výsledek $3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$, což je počet kuliček, které bude mít Bětuška po n dnech.



Obrázek 1: Počty kuliček

Úloha 3A Počítání se zbytky

Podúloha i)

Kolik zbytkových tříd modulo 2023 celkem existuje?

Při klasickém dělení se zbytkem nám vyjde vždy zbytek menší než dělitel – zde tedy mohou nastat zbytky $0, 1, \ldots, 2022$, to je 2023 různých zbytků. Ke každému jinému celému číslu umíme přičíst (či odečíst) násobek 2023 tak, abychom dostali jeden z těchto zbytků; naopak žádné dva z nich si navzájem nejsou kongruentní, protože jejich rozdíl bude kladný a menší než 2023, takže nedovede být násobkem 2023.

Tedy máme 2023 zbytkových tříd modulo 2023.

Podúloha ii)

Představ si, že bychom na papír zapsali 120 pětek a všechny je znásobili. Jaký zbytek modulo 23 by dával výsledek? Snaž se co nejvíce si usnadnit práci modulením mezivýsledků tak, abys nemusel(a) nikdy počítat s příliš velkými čísly.

Postupně budeme v našem velikém součinu sdružovat činitele do skupinek, které znásobíme a následně z výsledku vezmeme zbytek modulo 23.

Začínáme s tím, že násobíme 120krát pětku. To můžeme přeskupit na 60 dvojic pětek, přičemž každou tuto dvojici vynásobíme na

$$5 \cdot 5 \equiv 25 \equiv 2 \pmod{23}.$$

Nyní tak násobíme 60 dvojek. Nyní potřebujeme opět seskupit několik dvojek tak, aby jejich součin přelezl 23. To se stane poprvé s pěti dvojkami, kdy dostaneme

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 32 \equiv 9 \pmod{23}.$$

Začali jsme s 60 dvojkami a sdružili je po 5, ve výsledku tedy máme 12 devítek.

Nyní si pomůžeme malým trikem: $9 = 3 \cdot 3$, proto si 12 devítek můžeme podrozdělit na $2 \cdot 12 = 24$ trojek. Z těchto trojek opět vezmeme skupinku, jejíž součin přeleze 23. To se v tomto případě poprvé stane s trojicí trojek, kdy máme

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 27 \equiv 4 \pmod{23}.$$

Tímto se z 24 trojek stane 8 čtyřek.

Díky $4 = 2 \cdot 2$ můžeme 8 čtyřek zjemnit na $2 \cdot 8 = 16$ dvojek, a dvojky jsme už viděli, takže víme, že je chceme sdružit po pěticích, které dají součin $32 \equiv 9 \pmod{23}$. Zde už nám sdružování do skupinek nevychází dokonale: platí $16 = 3 \cdot 5 + 1$, čili kromě tří takových pětic nám zbude ještě jedna přebytečná dvojka. Ve výsledku tak máme

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2.$$

Máme 3 devítky, což už víme, že je totéž jako 6 trojek, a 3 trojky dávají 4. Tedy

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \equiv (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 2 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \equiv 32 \equiv 9 \pmod{23}.$$

Podúloha iii)

Při počítání se zbytky se mohou dít na první pohled zvláštní věci: zatímco za obvyklých okolností víme, že součin dvou nenulových čísel je vždy nenulový, při počítání jen se zbytky už to nemusí tak docela platit. Najdi dvě celá čísla a, b taková, že ačkoliv $a \not\equiv 0 \pmod{512}$ i $b \not\equiv 0 \pmod{512}$, přesto $a \cdot b \equiv 0 \pmod{512}$.

512 není prvočíslo, takže je dovedeme rozložit na součin dvou menších čísel, např. $2 \cdot 256$. Protože 2 i 256 jsou menší než 512 (ale kladná), nedávají zbytek $0 \pmod{512}$, ale jejich součin je $512 \equiv 0 \pmod{512}$. Příkladem takových čísel je tedy např. $a = 2$, $b = 256$.

