Kategorie mladší

Úloha 1A Slon v porcelánu

Zapisovat si všechna čísla, co jsme už našli, na papír a pak se je snažit seřadit, či si je nějak odškrtávat, je zdlouhavé. Využijeme toho, že víme přesně jaká čísla na kuličkách byla. Byla to čísla od 1 do 30. My samozřejmě součet čísel od 1 do 30 známe, ale můžeme si spolu odvodit i vzoreček pro sečtení libovolně mnoha čísel jdoucích po sobě.

Vezměme si naší posloupnost a sečtěme první a poslední číslo, tím získáme nějaký výsledek, říkejme mu třeba s. Všimněme si, že pokud teď sečteme druhé a předposlední číslo, vyjde nám ta samá hodnota s. Když takto budeme pokračovat dál a dál, podaří se nám napárovat všechna čísla v naší posloupnosti (když nám jedna hodnota zbyde, nevadí, budeme se tvářit, že kamaráda měla). A kolik takovýchto dvojic můžeme udělat? Přesně polovinu počtu čísel, co jsme měli. Tedy součet posloupnosti je vlastně půlkrát počet členů oné posloupnosti krát součet prvního a posledního čísla.

A takhle rychle dokážeme sečíst libovolně dlouhou posloupnost po sobě jdoucích čísel. Tedy i od 1 do 30. To je třicet čísel dohromady. Půlka ze třiceti je patnáct, to bude naše číslo kterým budeme násobit. A vynásobíme jím součet prvního a posledního čísla, tedy $1 + 30 = 31$. A $31 \cdot 15 = 465$. To je výsledek součtu naší posloupnosti.

Při hledání ztracené kuličky tedy jen postupně přičítáme hodnoty kuliček, které máme. Tím získáme součet všech nalezených kuliček. Ten odečteme od součtu, který bychom měli mít v případě přítomnosti všech kuliček. A právě tento rozdíl je číslo na kuličce, která nám chybí.

Úloha 2A Obchůdek Veselých Kop

Pokud chceme Milošovi pomoct, aby zjistil, kdo nakupoval v Obchůdku Veselých Kop a co si zde koupil, musíme nejdříve rozklíčovat ono zmatené brebentění zvířátek. Při řešení vycházíme ze zadaných výroků.

Nejdříve použijeme výroky, které jsou vázány na nějakou osobu:

1. *Jen jeden kluk si koupil sportovní pomůcku.*

   Alois si mohl koupit Koloběžku/Lyže i Polevu/Chleba.
   Bohumil si mohl koupit Koloběžku/Lyže i Polevu/Chleba.

2. *Cecilčina hračka je o* 100 JC *levnější než Kamenná poleva na dort a Cecilka svou hračku zakoupila v obchodě ŽE nebo ČVUT.*

   Cecilka za svou hračku nemohla zaplatit 900 JC, zaplatila tedy 600/700/800 JC.
   Cecilka nakupovala v ŽE/ČVUT.

3. *Alois a Bohumil dohromady utratili* 1500 JC.

   Existují celkem čtyři kombinace různých cen, aby byl součet cen $A + B$ roven 1500 JC.
   ⇒ Alois zaplatil 700/800, 600/900 JC.
   ⇒ Bohumil zaplatil 800/700, 900/600 JC.

6. *Alois neutratil* 700 JC *a nenakupoval v obchodě DUŠE.*

   Alois nemohl zaplatit 700 JC. ⇒ Bohumil nemohl zaplatit 800 JC.
   Alois nakupoval v ŽE/ČVUT/OVK.

7. *Dáša je sportovkyně, tudíž si koupila jednu ze sportovních pomůcek, a nenakupovala v ČVUT.*

   Dáša si koupila Koloběžku/Lyže.
   Dáša nakupovala v ŽE/ČVUT/OVK.

8. *Lyže stály o* 100 JC *víc než Bohumilova hračka.*

   Bohumil zaplatil 600/700 JC (800 JC už B nemohl zaplatit kvůli 6. výroku).
   ⇒ Bohumil nemohl zaplatit 900 JC ⇒ Alois nemohl zaplatit 600 JC (vychází ze 3. výroku).

Následně se vrátíme k výrokům, které se neváží na žádnou osobu:

4. *Hračka z DUŠE stála o* 200 JC *víc než hračka z ŽE.*

   Hračka zakoupená v obchodě DUŠE je o 200 JC dražší než hračka zakoupená v obchodu ŽE.
   ⇒ Hračka zakoupená v obchodě DUŠE nemohla stát 600/700 JC.
   ⇒ Hračka zakoupená v obchodě DUŠE stála 800/900 JC.
   ⇒ Bohumil nemohl nakupovat v obchodě DUŠE.
   ⇒ pokud tedy Alois nemohl nakupovat v obchodě DUŠE (vychází z 6. výroku) a zároveň Cecilka nemohla nakupovat v obchodě DUŠE (vychází z 2. výroku).
   ⇒ Dáša nakupovala v obchodě DUŠE.

9. *Hračka z DUŠE nestála* 800 JC.

   Hračka zakoupená v obchodě DUŠE nemohla stát 800 JC.
   ⇒ Hračka zakoupená v obchodě DUŠE stála 900 JC (600 ani 700 JC už nemohla stát kvůli 4. výroku).
   ⇒ Alois nemohl zaplatit 900 JC. ⇒ Bohumil nemohl zaplatit 600 JC.
   ⇒ Alois zaplatil 800 JC. ⇒ Bohumil zaplatil 700 JC.
   ⇒ Když víme, jaké ceny zaplatili A, B a D, víme i cenu, kterou zaplatila C. ⇒ Cecilka zaplatila 600 JC.

