Kategorie mladší

Úloha 1A Čtyřková

Kamil může začít pěkně popořadě a zkusit vytvořit

$$0 = 0 + 0 = 4 - 4 + 4 - 4.$$

Kousek $4 - 4$ může použít taky při dalších číslech a pak k němu připočítat ještě ty dvě čtyřky. Další kousek, kterého si může všimnout, je $4/4 = 1$, který použije například pro

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + 0 = 4 - 4 + 4/4,\\
2 &= 1 + 1 = 4/4 + 4/4,\\
3 &= 1 + 1 + 1 = 4/4 + 4/4 + 4/4 = (4 + 4 + 4)/4.
\end{aligned}$$

Aby dostal čtyřku, musí k jedné čtyřce připočítat nulu, ale to mu ještě jedna čtyřka zůstane. Může to ale zkusit poskládat z čísel, které už zná:

$$\begin{aligned}
4 &= 4 + 0 = 4 + 0/4 = 4 + (4 - 4)/4,\\
5 &= 2 + 3 = (4 + 4)/4 + (4 + 4 + 4)/4 = (4 * 4 + 4)/4,\\
6 &= 2 + 4 = (4 + 4)/4 + 4,\\
7 &= 8 - 1 = 4 + 4 - 1 = 4 + 4 - 4/4,\\
8 &= 4 + 4 = 4 + 4 + 0 = 4 + 4 + 4 - 4,\\
9 &= 8 + 1 = 4 + 4 + 4/4.
\end{aligned}$$

Úloha 2A Přírodopisná

Nejprve se zamysleme, která zvířata mají parohy, která kopyta, kly a chobot. Pro přehlednost si můžeme tyto údaje zapsat do tabulky.

	tapír	divočák	slon	jelen
parohy				✓
kopyta	✓	✓	(✓)	✓
kly		✓	✓	
chobot	✓		✓	

Tabulka 1: Co které zvířátko má.

Někteří z vás si všimli, že i sloni mají kopyta. Dále však budeme počítat s tím, že slon má pouze kly a chobot tak, jako většina z vás. Správné hodnoty pro verzi s kopyty najdete na konci.

Když známe skóre všech těchto zvířat, můžeme sestavit jednoduché rovnice, ze kterých potom spočítáme hodnoty pro různé části těla.

Tapír má skóre 3, to si surikata Saskie pamatuje. My víme, že tapír má kopyta a chobot, čili hodnota za kopyta a hodnota za chobot musejí dohromady dávat výsledné tapírovo skóre tři. Podobným způsobem můžeme zapsat i ostatní zvířata. Získáme tak následující rovnice:

$$\text{kopyta} + \text{chobot} = 3, \tag{1}$$

$$\text{kopyta} + \text{kly} = 4, \tag{2}$$

$$\text{kly} + \text{chobot} = 5, \tag{3}$$

$$\text{parohy} + \text{kopyta} = 7. \tag{4}$$

V prvních třech rovnicích se nám opakují kopyta, chobot a kly. Teď už nám tedy stačí jen šikovně upravovat rovnice. Tady samozřejmě existuje několik způsobů, jak se dá k výsledku dobrat. Zkusme si například z prvních dvou rovnic vyjádřit kopyta:

$$\begin{aligned}
\text{kopyta} + \text{chobot} = 3 \quad &\Longrightarrow \quad \text{kopyta} = 3 - \text{chobot},\\
\text{kopyta} + \text{kly} = 4 \quad &\Longrightarrow \quad \text{kopyta} = 4 - \text{kly}.
\end{aligned}$$

Jelikož platí, že kopyta $=$ kopyta, platí tedy, že $3 - \text{chobot} = 4 - \text{kly}$. Nyní máme rovnici o dvou neznámých chobot a kly. Třetí rovnice z původních čtyř, kterou jsme vytvořili díky údajům o slonovi, má taky tyto dvě neznáme. Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou už snadno vyřešíme například tak, že si z jedné rovnice vyjádříme kly (nebo chobot, výběr je čistě na nás) a dosadíme je do druhé rovnice.

$$
\begin{aligned}
4 - \text{kly} &= 3 - \text{chobot},\\
\text{kly} + \text{chobot} &= 5 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{kly} = 5 - \text{chobot}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme z druhé rovnice kly do první a poté už rovnici jen upravujeme:

$$
\begin{aligned}
4 - (5 - \text{chobot}) &= 3 - \text{chobot},\\
4 - 5 + \text{chobot} &= 3 - \text{chobot},\\
\text{chobot} - 1 &= 3 - \text{chobot},\\
2 \cdot \text{chobot} &= 4,\\
\text{chobot} &= 2.
\end{aligned}
$$

Zjistili jsme, že chobot má hodnotu 2. Dosazením do zbylých rovnic postupně zjistíme, že kopyta mají hodnotu 1 (z první rovnice $3 - 2 = 1$), tudíž kly mají hodnotu 3 (z druhé rovnice $4 - 1 = 3$). Součet hodnot, které mají kopyta a parohy, tedy skóre jelena, je 7. Parohy mají tedy hodnotu 6 (jelikož $7 - 1 = 6$).

Pokud počítáme se sloními kopyty, mají parohy hodnotu 5, kly 2, kopyta 2 a chobot 1.

Úloha 3A Abrakadabra

V receptu je napsáno, že můžeme písmeno *B* vyměnit za písmeno *B*. Tím se nám ale vůbec nic nezmění a nikam nás to neposune. Máme tedy první pravidlo, které je vhodné smazat.