Podúloha iv)

Uvažuj situaci, kdy se naše modula m a n liší pouze o 1, tedy $n = m + 1$. Vymysli, jaká čísla použít v roli „magických čísel" a, b, která dají vždy v jednom modulu zbytek 0 a v druhém 1. Ověř svou odpověď pro $m = 2023$, $n = 2024$ tím, že nalezneš nějaké celé číslo x, které splňuje

$$x \equiv 15 \pmod{2023},$$
$$x \equiv 42 \pmod{2024}.$$

Hledáme čísla a, b taková, že

$$a \equiv 1 \pmod{m}, \qquad b \equiv 0 \pmod{m}.$$
$$a \equiv 0 \pmod{n}, \qquad b \equiv 1 \pmod{n}.$$

Najít a je snadné: funguje vzít $a = n = m + 1$, protože to dá zbytek 1 po dělení m (protože $a = 1 \cdot m + 1$) a zbytek 0 po dělení n (protože to je samo n). Kdybychom naopak za b zkusili vzít m, netrefíme se úplně: bude to násobek m, ale po dělení $n = m + 1$ dá zbytek -1, zatímco my chceme 1.

To lze vyřešit mnoha způsoby: např. vezmeme $b = -m$, což je $b = (-1) \cdot (m + 1) + 1$, takže dává zbytek jedna. Další (v došlých řešeních populárnější) volbou pak bylo $b = m \cdot m$. To funguje, protože díky $m \equiv -1 \pmod{m+1}$ máme

$$b \equiv m \cdot m \equiv (-1) \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{m+1}.$$

Našli jsme tedy vhodná čísla, ověřme, že pro $m = 2023$, $n = 2024$ dávají správný výsledek. Použijme

$$a = n = 2024, \qquad b = m \cdot m = 2023 \cdot 2023 = 4\,092\,529.$$

Podle návodu z tématka pak očekáváme, že zbytky 15 a 42 nám dá (mimo jiné) číslo

$$x = 15 \cdot a + 42 \cdot b = 15 \cdot 2024 + 42 \cdot 4\,092\,529 = 171\,916\,578.$$

A tomu je skutečně tak, což lze dosvědčit skrze

$$171\,916\,578 = 84\,981 \cdot 2023 + 15 = 84\,939 \cdot 2024 + 42.$$

Podúloha v)

V Čínské zbytkové větě jsme uvedli podmínku, že modula m a n musí být nesoudělná. Je tato podmínka skutečně nutná? Zvládneš najít dvojici zbytků modulo $m = 65$ a modulo $n = 91$, která nebude splněna žádným jedním celým číslem?

Čísla 65 a 91 jsou soudělná třináctkou. To speciálně znamená, že kdykoliv známe zbytek čísla modulo 65 či 91, můžeme z tohoto zbytku ještě jednou vzít zbytek po dělení 13 a dostaneme tak zbytek původního čísla. To ale znamená, že pokud dostaneme zbytky modulo 65 i modulo 91, musí nám po vzetí zbytku modulo 13 dát totéž.

Např. tedy nemůže existovat číslo, které by splňovalo

$$x \equiv 1 \pmod{65},$$
$$x \equiv 0 \pmod{91},$$

protože kdyby existovalo, pak by muselo dávat zbytek 1 i zbytek 0 po dělení třinácti – a to je absurdní.

JÁMA LVOVÁ

Řešení 1. kola
XV. ročník

Kategorie starší

Úloha 1B **Výprava do pravěku**

- Nejdříve si jednotlivé sloupce rozdělíme podle čísel nad tabulkou.
- Doplníme části sloupců podle předem zadaných hodnot.

69	66	72	69	69	57	64	64	60	70	69	54	55	52	
							4					4		70
	6		8				4			7		4		79
			8				4			7		4		76
			8				4			7				66
										7			5	65
				7						7			5	84
9				7									8	102
9				9							8		8	113
9				9							8		8	117
9		7		9							8		8	118

- Pomocí počtu barev, předělů a známých hodnot v šestém řádku víme, že čísla musí být v pořadí 5-7-5. Doplníme tedy sedmičky mezi zadané sedmičky. Pokud pak součet sedmiček odečteme od celkového součtu hodnot v řádku, zjistíme, že na všech zbylých políčkách budou pětky – pokud bychom doplnili libovolný počet sedmiček navíc, nešlo by již zbývající sumu rozdělit po pěti.
- Pak doplníme čísla do sloupců tam, kde víme, že budou stejná čísla tak jako na začátku. Tento krok v budoucnu uděláme vždy, kdy to bude možné.
- V desátém řádku pomocí počtu předělů a známých hodnot víme, že ve třináctém sloupci bude osmička.

