# Kategorie mladší

## Úloha 1A Pozorovací

Žofka si může udělat plánovací tabulku, kdo kdy bude ve které místnosti, která může vypadat třeba jako 1.

| | Aleš | Bětka | Franta | Jirka | Monča |
|---|---|---|---|---|---|
| Místnost s klíčem | | | | | |
| Komora pod schodištěm | | | | | |
| Terasa | | | | | |
| Sklep | | | | | |
| Jídelna | | | | | |

Tabulka 1: Žofčina plánovací tabulka

Možností je hodně, stačí aby v žádném sloupci ani řádku nebylo žádné číslo více než jednou. Může kupříkladu poslat na začátku kamarády do místnosti ve stejném řádku, jako je jejich sloupeček. Pak se v dalším kole posunou o jeden řádek níž, nebo z posledního řádku na první. Takto získá vyplněnou tabulku 2.

| | Aleš | Bětka | Franta | Jirka | Monča |
|---|---|---|---|---|---|
| Místnost s klíčem | 1. kolo | 5. kolo | 4. kolo | 3. kolo | 2. kolo |
| Komora pod schodištěm | 2. kolo | 1. kolo | 5. kolo | 4. kolo | 3. kolo |
| Terasa | 3. kolo | 2. kolo | 1. kolo | 5. kolo | 4. kolo |
| Sklep | 4. kolo | 3. kolo | 2. kolo | 1. kolo | 5. kolo |
| Jídelna | 5. kolo | 4. kolo | 3. kolo | 2. kolo | 1. kolo |

Tabulka 2: Vyplněná plánovací tabulka

A teď už stačí, aby si Žofka z každého řádku a z každého sloupce vybrala právě jedno políčko tak, aby si zároveň vybrala pro každé kolo nejvýše jedno políčko. Vychází nám třeba diagonála zleva nahoru, jako v tabulce 3.

| | Aleš | Bětka | Franta | Jirka | Monča |
|---|---|---|---|---|---|
| Místnost s klíčem | 1. kolo | 5. kolo | 4. kolo | 3. kolo | 2. kolo |
| Komora pod schodištěm | 2. kolo | 1. kolo | 5. kolo | 4. kolo | 3. kolo |
| Terasa | 3. kolo | 2. kolo | 1. kolo | 5. kolo | 4. kolo |
| Sklep | 4. kolo | 3. kolo | 2. kolo | 1. kolo | 5. kolo |
| Jídelna | 5. kolo | 4. kolo | 3. kolo | 2. kolo | 1. kolo |

Tabulka 3: Žlutě je vyznačeno, kde může Žofka pozorovat ostatní.

## Úloha 2A Šifrovačka

Pokud by začal Jindra řešit hned od začátku, měl by zatím hotových 30 šifer a 30 dní. Zůstává nám tedy 10 dní, které rozdělíme do času, který získal za pozdě odevzdané šifry.

Označme si den, kdy začal řešit soutěž jako $n$. Za den $n$ a každý den poté se mu do počtu dní přičte 1 den. Za šifru pro každý den předtím než začal se mu k počtu dní přičte hodnota vždy o 1 větší, t.j. když ji odevzdal ji v den $n$, tak ji odevzdal o nějaký počet dní později. Nakonec potřebujeme najít den, kde se nám nasčítá 10 dní za pozdě odevzdané úlohy.

1. den — $n$ — 30

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| přičte se dní k součtu | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| dní navíc | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | |
| celkem dní navíc | | | | | | 10 | 6 | 3 | 1 | | | | | | | | | | | |

1. den — $n = 5.$ den — 30

Pokud začal tedy Jindra řešit soutěž v pátý den, dostal za první šifru 5 dní, za druhou 4, za třetí 3, za čtvrtou 2 a za každou další, kterou vyřešil včas, po 1 bodě, celkem $5 + 4 + 3 + 2 + 1 \cdot 26 = 40$ dní.

Skutečně tedy začal řešit šifrovačku pátý den od jejího začátku.

## Úloha 3A Robobrouci

Mít tak celkovou hmotnost a znát počet součástek, všechno by bylo jednodušší! Stačilo by spočíst 12,5 % hmotnosti a 40 % počtu součástek.

Jelikož ani jedno nemáme, musíme oba grafy propojit nějak jinak. První graf se zaobírá počty součástek, druhý hmotností. Z prvního si grafu si můžeme spočítat celkovou hmotnost známých součástek přenásobenou nějakým neznámým množstvím $n$. Jinými slovy, jakou hmotnost by měly známé součástky, kdybychom měli $n$ součástek.