Když se znovu podíváme na recept, můžeme si všimnout, že písmeno *C* je v celém receptu zmíněno pouze jednou. Žádné z ostatních písmenek na něj neodkazuje. Tím pádem se k němu při tvorbě kouzelnické formule vůbec nedostaneme. Můžeme ho tedy i s jeho pravidly úplně odstranit.

Dalšími písmeny, které je třeba zcela vyškrtnout, jsou velké *E* a velké *F*. Z těchto písmen totiž nelze vytvořit nic jiného, než velké *E* nebo *F* a nějaká malá písmenka. Jakmile bychom se při tvorbě kouzelné formule k těmto písmenkům dostali, už bychom formuli nikdy nedokončili, jelikož by stále obsahovala minimálně jedno velké písmeno.

Nyní recept vypadá takto:

- $S \rightarrow ABA \mid br$,
- $A \rightarrow aDa \mid a \mid DB$,
- $B \rightarrow kAd \mid uB$,
- $D \rightarrow bD \mid r$.

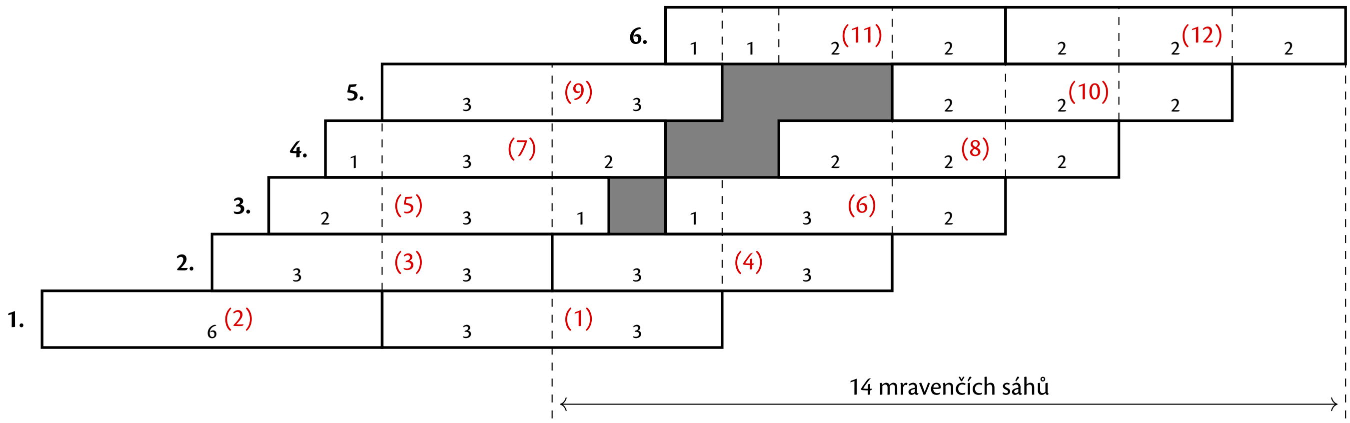
Teď už můžeme zkusit projít pravidlo za pravidlem a u každého najít alespoň jeden důvod, proč je nepostradatelné. Pokud se nám to povede, tak se recept už více promazat nedá.

1. Pravidlo $S \rightarrow ABA$ musíme ponechat, protože jinak bychom nemohli vytvořit jinou formuli než *br*.
2. Pomocí pravidla $S \rightarrow br$ můžeme vytvořit formuli *br*, která jinak vytvořit nejde.
3. Díky pravidlům $S \rightarrow ABA$, $A \rightarrow aDa$ a $D \rightarrow r$ může být začátek formule *ara*, což by bez pravidla $A \rightarrow aDa$ nešlo.
4. Nebýt pravidel $S \rightarrow ABA$, $A \rightarrow a$ a $B \rightarrow kAd$, nemohla by vzniknout formule *akada*.
5. Pravidla $S \rightarrow ABA$, $A \rightarrow DB$ a $D \rightarrow r$ potřebujeme, abychom mohli vytvořit formuli začínající na *r*.
6. Pravidla $B \rightarrow kAd$ a $B \rightarrow uB$ nám umožňují použít písmenka *k*, *d* a *u*.
7. Bez pravidel $D \rightarrow bD$ a $D \rightarrow r$ by písmenka *r* a *b* mohla být obsažena pouze ve formuli *br*.

Žádné další nepotřebné pravidlo tu už není. Náš recept je tedy hotový :).

Úloha 4A Dlouhý schody do nebe

Abychom mohli pomoci mravencům z říše Anteků, musíme si uvědomit, že je problém dorovnat hmotnost prkének, které mají více než polovinu ve vzduchu.



Obrázek 1: Červená čísla označují číslo dílku. Černá čísla označují kolik sáhů je nad daným prkénkem, které částečně visí ve vzduchu.

Proto v prvním řádku musíme dát první prkénko (1) tak, aby tři mravenčí sáhy byly na půdě a tři sáhy ve vzduchu. To budeme zapisovat např. v poměru jako 3 : 3 (tedy vždy ve tvaru podepřená část : nepodepřená část). Abychom mohli dávat větší váhu na první prkénko, tak dáme prkénko (2) tak, aby bylo za prvním prkénkem (1) a celé na zemi.

V druhém řádku na tyto dvě prkénka dáme další prkénko (3) tak, aby bylo z půlky na prkénku číslo (2) a z půlky na prkénku číslo (1). Tím získáme větší váhu na podepřené části prkénka (1). Prkénko (1) je tak momentálně v poměru 6 : 3, tak můžeme dát další prkénko (4) na první prkénko (1) v poměru 3 : 3. Poměr prkénka číslo (1) je teď 6 : 6 a poměr prkénka číslo (4) je 3 : 3.