69	66	72	69	69	57	64	64	60	70	69	54	55	52	
							4					4		70
	6		8				4			7		4		79
			8				4			7		4		76
			8				4			7				66
5		5				7	7		7	7			5	65
5	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	84
9				7	7	7	7	7	7		5	8	8	102
9				9	7			7			8	8	8	113
9				9	7			7			8	8	8	117
9		7		9							8	8	8	118

- V osmém sloupci pomocí součtu hodnot zjistíme, že v 8.-10. řádku budou devítky.
- Tak jako u minulého obrázku můžeme v posledním řádku doplnit devítky mezi dvě známé devítky.
- Pomocí součtů hodnot ve sloupcích pak můžeme doplnit čtyřky do 6., 7., 12. sloupce.

69	66	72	69	69	57	64	64	60	70	69	54	55	52	
					4	4	4				4	4		70
	6		8		4	4	4			7	4	4		79
			8		4	4	4			7	4	4		76
			8		4	4	4			7	4			66
5		5			4	7	7		7	7	4		5	65
5	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	84
9				7	7	7	7	7	7		5	8	8	102
9				9	7	9	9	7			8	8	8	113
9				9	7	9	9	7			8	8	8	117
9		7		9	9	9	9				8	8	8	118

- Pro větší přehlednost si vyznačíme i předěly do řádků. (To budeme dělat i při dalších krocích vždy, kdy to půjde.)
- V sedmém řádku pomocí počtu předělů doplníme pětku do jedenáctého sloupce (nemůže to být jiné číslo než 5/7, protože pak by neseděl počet předělů v řádku a číslo 7 to není, protože by pak nebyl předěl ve sloupci).
- Pomocí součtu hodnot v sedmém řádku doplníme devítky a sedmičku (vlevo musí být devítky a vpravo sedmičky, protože by jinak neseděl počet předělů v řádku).
- V posledním řádku doplníme sedmičku do druhého sloupce (devítka to být nemůže - nebyl by předěl ve druhém sloupci, jiné číslo také ne - neseděl by počet předělů v posledním řádku), pomocí součtu získáme počet devítek (3) a osmiček (1) a doplníme je tak, aby seděly předěly.
- Pomocí počtu předělů a součtu hodnot doplníme osmý řádek. Po odečtení všech vyplněných políček od 113 vyjde 16 na zbývající dvě políčka. Jelikož povolené máme pouze 7, 8 a 9 (tj. právě 3 barvy), může se jednat pouze o součet zleva 8+8, 7+9 nebo 9+7. 8+8 je vyloučeno, jinak by nebyl v jedenáctém sloupci předěl. Pro 9+7 by nestačil počet předělů, doplníme tedy 7 do třetího sloupce a 9 do jedenáctého sloupce.
- Pomocí součtu hodnot v řádku doplníme poslední devítku do třetího sloupce v devátém řádku.

69	66	72	69	69	57	64	64	60	70	69	54	55	52	
					4	4	4				4	4		70
	6		8		4	4	4			7	4	4		79
			8		4	4	4			7	4	4		76
			8		4	4	4			7	4			66
5		5			4	7	7		7	7	4		5	65
5	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	84
9	9	9	7	7	7	7	7	7	7	5	5	8	8	102
9	7	7	7	9	7	9	9	7	9	9	8	8	8	113
9	7	9	9	9	7	9	9	7	9	9	8	8	8	117
9	7	7	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	118

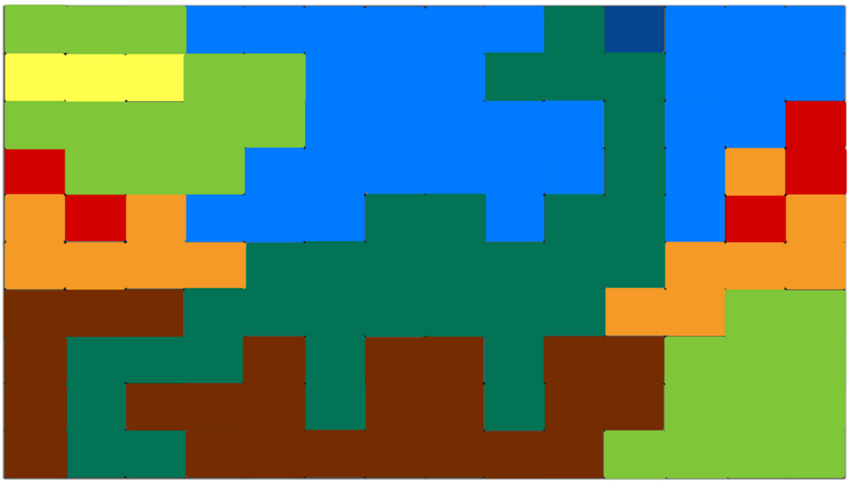
- V druhém řádku musí být předěly mezi 6-8-4-7-4, můžeme tedy doplnit šestku do prvního a čtyřku do posledního sloupce.
- Pomocí součtu hodnot doplníme poslední sloupec.
- Pomocí počtu předělů doplníme do třetího řádku 3 osmičky do prvních tří sloupců. Zbývají 3 políčka dávající nutně dle součtu v řádku 16. Pro zachování počtu předělů na řádku musí jít o součet 8+4+4.