Nyní se k výrokům znovu vrátíme a doplníme zbývající informace:

2. *Cecilčina hračka je o* 100 JC *levnější než Kamenná poleva na dort a Cecilka svou hračku zakoupila v obchodě ŽE nebo ČVUT.*

   Cecilka zaplatila 600 JC.
   ⇒ Poleva stála 700 JC. ⇒ Bohumil si koupil Polevu. ⇒ Alois si musel koupit Koloběžku/Lyže.

4. *Hračka z DUŠE stála o* 200 JC *víc než hračka z ŽE.*

   Hračka zakoupená v obchodě DUŠE stála 900 JC. ⇒ Hračka zakoupená v obchodě ŽE stála 700 JC.
   ⇒ Bohumil nakupoval v ŽE.
   ⇒ Cecilka nakupovala v ČVUT (v jiném obchodě nemohla nakupovat, což plyne z 2. výroku).
   ⇒ Když víme, ve kterých obchodech nakupovali B, C, D, víme i obchod, ve kterém nakupoval A.
   ⇒ Alois nakupoval v obchodě OVK.

8. *Lyže stály o* 100 JC *víc než Bohumilova hračka.*

   Cena Lyží byla o 100 JC vyšší než cena, kterou zaplatil B.
   ⇒ Lyže stály 800 JC. ⇒ 800 JC zaplatil Alois. ⇒ Alois si koupil Lyže.
   ⇒ Dáša si nemohla koupit Lyže. ⇒ Dáša si koupila Koloběžku.
   ⇒ Když víme, které hračky si koupili A, B a D, víme i hračku, kterou si koupila C. ⇒ Cecilka si koupila Chleba.

Nepoužili jsme tedy 5. výrok, kterým si nyní můžeme zkontrolovat správnost našeho řešení.

Pro přehlednost jsou zde všechny výše uvedené informace sepsané v přehledové tabulce 1. Výroky, které jsme v průběhu řešení vyřadili jsou vyznačeny červenou barvou a na druhém řádku každé buňky se nachází správné řešení.

	HRAČKA	OBCHOD	CENA
Alois	Koloběžka/Lyže i Poleva/Chleba Lyže	ŽE/ČVUT/OVK OVK	700/800 JC, 600/900 JC 800 JC
Bohumil	Koloběžka/Lyže i Poleva/Chleba Poleva	DUŠE ŽE	800/700 JC, 900/600 JC 700 JC
Cecilka	Chleba	ŽE/ČVUT ČVUT	600/700/800 JC 600 JC
Dáša	Koloběžka/Lyže Koloběžka	ŽE/OVK/DUŠE DUŠE	900 JC

Tabulka 1: Přehledová tabulka řešení.

Postupů, jak doplnit tabulku výše je samozřejmě více a informace můžeme doplňovat z různém pořadí, ale výsledek bude vždy stejný. Mravenečníkovi Milošovi tedy můžeme říct, že v Obchůdku Veselých Kop nakupoval Alois a koupil si zde Lyže s komínem.

Úloha 3A Malování kraslic

Pro případ, že vajíčka malují pouze tři surikaty, je nejdůležitější určit, kde by měla Silvie sedět.

Pokud by seděla uprostřed, tak by mohla skončit s malováním pouze v případě, že ona sama žádná vajíčka nemá a její sousedky také ne. Kdyby by její sousedky totiž nějaká vajíčka ještě měly, tak by se o ně se Silvií podělily. Tato varianta pro ni však není ideální, protože by skončila zároveň s ostatními a ona chce skončit první.

Další možnost je, že by si Silvie sedla doleva na kraj. To by mohla skončit první, pokud by došla vajíčka jí i surikatě uprostřed. Surikata vlevo by musela ještě malovat, aby nedošlo ke společnému odchodu jako v předchozím případě. Problém je, že k této situaci vůbec nedojde. Silvie chce totiž mít na začátku nejvíce vajíček. Aby mohla skončit jako první, potřebuje alespoň část jejích vajíček předat sousedce. Silviina sousedka si však bude brát vajíčka primárně od surikaty, kterou má po pravé ruce. Od Silvie by si je vzala pouze v případě, že by třetí surikata neměla žádná vajíčka a tudíž odešla.

Zbývá tedy poslední možnost. Silvie musí sedět vpravo. Surikata vedle ní musí mít co nejméně vajíček, aby si nějaká mohla vzít od Silvie. Surikata vlevo musí mít dostatek vajíček na to, aby jí zbyla i po odchodu Silvie. Z těchto pravidel vyplývá, že pokud mají namalovat 14 vajíček, může to Silvie vyřešit například podle tabulky 2.

	Gábina	Ester	Silvie
začátek	6 vajíček	1 vajíčko	7 vajíček
po 1 vajíčku	5 vajíček	0 vajíček	6 vajíček
pauza	5 vajíček	3 vajíčka	3 vajíčka
po 4 vajíčkách	2 vajíčka	0 vajíček	0 vajíček
pauza	1 vajíčko	1 vajíčko	odchází

Tabulka 2: Řešení s třemi surikatami.