Ve třetím řádku dáme další prkénko (5) tak, aby dva sáhy byly na levé polovině prkénka číslo (3), tři sáhy byly na druhé polovině prkénka číslo (3) a jeden sáh byl na prkénku číslo (4). Vedle prkénka (5) necháme mezeru velkou jeden sáh. Za touto mezerou bude ležet další prkénko (6), které bude mít jeden sáh na podepřené části prkénka číslo (4), tři sáhy na nepodepřené části prkénka číslo (4) a dva sáhy, které budou viset ve vzduchu. Takže zatím je poměr prkénka číslo (1) 9 : 8, poměr prkénka číslo (4) 5 : 6 a poměr prkénka číslo (6) je 4 : 2.

Ve čtvrtém řádku dáme prkénko (7) tak, že jeden sáh je nad prkénkem číslo (2), tři sáhy nad podepřenou částí prkénka číslo (1) a dva sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (1). Vedle toho necháme mezeru dva sáhy. Za touto mezerou dáme prkénko (8), které bude mít dva sáhy nad podepřenou částí prkénka číslo (6), dva sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (6) a dva sáhy ve vzduchu. Tím poměr prkénka číslo (1) je 12 : 10, prkénka číslo (4) 7 : 8, prkénka číslo (6) 6 : 4 a prkénka číslo (8) 4 : 2.

V pátém řádku dáme prkénko (9) tak, že tři sáhy jsou nad podepřenou částí prkénka číslo (1) a tři sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (1). Vedle toho necháme mezeru tři sáhy. Za touto mezerou dáme další prkénko (10), které bude mít dva sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (6), dva sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (8) a dva sáhy ve vzduchu. Takže poměr prkénka číslo (1) je 15 : 10, prkénka číslo (4) 10 : 8, prkénka číslo (6) 11 : 8, prkénka číslo (8) 6 : 4 a prkénka číslo (10) 4 : 2.

V šestém řádku dáme další prkénko (11) tak, aby jeden sáh byl nad nepodepřenou částí prkénka číslo (1), tři sáhy byly nad nepodepřenou částí prkénka číslo (4) a dva sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (6). Poslední prkénko bude mít dva sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (8), dva sáhy nad nepodepřenou částí prkénka číslo (10) a dva sáhy ve vzduchu. Závěrečné poměry nakonec budou u prkénka číslo (1) 15 : 11, u prkénka číslo (4) 11 : 11, u prkénka číslo (6) 11 : 8, u prkénka číslo (8) 10 : 6, u prkénka číslo (10) 8 : 4 a u prkénka číslo (12) 4 : 2.

Celkem bude most dlouhý 14 mravenčích sáhů a bude se skládat ze všech prkének.

Úlohu lze řešit také velmi elegantním způsobem, který nám ukázali řešitelé Daniela Flídrová a Daniel Osoba. Při řešení úlohy tímto způsobem je každé další prkénko posunuto o $\frac{1}{3}$ vzhledem k předchozímu, to znamená, že každý další schod ční 2 mravenčí sáhy nad propastí a poměr podepřené části ku nepodepřené je 4 : 2. Takhle poskládají mravenci všech 12 prkének. Pokud má tedy každé prkénko přesah 2 mravenčích sáhů nad propast, vynásobíme 12 prkének 2 mravenčími sáhy a výsledkem je celkový přesah mostu nad propast. Celkově tedy schody ční 24 mravenčích sáhů nad propastí. Pokud uvažujeme, že všechna prkénka mohou mít rovný poměr hmotností dřeva napravo od osy i nalevo od osy, tedy poměr podepřené a nepodepřené části bude vyrovnaný, máme u posledního prkénka stále rezervu, zde totiž zůstává poměr podepřené části ku nepodepřené 4 : 2. Pokud tedy poměr podepřené ku nepodepřené části vyrovnáme (získáme poměr 3 : 3), bude to v praxi znamenat, že poslední schod nebude vysunutý o 2, nýbrž o 3 mravenčí sáhy nad propast. Celkový přesah se tedy zvýší ještě o 1 mravenčí sáh. Konečný přesah schodů nad propast vypočítaný na celé mravenčí sáhy bude činit 25 mravenčích sáhů.

Úloha 5A Pizzerie

Celkem musí hroch Hans objednat 10 pizz, tedy 5 párů, a vždy zaplatí jen dražší pizzu z každého páru. Pizzy spárujeme tak, jak jdou za sebou podle ceny, aby ty nejdražší byly spolu:

$$\begin{aligned}\text{papájová } 149\,\text{JC} &+ \text{papájová } 149\,\text{JC},\\ \text{borůvková } 139\,\text{JC} &+ \text{jablečná } 135\,\text{JC},\\ \text{kokosová } 129\,\text{JC} &+ \text{krevetová } 125\,\text{JC},\\ \text{krevetová } 125\,\text{JC} &+ \text{hmyzí } 119\,\text{JC},\\ \text{rajčatová } 105\,\text{JC} &+ \text{rajčatová } 105\,\text{JC}.\end{aligned}$$

Při takovémto párování Hans celkem zaplatí $149\,\text{JC} + 139\,\text{JC} + 129\,\text{JC} + 125\,\text{JC} + 105\,\text{JC} = 647\,\text{JC}$.