69	66	72	69	69	57	64	64	60	70	69	54	55	52	
					4	4	4				4	4	4	70
6	6		8	8	4	4	4			7	4	4	4	79
8	8	8	8	8	4	4	4	4	4	7	4	4	1	76
	8	8	8		4	4	4	4	4	7	4		1	66
5		5			4	7	7	4	7	7	4		5	65
5	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	84
9	9	9	7	7	7	7	7	7	7	5	5	8	8	102
9	7	7	7	9	7	9	9	7	9	9	8	8	8	113
9	7	9	9	9	7	9	9	7	9	9	8	8	8	117
9	7	7	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	118

- Pomocí součtu hodnot dopočítáme desátý a jedenáctý sloupec.
- Protože ve druhém řádku známe všechny předěly (z nichž jeden musí být mezi 6/8), můžeme doplnit sedmičku a dopočítáme šestku pomocí součtu v řádku.
- Pomocí součtu ve sloupcích dopočítáme třetí a devátý sloupec.
- Protože známe všechny předěly v prvním řádku (z nichž jeden musí být mezi 8 a 4), tak můžeme doplnit dvě osmičky do prvních dvou sloupců a pomocí součtu v řádku dopočítat dvě čtyřky.
- Pomocí součtu ve sloupcích dopočítáme první, druhý, čtvrtý a pátý sloupec.
- Pomocí součtu v řádcích dopočítáme čtvrtý a pátý řádek.

69	66	72	69	69	57	64	64	60	70	69	54	55	52	
8	8	8	4	4	4	4	4	4	7	3	4	4	4	70
6	6	6	8	8	4	4	4	7	7	7	4	4	4	79
8	8	8	8	8	4	4	4	4	4	7	4	4	1	76
1	8	8	8	4	4	4	4	4	4	7	4	5	1	66
5	1	5	4	4	4	7	7	4	7	7	4	1	5	65
5	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	84
9	9	9	7	7	7	7	7	7	7	5	5	8	8	102
9	7	7	7	9	7	9	9	7	9	9	8	8	8	113
9	7	9	9	9	7	9	9	7	9	9	8	8	8	117
9	7	7	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	118

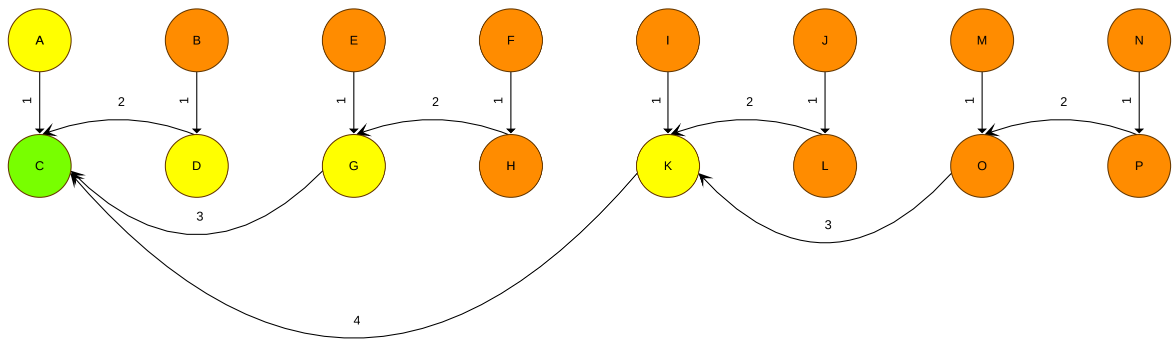
- Doplníme barvy podle zadání a TA-DÁ.



Úloha 2B Je těžší ten či onen?