V případě, že má Silvie více spolupracovnic a nechce sedět na kraji, stačí po její pravé ruce přidat surikatu, které dojdou vajíčka ve stejnou chvíli jako Silvii. Pojmenujme ji třeba Agáta. Silvie si od Agáty tudíž nebude muset žádná vajíčka brát. Agáta tedy musí mít na začátku přesně tolik vajíček, kolik jich Silvie stihne namalovat. Aby Agáta neodešla zároveň se Silvií, potřebujeme po její pravé ruce přidat další sousedku, která se s ní o vajíčka podělí. Agátina sousedka by tedy měla mít více vajíček než Agáta, ale méně než Silvie.

	Gábina	Ester	Silvie	Agáta	Agátina sousedka
začátek	6 vajíček	1 vajíčko	7 vajíček	4 vajíčka	6 vajíček
po 1 vajíčku	5 vajíček	0 vajíček	6 vajíček	3 vajíčka	5 vajíček
pauza	5 vajíček	3 vajíčka	3 vajíčka	3 vajíčka	5 vajíček
po 4 vajíčkách	2 vajíčka	0 vajíček	0 vajíček	0 vajíček	2 vajíčka
pauza	1 vajíčko	1 vajíčko	odchází	1 vajíčko	1 vajíčko

Tabulka 3: Řešení s více surikatami.

Úloha 4A Knihovna

Nejprve si představme, co vůbec chceme od robotů, a pak to převedeme do jejich jazyka.

Fungovat by mohl postup, kdy by robot nejprve přišel, a mezi všemi knihami našel tu s nejnižším číslem. Tu by následně prohodil s knihou na pozici 0. Pak by totéž zopakoval, ale pozice 0 už by ho nezajímala (tu má zaplněnou správnou knihou, jejíž nejnižší hodnota by mu nyní už jen překážela). Hledal by tedy minimální číslo od pozice 1 dále. Tu by pak prohodil právě s pozicí 1. Takto by mohl pokračovat až do samotného konce, tedy do situace, kdy by mezi 2 posledními knihami našel tu menší, zařadil by ji na předposlední pozici. Pak by mu zbyla jen jedna, kterou by neměl s čím porovnat a zůstala by mu tedy na nejvyšší pozici. V tento moment by se měl zastavit.

Máme tedy představu jak chceme aby robot fungoval, a nyní je třeba to přeložit.

V našem výsledném příkazu budeme mít určitě jedno "opakuj dokud" - konkrétně dokud nedojdeme k poslední knize. K tomu abychom věděli, která je poslední, musíme napřed zjistit jejich počet, a uložit si jej třeba do A, tedy

```
A ← zjisti počet knih
```

Následovat bude krok, kdy si uvědomíme, že vzhledem k tomu že první kniha je na pozici 0, druhá kniha na pozici 1 atd., tak u počtu knih A bude poslední pozice A-1. Uložme si tuto nejvyšší pozici například pod písmeno D.

Další proměnnou (třeba B) budeme chtít takovou, která se bude odvíjet od počtu zbývajících knížek. S každou správně zařazenou knihou se tak k tomuto B přičte 1, a B tak bude značit tyto „správně zařazené knihy“. Takže naše „opakuj dokud“ bude obsahovat právě A a B (skončíme ve chvíli, kdy počet správně zařazených knih bude odpovídat celkovému počtu knih). Máme již tedy toto:

```
A ← zjisti počet knih
Opakuj dokud A se nerovná B {
    B pricti 1
}
```

Ještě než ale k B neboli „počtu správně zařazených knih“ přičteme 1, tak chceme tu knihu zařadit. Budeme mít tedy určitě krok k vyhledávání knížky s nejnižší hodnotou mezi všemi zbývajícími. Nejvyšší pozice je uložená v D a do této pozice budeme knihy vždy prohledávat. Nyní je jen otázka kde začít. U první správně zařazené knihy, tedy kdy B=1 budeme chtít vynechat pozici 0; u B=2 chceme vynechat pozici 0 a 1 atd. Takže pozice od které budeme prohledávat knihy bude přímo B. Přibývá nám tedy pokyn, v němž si tuto hodnotu uložíme třeba do C

```
C ← najdi minimum od B do D
```

Pak ještě chceme tuto knihu s nejnižší hodnotou dostat vždy na první pozici v rozsahu, který jsme prohledávali, tedy na B. Logicky tedy přibývá krok

```
prohoď C B
```

a máme tak nyní pokyny v robotí řeči v podobě

```
A ← zjisti počet knih
D ← A - 1
Opakuj dokud A se nerovná B {
    C ← najdi minimum od B do D
    prohoď C B
    B pricti 1
}
```

Zkontrolujme co program nyní dělá. Zjistí nám počet knih, a následně vždy najde nejnižší knihu mezi pozicemi první a poslední zatím neseřazené knihy. Tuto knihu pak prohodí s první knihou v prohledávaném rozsahu a další kolo začíná na vedlejší pozici. Toto dělá dokud není počet již seřazených knih stejný jako celkový počet knih. Tímto jsme tedy našli program, co nám seřadí knížky, a orangutan si tak už nemusí dělat starosti.

Úloha 5A Obrazce v trávě

Obrazec, který by byl tvořen z osmi stometrových úseků a obsahoval v sobě tři trojúhelníky a tři čtyřúhelníky, jde vytvořit hned několika způsoby.

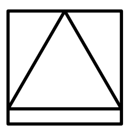
Nejlepší z nich je ten, u kterého Béďa využije 800 metrů na maximum tak, že mu nezbude benzín a nebude tak muset dělat zbytečný přejezd někde stranou po trávě navíc. Ten získáme tím, že se zkusíme soustředit jen na trojúhelníky, a budeme doufat, že čtyřúhelníky pak nějak získáme z jejich kombinace.