Aby šéfkuchař vydělal co nejvíce peněz, musí pizzy spárovat vždy drahou s levnou. To znamená, že pět nejdražších pizz nesmí být spolu v páru a na ostatních nezáleží. Takže je může spárovat například takto:

$$\begin{aligned}\text{papájová } 149\,\text{JC} &+ \text{krevetová } 125\,\text{JC},\\ \text{papájová } 149\,\text{JC} &+ \text{krevetová } 125\,\text{JC},\\ \text{borůvková } 139\,\text{JC} &+ \text{hmyzí } 119\,\text{JC},\\ \text{jablečná } 135\,\text{JC} &+ \text{rajčatová } 105\,\text{JC},\\ \text{kokosová } 129\,\text{JC} &+ \text{rajčatová } 105\,\text{JC}.\end{aligned}$$

Hans by takhle zaplatil $149\,\text{JC} + 149\,\text{JC} + 139\,\text{JC} + 135\,\text{JC} + 129\,\text{JC} = 701\,\text{JC}$. Rozdíl mezi cenami pizz podle Hanse a šéfkuchaře činí $701\,\text{JC} - 647\,\text{JC} = 54\,\text{JC}$, které Hans ušetří.

Kategorie starší

Úloha 1B Švadlenčina

Nejprve je třeba zjistit, jak jsou dlouhé jednotlivé časové úseky mezi změnami:

- 1. časový úsek: 2 h = 120 min.
- 2. časový úsek: 40 min.

Třetí změna přichází 4 hodiny po startu. Odečteme proto od 4 hodin časové úseky, které již proběhly:

$$4\,\mathrm{h} - (120\,\mathrm{min} + 40\,\mathrm{min}) = 240\,\mathrm{min} - 120\,\mathrm{min} - 40\,\mathrm{min} = 80\,\mathrm{min}.$$

Tedy:

- 3. časový úsek: 80 min,
- 4. časový úsek: 2 h = 120 min.

Víme, že po každé změně začíná tým s novým zadáním a počítají se pouze hotové výsledky. Časové úseky, ve kterých tým nestihne ušít celý výrobek, jsou tedy zcela promarněné. Abychom zjistili, jestli tu nějaké takové časové úseky jsou, si potřebujeme spočítat, jak dlouho trvá zhotovit jeden výrobek. Kamarádů je pět a každý potřebuje na svou práci 20 min:

$$5 \cdot 20\,\mathrm{min} = 100\,\mathrm{min}.$$

Druhý i třetí časový úsek je kratší než 100 min. Žádný výrobek v těchto úsecích proto vyrobit nestihnou. Naopak v prvním a čtvrtém časovém úseku ještě 20 minut zbude. Povede se díky těmto dvaceti minutám odevzdat další výrobek? Pokud by Alexa začala hned po prvním výrobku dělat druhý a ostatní by ji napodobili, bude druhý výrobek hotový už 20 minut po prvním. Tím pádem stihnou odevzdat dva hotové výrobky do první změny a dva před poslední změnou (nastává až po 4. časovém úseku). Celkem potřebují odevzdat šest výrobků. Zbylé dva výrobky musí vyrobit po poslední změně. Už víme, že zhotovit jeden jim potrvá 100 mina druhý dalších 20 minut.

Abychom zjistili, kdy budou mít všech šest výrobků hotových, stačí sečíst všechny čtyři časové úseky a dobu, kterou jim zabere dokončit poslední dva výrobky:

$$120\,\mathrm{min} + 40\,\mathrm{min} + 80\,\mathrm{min} + 120\,\mathrm{min} + 100\,\mathrm{min} + 20\,\mathrm{min} = 480\,\mathrm{min} = 8\,\mathrm{h}.$$

Ditině týmu tedy bude soutěž trvat přesně 8 hodin.

Úloha 2B Dalmatíni

Začneme hezky odzadu. Celkový počet štěňat si označíme jako n. Počet flíčků nejméně flekatého štěňátka si označíme jako a, počet flíčků nejflekatějšího jako b. Zároveň ale víme, že se tyto počty liší o 62, tedy že $b = a + 62$. Protože se průměr počítá jako součet všech flíčků dělený počtem štěňat, můžeme si celkový průměr vyjádřit jako $\frac{S}{n} = 40$, kde S je celkový počet flíčků všech štěňátek. Celkový součet si ale také můžeme vyjádřit jako $S = s_{\text{ostatní}} + a + b$, kde $s_{\text{ostatní}}$ je součet flíčků všech štěňátek krom nejméně a nejvíce flekatého. Průměr všech tak budeme moci vyjádřit jako $\frac{s_{\text{ostatní}}+a+b}{n} = 40$ a toto rozložení celkového součtu nám pomůže vyjádřit i další dva průměry $\frac{s_{\text{ostatní}}+b}{n-1} = 49$ a $\frac{s_{\text{ostatní}}}{n-2} = 36$. Když ještě dosadíme $b = a + 62$, získáme následující soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} \frac{s_{\text{ostatní}} + a + a + 62}{n} &= 40, \\ \frac{s_{\text{ostatní}} + a + 62}{n-1} &= 49, \\ \frac{s_{\text{ostatní}} + a}{n-2} &= 36. \end{aligned}$$

Začneme tím, že všechny rovnice vynásobíme jmenovateli na levé straně, abychom se zbavili zlomků. Konkrétně je tedy budeme násobit n, $n-1$ a $n-2$. Můžeme to udělat, protože ze zadání víme, že štěňátek musí být více než 2, tedy že všechny jmenovatele budou nenulové. Dostaneme tak:

$$\begin{aligned} s_{\text{ostatní}} + 2a + 62 &= 40n, \\ s_{\text{ostatní}} + a + 62 &= 49n - 49, \\ s_{\text{ostatní}} &= 36n - 72. \end{aligned}$$

Do prvních dvou rovnic tak můžeme dosadit ze třetí rovnice za $s_{\text{ostatní}}$ a následně ještě upravit, tím získáme:

$$\begin{aligned} 2a - 10 &= 4n, \\ a + 39 &= 13n. \end{aligned}$$

Tuto soustavu už můžeme vyřešit například odečtením dvojnásobku druhé rovnice od první a získat

$$-88 = -22n \quad \Longrightarrow \quad n = 4.$$

Víme tedy, že rodinka dalmatinů má 4 štěňátka. Snadno už pak z některé rovnice dopočítáme počet flíčků nejméně puntíkatého štěňátka $a = 13n - 39 = 13$, a i počet flíčků nejvíce puntíkatého $b = a + 62 = 75$.