Začneme tím, že předměty rozdělíme do (osmi) dvojic, ve kterých jednotlivé předměty porovnáme mezi sebou. Poté vezmeme těžší z nich z každého porovnání a ty opět porovnáme mezi sebou. Tento postup opakujeme, dokud nedojdeme k poslední dvojici, při jejímž porovnání najdeme nejtěžší předmět.

Celý postup porovnávání si můžeme znázornit následujícím obrázkem. Na obrázku jsou předměty *A-P*. Jejich porovnání je vyjádřeno šipkou, která ukazuje vždy na těžší z nich. Šipky jsou také označené čísly podle toho, o které kolo porovnávání se jedná.



Nejtěžší předmět na obrázku poznáme podle toho, že byl těžší v každém porovnání a tedy na něj ukazují všechny jeho šipky. Tento předmět je vyznačen na obrázku zeleně.

Jak to ale bude s druhým nejtěžším předmětem? Tím může být jedině některý z předmětů, které vyhrály všechna svá porovnání, kromě porovnání s nejtěžším předmětem. Na obrázku najdeme 4 takové předměty (vyznačené žlutě), které by mohly být druhým nejtěžším předmětem. Pak už je stačí jen porovnat ve dvojicích a těžší z každé dvojice porovnat v posledním vážení mezi sebou, těžší z nich bude naším hledaným předmětem, tedy druhým nejtěžším předmětem celkově.

V posledním kroku postupu si ověříme, že jsme nepřesáhli povolený počet vážení. V rámci hledání nejtěžšího předmětu jsme využili celkem 15 vážení (vit 15 šipek na obrázku), na poslední čtveřici jsme použili 3 další vážení, tedy celkově 18 vážení.

Brouček Bořek tak může být spokojen, protože jsme splnili všechny jeho podmínky.

Úloha 3B Počítání se zbytky

Podúloha i)

Kolik zbytkových tříd modulo 2023 *celkem existuje?*

Při klasickém dělení se zbytkem nám vyjde vždy zbytek menší než dělitel – zde tedy mohou nastat zbytky $0, 1, \dots, 2022$, to je 2023 různých zbytků. Ke každému jinému celému číslu umíme přičíst (či odečíst) násobek 2023 tak, abychom dostali jeden z těchto zbytků; naopak žádné dva z nich si navzájem nejsou kongruentní, protože jejich rozdíl bude kladný a menší než 2023, takže nedovede být násobkem 2023.

Tedy máme 2023 zbytkových tříd modulo 2023.

Podúloha ii)

Představ si, že bychom na papír zapsali 120 pětek a všechny je znásobili. Jaký zbytek modulo 23 by dával výsledek? Snaž se co nejvíce si usnadnit práci modulením mezivýsledků tak, abys nemusel(a) nikdy počítat s příliš velkými čísly.

Postupně budeme v našem velikém součinu sdružovat činitele do skupinek, které znásobíme a následně z výsledku vezmeme zbytek modulo 23.

Začínáme s tím, že násobíme 120krát pětku. To můžeme přeskupit na 60 dvojic pětek, přičemž každou tuto dvojici vynásobíme na

$$5 \cdot 5 \equiv 25 \equiv 2 \pmod{23}.$$

Nyní tak násobíme 60 dvojek. Nyní potřebujeme opět seskupit několik dvojek tak, aby jejich součin přelezl 23. To se stane poprvé s pěti dvojkami, kdy dostaneme

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 32 \equiv 9 \pmod{23}.$$

Začali jsme s 60 dvojkami a sdružili je po 5, ve výsledku tedy máme 12 devítek.

Nyní si pomůžeme malým trikem: $9 = 3 \cdot 3$, proto si 12 devítek můžeme podrozdělit na $2 \cdot 12 = 24$ trojek. Z těchto trojek opět vezmeme skupinku, jejíž součin přeleze 23. To se v tomto případě poprvé stane s trojicí trojek, kdy máme

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 27 \equiv 4 \pmod{23}.$$

Tímto se z 24 trojek stane 8 čtyřek.