Benzín nám určitě nevystačí na to, abychom udělali 3 samostatné trojúhelníky o straně 100 m. Budou tedy muset sdílet nějaké strany. Toho jde docílit dvěma přístupy. První je, že uděláme rovnostranný trojúhelník o stranách 200 m, a v jeho rozích uděláme dvě stometrové přepážky, které nám utvoří další dva malé trojúhelníky (obrázek 1a). Tím máme vypotřebovaných všech 800 L. Koukněme se tedy, jak je to se čtyřúhelníky. První tam vidíme jednoznačně v zbylé části velkého trojúhelníku. A pokud k této části přidáme napřed zvlášť jeden a pak druhý malý trojúhelník, dostaneme další dva lichoběžníky. Tím máme první správné řešení. Další možnost je nevyužít všech 800 L na obrazec, a posledních 100 L místo toho vyplýtvat někde stranou. Pokud toto Břéťovi nevadí, nemusí udělat velký trojúhelník, ale může spojit dohromady vedle sebe tři malé trojúhelníčky (obrázek 1b). Vznikne mu tak jeden velký lichoběžník, ve které jsou obsaženy také dva rovnoběžníky. Zadání tak toto řešení odpovídá také.

(a) (b)

Obrázek 1

Mimo tyto návrhy je pak zajímavá ještě jedna další možnost. Opět je na ní vypotřebováno méně benzínu a je třeba ho tak vypotřebovat stranou, nicméně požadované tvary se tu najdou také. Břéťa tentokrát udělá čtverec s stranami 100 metrů, a do něj udělá rovnostranný trojúhelník také se stranami 100 metrů. (Na papíře to můžeme udělat tak, že si vybereme střed strany čtverce, a z ní uděláme kružnici s poloměrem stejným jako je strana čtverce. Spojíme-li pak průsečíky této kružnice a čtverce s původním vybraným bodem, máme rovnostranný trojúhelník). I tady opět najdeme jak dostatek trojúhelníků, tak čtyřúhelníků (dva obdélníky a jeden velký čtverec – viz obrázek 2)



Obrázek 2

Břéťa má tak možností dost, a může se vybrat která z nich se mu zamlouvá nejvíce. Přednost dá ale asi té první, protože chtěl benzín využít na maximum, a dělat zbytečnou čáru navíc někde stranou je přece jenom škoda.

Kategorie starší

Úloha 1B Bleší cirkus

První Bertinou starostí bylo vysvětlit zvídavým mravencům, kde se v průběhu houpání bude pohybovat nejrychleji a kde nejpomaleji. Na to jí ve své podstatě stačí úplně jednoduchá úvaha, nebo se může rozhodnout vzít to trochu vědečtěji.

Jednoduchá úvaha spočívá v tom, že si uvědomí, co se děje ve chvíli, kdy se vyhoupne do nejvyšší polohy, a pak zase klesá. V ten moment mířil směr jejího pohybu napřed nahoru, ale hned v další okamžik už její pohyb směřuje na opačnou stranu. Jelikož se změnil směr pohybu, změnil se i směr rychlosti. A pokud se toto změnilo, musel být v mezičase moment, kdy chvíli zůstala stát na místě – tedy se nepohybovala. To, že nemá v ten moment žádnou rychlost vzhledem k okolí, je zajisté ta vůbec nejnižší rychlost, jaké může dosáhnout. Takže v místě, kde je nejvýše, je i nejpomalejší. Co se týká toho, kde je nejrychlejší, tak tam může vyjít z úvahy, že na obou dvou koncích zhupu je nejpomalejší, a odtamtud tak bude z obou stran vždy postupně zrychlovat. Když tedy na jedné straně zpomalí, pak zrychlí a na druhé straně má být zase pomalá, je jasné, že v určitý moment musí mít maximální rychlost, a pak už jen zpomalovat. Vzhledem k tomu že toto se bude dít z obou stran stejně, lze odvodit, že tenhle speciální bod bude přímo veprostřed mezi oběma kraji, tedy ve chvíli, kdy je Berta nejníže. Dává to smysl i ve chvíli kdy si uvědomíme, že v momentu kdy je nejníže vyráží vzhůru proti působení gravitace, která ji bude nějakým způsobem zpomalovat.

Vědečtější postup už zahrnuje uvažování o energiích. Konkrétně o energii, které má těleso v určité výšce na nějž působí gravitace (takzvaně polohová energie), a kinetickou energii, kterou mají pohybující se tělesa. Tyto energie se pak průběžně mění z jedné na druhou (jde si to představit tak, že když pustím míček z určité výšky, tak čím je níže a má nižší polohovou energii, tím více naopak bude mít kinetické energie). V tomhle případě uvažujeme jen tyhle dvě energie, ve skutečnosti by ještě docházelo k tomu, že by se malá část energie předávala okolním molekulám vzduchu do kterých letící Berta vráží a spolu s tím i ke spoustě dalších energetických výdajů, které jsou ale tak maličké, že je nyní můžeme zanedbat. Tato úvaha pak vede k tomu, že v místě kde se polohová energie nejvíce snížila je Berta nejrychlejší, a naopak, tam kde je nejvýše už jí nezbývá žádná energie získaná z pohybu. Docházíme tak opět k tomu, že nejvýše je nejpomalejší a nejníže nejrychlejší.

A co připouštění vody a opatrný pan principál Pakobylka Pavel? Ten si nemusí dělat starosti. Jelikož je nádrž svrchu otevřená, nehrozí, že by se vor rozmačkal o strop a je tak možné připustit jakékoli množství vody. Vor se přece vždy zvedne spolu hladinou, a množství vody co už je pod ním na to nemá žádný vliv!