Úloha 3B Vybíravá žárovka

Ze zadání víme, že je potřeba použít všechny obvody. Tedy nám stačí vypočítat všechny možné celkové odpory, které může ten který obvod mít. Poté si pouze jednoduše na omezených možnostech vybereme zapojení která nám dají výsledný odpor. Je jedno v jakém pořadí, neboť obvody budou mezi sebou zapojeny sériově a tedy pro celkový odpor nezáleží na pořadí.

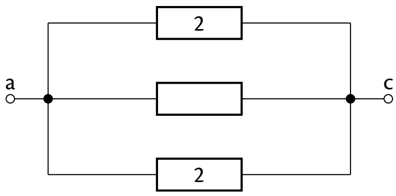
První odpor obvodu A ze zapojení a – b je jednoduchý, je to paralelní zapojení dvou obvodů odporů 1 Ω. Tedy pro výsledný odpor obvodu A_{ab} platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \Rightarrow A_{ab} = 0{,}5\Omega$.

Druhý obvod B jde zapojit třemi způsoby. Ty jsou B_{ab}, B_{ac} a B_{bc}. B_{ac} jde překreslit následovně.

(a) Obvod B (b) Obvod B po překreslení

Obrázek 2: Překreslování obvodu B pro zapojení a – c

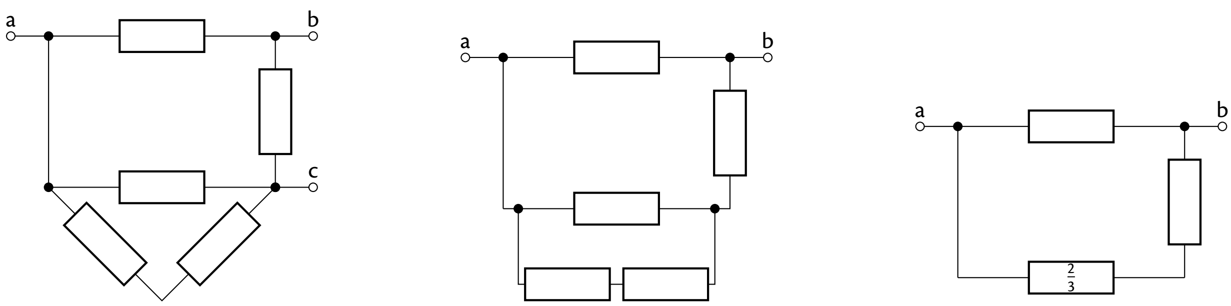
Povšimněme si, že jsme jen přeskládali jak obvod vypadá, jeho strukturu jsme ale vůbec nezměnili (až na vynechání výstupu *b*, ten ale nehraje žádnou roli v charakteristice obvodu). Přesto nám to umožnilo se v obvodu lépe zorientovat. Nyní si můžeme sériové zapojení zjednodušit na jeden rezistor o celkové hodnotě součtu rezistorů v sériovém zapojení. Opět to nijak nezmění charakteristiku obvodu, jen nám to zjednoduší výpočet.



Obrázek 3: Obvod B po zjednodušení sériového zapojení

Nyní vydíme, že toto zapojení obvodu je vlastně jen paralelní zapojení tří rezistorů o hodnotách 1, 2 a 2. Musí tedy platit $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{R}$. A výsledný odpor $B_{ac} = 0{,}5\,\Omega$.

Pokusme se si takto překreslit obvod B i pro zapojení B_{ab}.

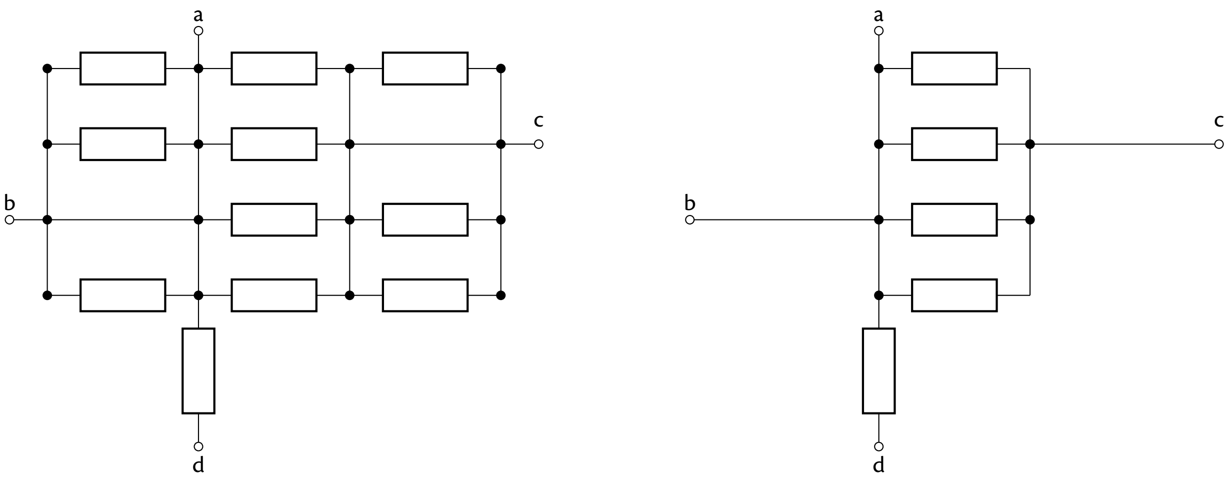


(a) Prodloužení vodiče od výstupu a (b) Narovnání vodičů (c) Schování spodních třech rezistorů do jednoho