Díky $4 = 2 \cdot 2$ můžeme 8 čtyřek zjemnit na $2 \cdot 8 = 16$ dvojek, a dvojky jsme už viděli, takže víme, že je chceme sdružit po pěticích, které dají součin $32 \equiv 9 \pmod{23}$. Zde už nám sdružování do skupinek nevychází dokonale: platí $16 = 3 \cdot 5 + 1$, čili kromě tří takových pětic nám zbude ještě jedna přebytečná dvojka. Ve výsledku tak máme

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2.$$

Máme 3 devítky, což už víme, že je totéž jako 6 trojek, a 3 trojky dávají 4. Tedy

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \equiv (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 2 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \equiv 32 \equiv 9 \pmod{23}.$$

Podúloha iii)

Při počítání se zbytky se mohou dít na první pohled zvláštní věci: zatímco za obvyklých okolností víme, že součin dvou nenulových čísel je vždy nenulový, při počítání jen se zbytky už to nemusí tak docela platit. Najdi dvě celá čísla a, b taková, že ačkoliv $a \not\equiv 0 \ (mod\ 512)$ i $b \not\equiv 0 \ (mod\ 512)$, přesto $a \cdot b \equiv 0 \ (mod\ 512)$.

512 není prvočíslo, takže je dovedeme rozložit na součin dvou menších čísel, např. $2 \cdot 256$. Protože 2 i 256 jsou menší než 512 (ale kladná), nedávají zbytek $0 \pmod{512}$, ale jejich součin je $512 \equiv 0 \pmod{512}$. Příkladem takových čísel je tedy např. $a = 2$, $b = 256$.

Podúloha iv)

Uvažuj situaci, kdy se naše modula m a n liší pouze o 1, tedy $n = m + 1$. Vymysli, jaká čísla použít v roli „magických čísel" a, b, která dají vždy v jednom modulu zbytek 0 a v druhém 1. Ověř svou odpověď pro $m = 2023$, $n = 2024$ tím, že nalezneš nějaké celé číslo x, které splňuje

$$x \equiv 15 \ (mod\ 2023),$$
$$x \equiv 42 \ (mod\ 2024).$$

Hledáme čísla a, b taková, že

$$a \equiv 1 \pmod{m}, \qquad b \equiv 0 \pmod{m}.$$
$$a \equiv 0 \pmod{n}, \qquad b \equiv 1 \pmod{n}.$$

Najít a je snadné: funguje vzít $a = n = m + 1$, protože to dá zbytek 1 po dělení m (protože $a = 1 \cdot m + 1$) a zbytek 0 po dělení n (protože to je samo n). Kdybychom naopak za b zkusili vzít m, netrefíme se úplně: bude to násobek m, ale po dělení $n = m + 1$ dá zbytek -1, zatímco my chceme 1.

To lze vyřešit mnoha způsoby: např. vezmeme $b = -m$, což je $b = (-1) \cdot (m + 1) + 1$, takže dává zbytek jedna. Další (v došlých řešeních populárnější) volbou pak bylo $b = m \cdot m$. To funguje, protože díky $m \equiv -1 \pmod{m + 1}$ máme

$$b \equiv m \cdot m \equiv (-1) \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{m + 1}.$$

Našli jsme tedy vhodná čísla, ověřme, že pro $m = 2023$, $n = 2024$ dávají správný výsledek. Použijme

$$a = n = 2024, \qquad b = m \cdot m = 2023 \cdot 2023 = 4\,092\,529.$$

Podle návodu z tématka pak očekáváme, že zbytky 15 a 42 nám dá (mimo jiné) číslo

$$x = 15 \cdot a + 42 \cdot b = 15 \cdot 2024 + 42 \cdot 4\,092\,529 = 171\,916\,578.$$

A tomu je skutečně tak, což lze dosvědčit skrze

$$171\,916\,578 = 84\,981 \cdot 2023 + 15 = 84\,939 \cdot 2024 + 42.$$

Podúloha v)

V Čínské zbytkové větě jsme uvedli podmínku, že modula m a n musí být nesoudělná. Je tato podmínka skutečně nutná? Zvládneš najít dvojici zbytků modulo $m = 65$ a modulo $n = 91$, která nebude splněna žádným jedním celým číslem?

Čísla 65 a 91 jsou soudělná třináctkou. To speciálně znamená, že kdykoliv známe zbytek čísla modulo 65 či 91, můžeme z tohoto zbytku ještě jednou vzít zbytek po dělení 13 a dostaneme tak zbytek původního čísla. To ale znamená, že pokud dostaneme zbytky modulo 65 i modulo 91, musí nám po vzetí zbytku modulo 13 dát totéž.

Např. tedy nemůže existovat číslo, které by splňovalo

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{65}, \\ x &\equiv 0 \pmod{91}, \end{aligned}$$

protože kdyby existovalo, pak by muselo dávat zbytek 1 i zbytek 0 po dělení třinácti – a to je absurdní.