Úloha 2B Výživná

Připomeňme si na začátek tabulku 4 s obsahem vitamínu ze zadání.

	mrkev	jablko	banán
Vitamín A $\left[\frac{mg}{kg}\right]$	35	0,5	0,28
Vitamín C $\left[\frac{mg}{kg}\right]$	60	300	50
Cena $\left[\frac{JC}{kg}\right]$	26	22	80

Tabulka 4: Obsah vitamínů v surovinách.

Z tabulky je vidět, že banán je minimálně třikrát dražší a vitamínů je v něm ze všech nejméně, tudíž v dortu vůbec nebude. Můžeme si to ještě ověřit přepočítáním množství vitamínů v surovinách na jeden JC (viz tabulku 5).

	mrkev	jablko	banán
Vitamín A $\left[\frac{mg}{JC}\right]$	1,346	0,023	0,004
Vitamín C $\left[\frac{mg}{JC}\right]$	2,308	13,636	0,625

Tabulka 5: Obsah vitamínů v surovinách v přepočtu na JC.

Z tabulky je zcela zřejmé, že banán v dortu nebude, tudíž sestavíme výslednou směs na dort pouze z jablek a mrkví. K tomu využijeme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kde za neznámé x a y označíme množství mrkve a jablek. Soustava bude vypadat následovně:

$$35 \cdot x + 0{,}5 \cdot y = 48,$$
$$60 \cdot x + 300 \cdot y = 1440.$$

Z první rovnice převedením $35 \cdot x$ na pravou stranu a vynásobením dvěma vyjádříme $y = 96 - 70 \cdot x$. To dosadíme do druhé rovnice a postupnými úpravami ji vyřešíme:

$$\begin{aligned} 60 \cdot x + 300 \cdot (96 - 70 \cdot x) &= 1440, \\ 60 \cdot x + 28800 - 21000 \cdot x &= 1440, \qquad / + 20940 \cdot x - 1440 \\ 27360 &= 20940 \cdot x, \\ 20940 \cdot x &= 27360, \\ x &= \frac{27360}{20940} = \frac{456}{349} \doteq 1{,}3\,\text{kg}. \end{aligned}$$

Ještě dopočteme

$$y = 96 - 70 \cdot x = 96 - 70 \cdot \frac{456}{349} = \frac{1584}{349} \doteq 4{,}54\,\text{kg}.$$

Nyní víme, kolik bude použito surovin, můžeme tedy přepočítat hmotnosti na cenu, abychom zjistili, kolik bude dort stát. Vyjde

$$1{,}3\,\text{kg} \cdot 26\,\frac{\text{JC}}{\text{kg}} + 4{,}54\,\text{kg} \cdot 22\,\frac{\text{JC}}{\text{kg}} = 133{,}68\,\text{JC}.$$

Dort pro Bětku bude Jonáše stát 133,68 JC.

Úloha 3B Natírání oken

Na první pohled to vypadá, že vymyslet nějaký efektivní postup bude celkem náročné, avšak to, jaké práce může kdo dělat a jak dlouhou dobu zabírají nám dokáže celou věc značně usnadnit. Můžeme si povšimnout, že na sundávání oken je určitě potřeba Vladimír a k němu ještě jeden pomocník. Vladimír tedy bude prvních $214 \cdot 3\,\text{min} = 642\,\text{min}$ práce sundávat okna. To je celý první den, dvě hodiny a 42 minut. Ještě je třeba zkontrolovat, že se jim nestane, že by museli na konci dne přerušit práci na jednom okně v půlce. Sundání jednoho okna zabere tři minuty, potřebujeme tedy ověřit, že osm hodin je dělitelných třemi minutami. Osm hodin je $8\,\text{hod} \cdot 60\,\frac{\text{min}}{\text{hod}} = 480\,\text{min}$,

$$\frac{480\,\text{min}}{3\,\text{min}} = 160,$$

tedy beze zbytku dělitelné, tedy nebudou muset přerušovat práci na jednom okně v půlce.

Po sundání je okno třeba umýt od prachu a to může mezitím dělat buď Alenka nebo Marie, podle toho, která zrovna nepomáhá se sundáváním oken. Pokud bude pomáhat Marie, tak Alenka by mohla rovnou začít umytá okna natírat. Za první den by tak umyla (tři minuty je potřeba počkat na sundání prvního okna

$$\frac{480\,\text{min} - 3\,\text{min}}{5\,\frac{\text{min}}{\text{okno}} + 20\,\frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 19{,}08\text{ okna},$$

tedy 19 oken by stihla umýt i natřít a zbydou jí dvě minuty volna. Druhý den stihne za dobu co Vladimír s Marií sundávají okna umýt a natřít z jedné strany dalších

$$\frac{164\,\text{min}}{5\,\frac{\text{min}}{\text{okno}} + 20\,\frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 6{,}56\text{ oken},$$

tedy stihne umýt i natřít šest oken a ve zbylých čtrnácti minutách může umýt ještě další dvě okna, z nichž jedno nechá Vladimírovi, aby měl co natírat až skončí se sundáváním a druhé může začít rovnou natírat sama.

Protože umytí jednoho okna trvá kratší dobu než natření i dvou oken, tak Marie za dobu, co Alenka s Vladimírem budou natírat stihne sundaná okna umývat ti tak budou mít pořád co natírat. Zároveň natírání je ze všech prací časově nejnáročnější, takže se vyplatí, aby obě zvířátka, co mohou natírat, natírala po co nejdelší možnou dobu.