Obrázek 4: Postupné překreslení obvodu B pro zapojení a – b

Pro zapojení B_{ab} a potažmo i zapojení B_{bc} (protože jsou vlastně jedno a to samé, jen pootočené) platí, že $\frac{1}{\frac{2}{3}+1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{R}$. Tedy výsledný odpor tohoto zapojení je $B_{ab} = \frac{3}{8}\Omega$

Pojďme nyní na obvod C. Začneme tím, že si všimneme zkratů a odstraníme součástky, kterými nepůjde proud.



(a) Obvod C

(b) Obvod C bez zbytečných součástek

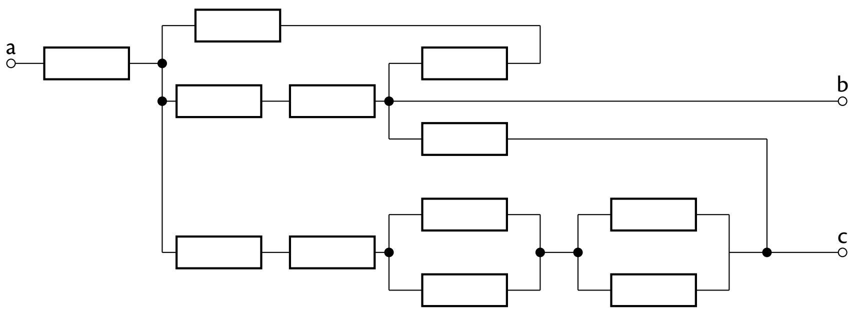
Obrázek 5: Odstranění součástek z obvodu C

Povšimněme si, že vstupy a a b jsou si rovnocenné. Mezi nimi bude odpor 0 Ω a jdou vzájemně zaměnit. Mezi nimi a výstupem d, bude odpor 1 Ω a stejně tak si můžeme poznamenat, že do budoucna odpor C_{ac} a C_{dc} se budou lišit právě o ten 1 Ω.

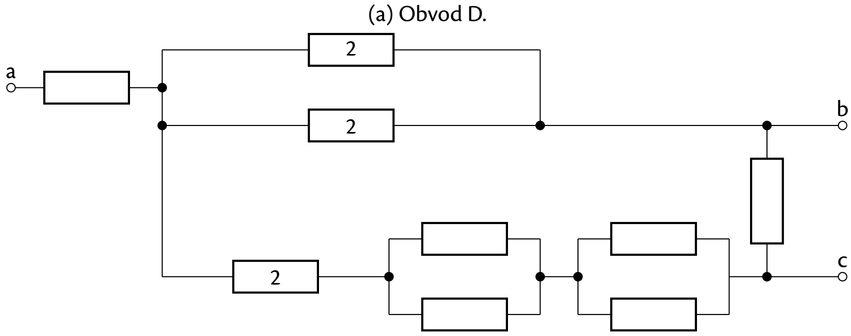
Odpor mezi b a c bude roven paralelnímu zapojení čtyř rezistorů s odporem 1 Ω. Tedy 0,25 Ω.

Všechny možné zapojení tedy budou mít následující hodnoty: $C_{ab} = 0\,\Omega$, $C_{ac} = 0{,}25\,\Omega$, $C_{ad} = 1\,\Omega$, $C_{bc} = 0{,}25\,\Omega$, $C_{bd} = 1\,\Omega$ a $C_{cd} = 1{,}25\,\Omega$

Vrhněme se dál na obvod D a překresleme si ho do rozumnější varianty. Sériové zapojení rovnou schováme pod jeden rezistor.

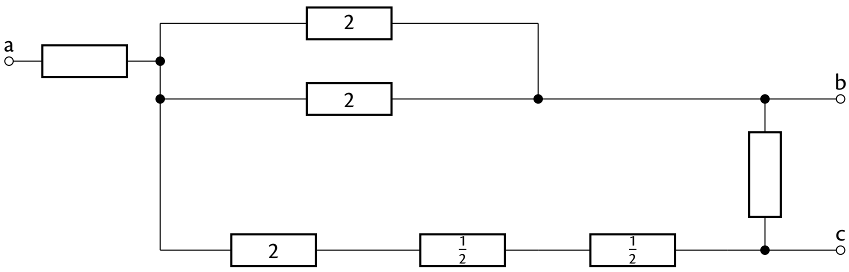


(a) Obvod D.

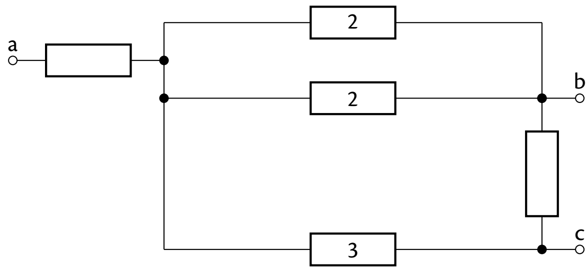


(b) Obvod D překreslený

Budeme zjednodušovat dál a dál podle pravidel, která už známe.



(a) Obvod D zjednodušený



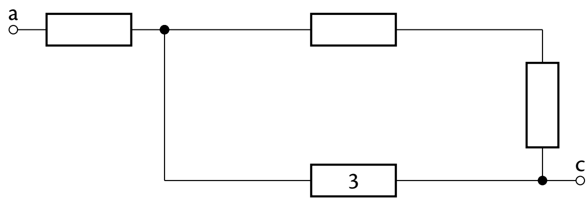
(b) Obvod D kompletně zjednodušený

Obrázek 7: Zjednodušování obvodu D

Postupným zjednodušováním se dostaneme až na poměrně jednoduchý obvod, ze kterého už stejnými metodami jako před tím dokážeme vyčíst finální odpory zapojení.

Pro odpor mezi a a b bude platit $\frac{1}{D_{ab}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. $D_{ab} = \frac{4}{5} + 1 = 1{,}8\,\Omega$.

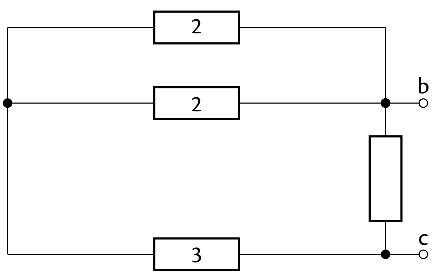
Pro odpor mezi a a c si obrázek ještě více zjednodušíme.



Obrázek 8: Obvod D kompletně zjednodušený pro zapojení a – c

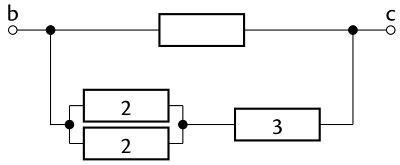
Potom už je krásně vidět, že $\frac{1}{D_{ac}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Tedy vlastně $D_{ac} = \frac{6}{5} + 1 = 2{,}2\,\Omega$

Pro zapojení b a c u obvodu můžeme zapomenout na část u výstupu a.



Obrázek 9: Obvod D kompletně zjednodušený pro zapojení b – c

Lehce protáhneme nějaké vodiče.



Obrázek 10: Obvod D překreslený pro zapojení b – c

Je vidět, že jsme žádné než estetické úpravy nedělaly, přesto se nám hned zjednoduššÍ chápání a monžnosti vypočítat celkový odpor zapojení. Odpor D_{bc} se tak jasně rovná $\frac{4}{5}$ tedy 0,8 Ω.

Všechny jedinečné odpory pro každý obvod které jsme schopni získat jsou následující:

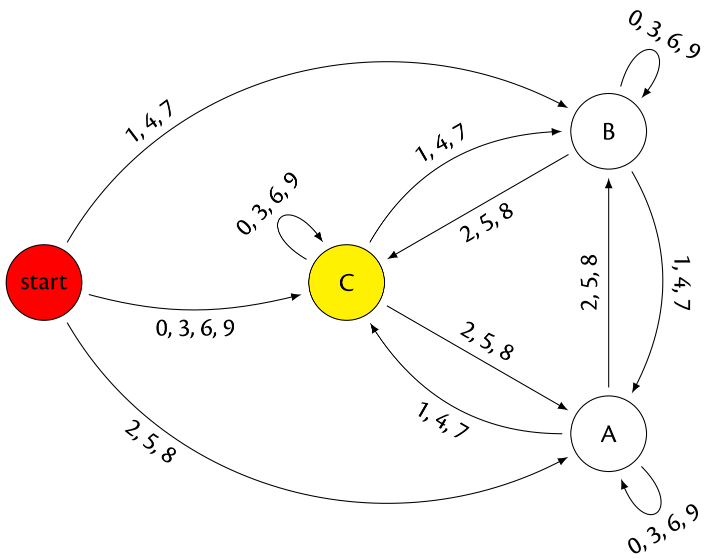
- $A_{ab} = 0{,}5\,\Omega$
- $B_{ab} = 0{,}375\,\Omega$; $B_{ac} = 0{,}5\,\Omega$
- $C_{ab} = 0\,\Omega$; $C_{ac} = 0{,}25\,\Omega$; $C_{ad} = 1\,\Omega$; $C_{dc} = 1{,}25\,\Omega$
- $D_{bc} = 0{,}8\,\Omega$; $D_{ab} = 1{,}8\,\Omega$; $D_{ac} = 2{,}2\,\Omega$

Chceme získat hodnotu 3,05 Ω. Obvod A má jen jedno zapojení, tím se dostáváme na hodnotu 2,55 Ω. Pro obvod B vybereme zapojení s odporem 0,5 Ω protože jinak bychom už se nijak nezbavily číslice na třetím desetinném místě. Jsme tedy na 2,05 Ω. Je jasné, že zapojení obvodu D, které má odpor 2,2 nepřipadá v úvahu. Zbývají nám tedy dvě možnosti. Liší se o jedničku. Pokud vybereme libovlonou z nich, zjistíme, že pro ni najdeme komplementární zapojení obvodu C tak, aby nám to dalo správný výsledek. Tedy řešení jsou dvě buď A_{ab}, B_{ac}, C_{ac}, D_{ab} nebo A_{ab}, B_{ac}, C_{cd}, D_{bc}.

Úloha 4B Poštovní

Holub Hynek ví, že číslo dělitelné třemi, musí mít také ciferný součet dělitelný třemi. Dále ví, že když vydělí jakékoli číslo třemi, zbytek může činit buď 1, 2 nebo 0.