Do konce druhého dne zbývá Vladimírovi a Marii $480\,\text{min} - 164\,\text{min} = 316\,\text{min}$, Alence o čtyři minuty více. Za tu dobu Vladimír stihne natřít

$$\frac{316\,\text{min}}{20\,\frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 15{,}8\text{ oken},$$

tedy natře celých patnáct oken a ještě mu šestnáct minut zbyde (natřít další okno nestihne). Alenka stihne za zbytek dne natřít

$$\frac{320\ \text{min}}{20\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 16.$$

Marie stihne umýt

$$\frac{316\ \text{min}}{5\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 63{,}2\ \text{okna},$$

tedy celých šedesát tři oken a zbyde jí minuta volna.

Po natření potřebují okna 12 hodin schnout. K tomu by ale mělo stačit nechat je odložené přes noc, takže se stačí ujistit, že přes den stihnout umýt méně než všech 214 oken, protože v tom případě by pak chtěli pokračovat natíráním druhé strany okna, kterému ještě neuschla strana první. Zároveň nám to zjednoduší počítání, protože nebudeme muset rozlišovat kdy se natírá která strana okna, stačí nám počítat, že potřebujeme natřít $2 \cdot 214 = 428$ stran oken.

Po dvou dnech tak budou mít všechna okna sundaná, umytých jich bude Alenkou devatenáct z prvního dne a osm z druhého a dalších šedesát tři umyje Marie druhý den, tedy celkem 90 a zbývá jich umýt $214 - 90 = 124$. Natřených z jedné strany jich bude devatenáct z prvního dne od Alenky, šest z první části druhého dne, šestnáct z druhé části a ještě dalších patnáct, co druhý den natře Vladimír, tedy celkem 56, zbývá natřít ještě $428 - 56 = 372$ stran oken.

Marie stihne za den umýt

$$\frac{480\ \text{min}}{5\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 96\ \text{oken},$$

takže všechna okna bude mít umytá v průběhu čtvrtého dne, konkrétně na čtvrtý den jí jich zbyde $124 - 96 = 28$, která umyje za

$$28\ \text{oken} \cdot 5\ \frac{\text{min}}{\text{okno}} = 140\ \text{min},$$

tedy za dvě hodiny a dvacet minut. Za den stihnout Alenka s Vladimírem natřít

$$2 \cdot \frac{8\ \text{hod} \cdot 60\ \frac{\text{min}}{\text{hod}}}{20\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 48\ \text{oken},$$

všechna okna z obou stran tedy budou natřená za dalších

$$\frac{372\ \text{stran}}{48\ \frac{\text{oken}}{textden}} = 7{,}75\ \text{dne},$$

tedy natírání dokončí v průběhu desátého dne. Na další činnosti jim zbyde ještě $0{,}25 \cdot 480\ \text{min} = 120\ \text{min}$. Do začátku jedenáctého dne budou ještě okna natřená desátého dne schnout. Těch bude

$$2 \cdot \frac{0{,}75 \cdot 480\ \text{min}}{20\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 36\ \text{oken}.$$

Marie může ve chvíli, kdy skončí s umýváním sundaných oken, začít s oškrabáváním a umýváním natřených oken. Do konce desátého dne jich stihne oškrábat a umýt

$$\frac{6 \cdot 480\ \text{min} + \left(480\ \text{min} - 140\ \text{min}\right)}{10\ \frac{\text{min}}{\text{okno}} + 5\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 214{,}666,$$

což je více, než je potřeba, protože oken je celkem 214 a některá ještě nebudou desátý den suchá. Do konce desátého dne tedy Marie stihne oškrábat a umýt všechna okna, která do té doby stihla uschnout (tedy $214 - 36 = 178$).

Ve chvíli, kdy Vladimír s Alenkou skončí s natíráním, tak se mohou pustit do věšení oken, která Marie mezitím oškrábala a umyla. Za zbytek desátého dne jich stihnout pověsit

$$\frac{120\ \text{min}}{3\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 40\ \text{oken}.$$

Po konci desátého dne jim zbývá pověsit $214 - 40 = 174$ oken a 36 z nich musí předtím ještě Marie oškrábat a umýt. Za jedenáctý den stihne Marie oškrábat a umýt

$$\frac{480\ \text{min}}{10\ \frac{\text{min}}{\text{okno}} + 5\ \frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 32\ \text{oken}$$

a Vladimír s Alenkou stihnou pověsit

$$\frac{480\,\text{min}}{3\,\frac{\text{min}}{\text{okno}}} = 160\text{ oken.}$$

Na poslední, dvanáctý den tak zbývá oškrábání a umytí čtyř oken a pověšení čtrnácti oken, což už zvířátka hravě zvládnou a ještě jim většina dne zbyde.

Marabu Marie sice nepracovala celou dobu (desátý den mohla umýt a oškrábat pouze ta okna, co už byla uschlá, zbylo jí tedy 80 min volného času, to je ale méně, než zvířátka dohromady potřebují k dodělání práce dvanáctý den, takže za méně dní práci udělat nelze, i když by se jednotlivé činnosti uspořádaly nějak jinak a třeba by se ušetřilo čekání na schnutí některých oken do dvanáctého dne.

Celou akci tak musí začít alespoň dvanáct dní před koncem prázdnin.