Hynek začne sestrojovat třídičku tak, že ze startu povedou tři pásy postupně do zastávek C (odpovídající zbytku 0), B (odpovídající zbytku 1) a A (odpovídající zbytku 2). Pásy nejdřív přečtou první cifru čísla a pošlou ho do zastávky tak, že do C dorazí čísla s první cifrou 0, 3, 6 nebo 9, do B dorazí čísla s první cifrou 1, 4 nebo 7 a do A dorazí čísla s první cifrou 2, 5 nebo 8. Čísla jsou rozdělena takto, protože každá z těchto množin čísel má po vydělení 3 stejný zbytek (0, 3, 6, a 9 mají zbytek 0, zatímco 1, 4 a 7 mají zbytek 1, …). Následně jsou zastávky A, B a C pospojovány pásy, aby se dopisy posouvaly po zastávkách tak, že zbytek po vydělení součtu jejich cifer je 0, pokud se nachází na zastávce C, 1, nachází-li se na zastávce B, anebo 2, pokud se nachází na zastávce A. Pokud skončily dopisy po přečtení všech jejich cifer na zastávce C, součet jejich cifer je dělitelný třemi beze zbytku a jsou tedy v cíli (viz obrázek 11).



Obrázek 11: Třídička pro čísla dělitelná třemi.

Jako příklad uvažujme číslo 26523: Po přečtení jeho první cifry 2, jež dává po dělení třemi zbytek 2, je dopis odvezen na zastávku A. Tam je přečtena jeho druhá číslice 6, která je dělitelná třemi beze zbytku, tudíž dopis zůstává na zastávce A a je přečtena jeho další cifra 5. Ta dává zbytek 2. Zbytky se sečtou na 4, od čehož pro výpočet zbytku odebereme 3, zbude 1 a dopis se tak dostává na zastávku B. Následně je přečtena cifra 2, která dává po dělení třemi zbytek 2, který je přičten ke předchozímu zbytku 1. Číslo 3 je očividně dělitelné třemi, dává tedy zbytek 0 a dopis cestuje na zastávku C. Poslední cifra je 3, je dělitelná třemi beze zbytku, takže dopis zůstává na zastávce C, a je tedy v cíli.

Celá cesta dopisu s číslem 26523 tak je

$$\text{start} \longrightarrow \underset{2}{\text{A}} \longrightarrow \underset{26}{\text{A}} \longrightarrow \underset{265}{\text{B}} \longrightarrow \underset{2652}{\text{C}} \longrightarrow \underset{26523}{\text{C}}.$$

Úloha 5B Tempery pro ptakopyska

Abychom z množství potřebných barev nezezelenali, vytáhneme si informace o požadovaných barvách do tabulky 2. Tabulka používá hodnoty ze zadání. Reálně bylo na obrázku o 200 tyrkysových políček méně, protože se však počty lišily o celočíselný násobek sta, postup se nezmění.

barva	množství (v kapkách)	možnosti získání
tyrkysová	745	tyrkysová
zelená	361 + 126	zelená / (tyrkysová + žlutá)
červená	148	červená / (magenta + žlutá)
hnědá	41 + 25 + 215	hnědá / (magenta + žlutá + žlutá)
modrá	45	modrá / (tyrkysová + magenta)

Tabulka 2: Informace o barvách.

Tyrkysovou barvu můžeme získat jediným způsobem – koupit si ji. Na pokrytí všech tyrkysových plošek je třeba osm (resp. šest) tub barvy. Poslední tubu nespotřebujeme celou, 55 kapek nám zbude.

U ostatních barev máme na výběr mezi koupením a mícháním. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že si tuby, které vypotřebujeme celé, prostě koupíme. Tak vznikne další tabulka 3. (Záporné číslo u tyrkysové značí, že máme barvu navíc.)

barva	tub	zbývá pokrýt (v kapkách)	možnosti získání
tyrkysová	8	−55	tyrkysová
zelená	4	87	zelená / (tyrkysová + žlutá)
červená	1	48	červená / (magenta + žlutá)
hnědá	2	81	hnědá / (magenta + žlutá + žlutá)
modrá	0	45	modrá / (tyrkysová + magenta)

Tabulka 3: Průběžný stav míchání barev.

Celý obrázek má

$$745 + 361 + 126 + 148 + 281 + 45 = 1706$$

čtverečků. I při nejlepším možném nákupu tub proto zbude minimálně 94 kapek barev.

Zbytek tyrkysové barvy můžeme použít buď na přípravu zelené, nebo modré barvy. Na obě nestačí. Použijeme-li ji na přípravu modré barvy (které nám stačí méně), zbude nám jedna kapka modré barvy, 32 kapek tyrkysové barvy a 77 kapek magenty.

Zbytek magenty použijeme na namíchání červené barvy. Na tu potřebujeme 24 kapek magenty a 24 kapek žluté. Zbyde tedy 53 kapek magenty a 76 kapek žluté barvy.

Zatím jsme nic neušetřili, ale ze zbylých barev už můžeme vytvořit 81 kapek hnědé barvy. Na tu je potřeba 27 kapek magenty a 54 kapek žluté barvy.

Nakonec nám zbylo 26 kapek magenty, 22 kapek žluté barvy, 32 kapek tyrkysové a kapka modré barvy. Zelenou si koupíme už namíchanou, a tak nám zbude ještě 13 kapek zelené. Dohromady máme

$$26 + 22 + 32 + 1 + 13 = 94$$

zbylých kapek. Více jsme tedy ušetřit nemohli.

Celkem bude Petr potřebovat 8 (resp. 6) tub tyrkysové, 0 modré, 1 magentu, 1 červenou, 1 žlutou, 2 hnědé a 5 tub zelené barvy.