Úloha 4B Pouštění draků

Nejprve spočítáme objemy obou draků. Drak s trojúhelníkovým průřezem je celý jedním jehlanem, takže k výpočtu nám stačí spočítat obsah podstavy, tedy obsah deltoidu, který si můžeme rozdělit na dva trojúhelníky – dolní a horní. Ty mají společnou stranu o délce 1 m, dále má jeden výšku 1 m a druhý 0,5 m. Celý deltoid tak má obsah

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1\,\text{m} \cdot 1\,\text{m} + \frac{1}{2} \cdot 1\,\text{m} \cdot 0{,}5\,\text{m} = 0{,}75\,\text{m}^2.$$

Celý drak tak má objem

$$V = \frac{1}{3} \cdot 0{,}75\,\text{m}^2 \cdot 0{,}3\,\text{m} = 0{,}075\,\text{m}^3 = 75\,\text{L}.$$

Draka s lichoběžníkovým průřezem můžeme v tomto průřezu pomyslně rozříznout na dva jehlany se společnou lichoběžníkovou základnou. Jeden má výšku 1 m, druhý 0,5 m. Obsah lichoběžníkové základny (průřezu draka) je

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(1\,\text{m} + 0{,}6\,\text{m}\right) \cdot 0{,}2\,\text{m} = 0{,}16\,\text{m}^2.$$

Objem celého draka je tak

$$V = \frac{1}{3} \cdot 0{,}16\,\text{m}^2 \cdot 1\,\text{m} + \frac{1}{3} \cdot 0{,}16\,\text{m}^2 \cdot 0{,}5\,\text{m} = 0{,}08\,\text{m}^3 = 80\,\text{L}.$$

Větší objem tedy má drak s lichoběžníkovým průřezem.

Teď spočítáme povrch draka s trojúhelníkovým průřezem. Pokud vypočteme délky hran vedoucích z podstavy k vrcholu jehlanu a hran po obvodu deltoidu, budeme moci obsah jednotlivých trojúhelníků tvořících plášť jehlanu spočítat pomocí Heronova vzorce. Délka kratších obvodových hran deltoidu je podle Pythagorovy věty

$$\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2}\,\text{m} = \sqrt{50}\,\text{dm},$$

délka delších obvodových stran deltoidu je

$$\sqrt{0{,}5^2 + 1^2}\,\text{m} = \sqrt{125}\,\text{dm}.$$

Dále bychom potřebovali znát délku ramen trojúhelníkového průřezu. Tu můžeme také spočíst z Pythagorovy věty, je to přepona trojúhelníku s odvěsnami 0,5 m a 0,3 m. Hledaná délka je pak $\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2}\,\text{m} = \sqrt{34}\,\text{dm}$. Pro spočtení délek zbylých dvou hran vedoucích od podstavy k vrcholu jehlanu použijeme trojúhelník, který je průřezem draka „z boku“ (má spodní stranu o délce 1,5 m a k ní kolmou výšku 0,3 m). Tento trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé se společnou výškou, z nichž jeden bude mít spodní odvěsnu dlouhou 1 m a druhý 0,5 m. Hrany, jejichž délky hledáme, jsou pak přeponami těchto trojúhleníků. Přepona kratšího trojúhelníku je $\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2}\,\text{m} = \sqrt{34}\,\text{dm}$ a přepona delšího je $\sqrt{1\,\text{m}^2 + 0{,}3\,\text{m}^2} = \sqrt{109}\,\text{dm}$.

Teď známe délky všech stran povrchových trojúhelníků a víme, že povrch se skládá ze dvou menších a dvou větších trojúhelníků. Dosadíme-li délky jejich strany do Heronova vzorce, získáme jejich obsah. Obsah menšího trojúhelníku je

$$S_m = \sqrt{s \cdot \left(s - \sqrt{34}\,\text{dm}\right) \cdot \left(s - \sqrt{34}\,\text{dm}\right) \cdot \left(s - \sqrt{50}\,\text{dm}\right)},$$

kde

$$s = \frac{\sqrt{34}\,\text{dm} + \sqrt{34}\,\text{dm} + \sqrt{50}\,\text{dm}}{2} \doteq 0{,}937\,\text{m},$$

takže obsah menšího trojúhelníku je $S_m \doteq 0{,}164\,\text{m}^2$. Obsah většího trojúhelníku je

$$S_v = \sqrt{s \cdot \left(s - \sqrt{34}\,\text{dm}\right) \cdot \left(s - \sqrt{109}\,\text{dm}\right) \cdot \left(s - \sqrt{125}\,\text{dm}\right)},$$

kde

$$s = \frac{\sqrt{34}\,\mathrm{dm} + \sqrt{109}\,\mathrm{dm} + \sqrt{125}\,\mathrm{dm}}{2} \doteq 1{,}37\,\mathrm{m},$$

takže obsah menšího trojúhelníku je $S_v \doteq 0{,}301\,\mathrm{m}^2$. Povrch celého draka s trojúhelníkovým průřezem je tak

$$S = 2 \cdot S_m + 2 \cdot S_v = 2 \cdot 0{,}164\,\mathrm{m}^2 + 2 \cdot 0{,}301\,\mathrm{m}^2 \doteq 0{,}93\,\mathrm{m}^2.$$

Zbývá nám spočítat už jen povrch draka s lichoběžníkovým průřezem. Ten můžeme rozdělit na šest trojúhelníků. Výšky prostředních trojúheníků (při pohledu shora) jde spočítat pomocí Pythagorovy věty jako délky přepon pravoúhlých trojúhelníků, na které jde rozdělit trojúhelník, který tvoří průřez draka při pohledu z boku. Výška menšího trojúhelníku je $\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}2^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{29}\,\mathrm{dm}$, výška většího je $\sqrt{1^2 + 0{,}2^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{104}\,\mathrm{dm}$. Obsah trojúhelníků pak spočítáme pomocí běžného vzorce jako polovinu součinu délky strany a na ní kolmé výšky. Obsah prostředních trojúhelníků tak je

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{29}\,\mathrm{dm} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{104}\,\mathrm{dm} \doteq 0{,}162\,\mathrm{m}^2 + 0{,}306\,\mathrm{m}^2 = 0{,}468\,\mathrm{m}^2.$$

Pro výpočet obsahu krajních trojúhelníků pomocí Heronova vzorce už potřebujeme spočítat jen délky ramen prostředních rovnoramenných trojúhelníků a délky ramen lichoběžníkového průřezu, jelikož délky obvodových hran podstavy již známe (jsou stejné jako u trojúhelníkového draka). Délku ramen prostředních trojúhelníků ale snadno spočítáme pomocí Pythagorovy věty jako přeponu trojúhelníku s odvěsnami o délce výšky prostředních trojúhelníků a poloviny jejich společné strany. Délka ramena menšího prostředního trojúhelníku je tak

$$\sqrt{\left(\sqrt{29}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}6\right)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{38}\,\mathrm{dm}$$

a délka ramene většího prostředního trojúhelníku je

$$\sqrt{\left(\sqrt{104}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}6\right)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{113}\,\mathrm{dm}.$$

Délky ramen lichoběžníku jsou

$$\sqrt{\left(\frac{1 - 0{,}6}{2}\right)^2 + 0{,}2^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{8}\,\mathrm{dm}.$$

Pomocí Heronova vzorce už pak lehce dopočteme, že menší krajní trjúhelník má obsah $0{,}087\,\mathrm{m}^2$ a větší má obsah $0{,}150\,\mathrm{m}^2$. Povrch celého draka s lichoběžníkovým průřezem je tak

$$S = 0{,}468\,\mathrm{m}^2 + 2 \cdot 0{,}087\,\mathrm{m}^2 + 2 \cdot 0{,}150\,\mathrm{m}^2 \doteq 0{,}94\,\mathrm{m}^2.$$

Větší povrch tak má lichoběžníkový drak, ale rozdíl je jen malý.

Úloha 5B RNA

Snažíme se zjistit, jestli jde poskládat libovolně rozšiřitelná posloupnost A,U,G a C tak, že se nám nespojí. Důležité tedy bude, abychom na celé liáně nenašli dva páry písmenek, co si odpovídají.

Začněme si stavět liánu jen z jednoho písmenka, to se nám samo na sebe nenapáruje. Třeba takto:

$$\underbrace{AAA\ldots AAA}_{n\text{-krát}}$$

Víme, že musíme mít stejný počet každého písmenka. Abychom si nepospojovali naše A, bylo by záhodné použít G nebo C. Obě varianty jsou si rovny, zvolíme tedy náhodně kupříkladu C. Tím nám vznikne tato posloupnost:

$$\underbrace{AAA\ldots AAA}_{n\text{-krát}}\underbrace{CCC\ldots CCC}_{n\text{-krát}}$$

Zastavme se teď nad tím, jaké páry písmenek máme v naší posloupnosti. Jsou tam AA, CC a jenou také AC. Na pár AA by se nám navázalo UU, to naštěstí v posloupnosti nemáme. Na CC by se navázalo GG a na AC by přišlo UG. Ani jeden z těchto párů se u nás nevyskytuje, takže zatím jsme spokojení.

Jenže je čas přidat ještě n-krát písmenko G a písmenko U. Musíme si dát pozor, abychom při jejich přidávání náhodou nevytvořili jednu ze tří dvojic písmen, které by se nám spárovaly s těmi páry, které už na lijáně máme a také, aby se nám nespárovaly samy mezi sebou.

Naštěstí písmena *U* a *G* se nám mezi sebou sama nespárují. Zbývá tedy dořešit, jak je přidat do řetězce tak, abychom nevytvořili *UU*, *GG*, nebo *AC*. Protože *UG* a *GU* jsou tedy naše jediná možnost, použijeme je na rozbití dvojice *AC*, protože by se nám na ni navázali. A protože dvě písmenka lze do dvojice (nejkratší možný úsek) uspořádat pouze čtyřmi způsoby (přičemž máme dva z nich zakázané), nezbývá nám než vytvářet jen přechody *UG* a *GU*. Jenže abychom z nich nevytvořili *UU* a *GG* budeme muset stavět takto:

$$\underbrace{\underbrace{UG}\,\underbrace{UG}\ldots\underbrace{UG}\,\underbrace{UG}}_{n\text{-krát}}$$

Když to potom zasadíme do našeho předchozího pokusu tak, aby se rozbilo *AC*:

$$\underbrace{AAA\ldots AAA}_{n\text{-krát}}\,\underbrace{\underbrace{UG}\,\underbrace{UG}\ldots\underbrace{UG}\,\underbrace{UG}}_{n\text{-krát}}\,\underbrace{CCC\ldots CCC}_{n\text{-krát}}$$

Vzniknou nám tím páry *AA*, *AU*, *UG*, *GU*, *GC* a *CC*. Pro dvojice *AU* a *GC* platí, že by se nám navázy samy na sebe, ale naštěstí, se v naší posloupnosti vyskytují jen jednou a tedy nejsou problém. O zbylé dvojice písmen jsme se cíleně postarali a tedy víme, že lze sestavit libovolně dlouhou liánu se stejným počtem každého z výběžků a přesto se nám nespáruje.