Pro součástku C je to

$$\frac{15}{100} \cdot n \cdot 12\,\text{bj} = 180 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj},$$

(kde bj značí broučí jednotky hmotnosti), pro součástku O je to

$$\frac{12{,}5}{100} \cdot n \cdot 16\,\text{bj} = 200 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj}$$

a pro součástku H vzchází

$$\frac{60}{100} \cdot n \cdot 1\,\text{bj} = 60 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj}.$$

Celkem tedy $(180+200+60) \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj} = 440 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj}$. Ve druhém grafu se dočteme, že známé součástky tvoří pouze 40 % celkové hmotnosti. Jedno procento hmotnosti tedy odpovídá $\frac{440}{40} \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj} = 11 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj}$. Šedesát procent hmotnosti odpovídá $60 \cdot 11 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj} = 660 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj}$. Tím jsme získali hmotnost neznámých součástek.

Ale jak se zbavit onoho $\frac{n}{100}$ bj? Snadno. Podle prvního grafu máme $12{,}5 \cdot \frac{n}{100}$ neznámých součástek. Jedna neznámá součástka má proto hmotnost

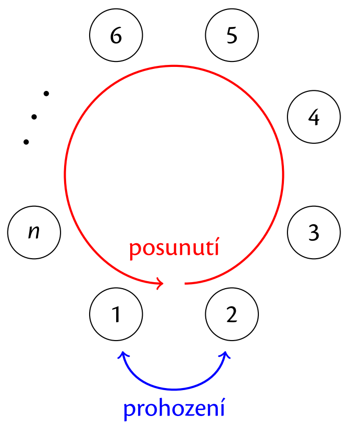
$$\frac{660 \cdot \frac{n}{100}\,\text{bj}}{12{,}5 \cdot \frac{n}{100}} = 52{,}8\,\text{bj}.$$

Celkový počet součástek se nám pokrátil. Kdybychom celou dobu počítali s nějakým určitým počtem součástek (ideálně se sto součástkami), všechno by vyšlo stejně.

Která je to ale součástka? Z nabízených se nejvíce blížíme k součástce Cr(52), Kamilino měření nejspíš nebylo tak přesné.

## Úloha 4A Štědrovečerní

Označme počet židlí u stolu jako $n$. Dvojici židlí v čele stolu, kde se myšky mohou prohodit, očíslujme 1 a 2 tak, aby 2 byla napravo od 1. Dále můžeme od 2 pokračovat směrem doprava v číslování židlí $3,4,\ldots,n$ – viz obrázek 1. Ze zadání přitom máme povoleny dvě operace: posunutí všech myšek naráz o jedno místo doprava a prohození myšek na židlích 1 a 2.




Obrázek 1: Židle u stolu a povolené operace. Na přesném tvaru stolu nezáleží, můžeme si jej představovat jako kruh.

Představme si nyní úplně libovolné cílové rozmístění myšek na židlích. Nechť $M_1$ je myška, která má sedět na židli 2, podobně označme $M_2$ myšku, která má sedět na židli 2, a tak dále. Popíšeme, jak myšky přemisťovat z libovolného výchozího rozestavení tak, abychom po konečném počtu kroků dostali myšku $M_i$ na židli $i$ pro každé $i = 1,2,3,\ldots,n$. Nejprve ale dvě pozorování:

(A) Když si vybereme kteroukoliv jednu myšku $M$ a budeme ji chtít dostat na kteroukoliv jednu židli ž, stačí několikrát použít operace posunutí myšek. Počet nutných posunutí odpovídá tomu, o kolik míst nalevo od židle ž se zrovna myška $M$ nachází.

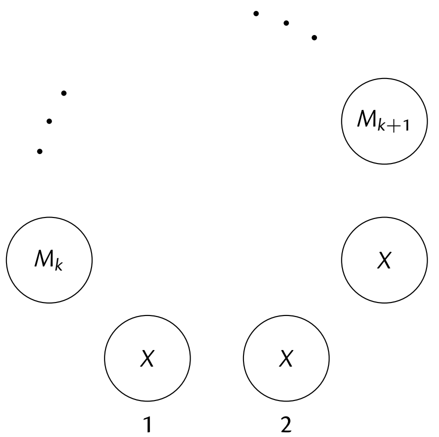
(B) Když používáme operaci posunutí myšek, nemění se přitom jejich „relativní“ rozmístění: každá myška bude pořád mít po pravici toho samého souseda, stejně jako po levici toho samého souseda nebo třeba stejnou myšku 3 místa napravo od sebe.

Využijeme toho, že myška $M_1$ by na konci procesu měla mít po pravé ruce $M_2$, ta by po pravici měla mít $M_3$ a tak dále. Práci si proto rozdělíme na $n-1$ etap. V první etapě zařídíme, aby $M_1$ měla po pravici $M_2$. V druhé etapě se zase zaměříme na to, aby $M_3$ měla po pravici $M_2$, aniž bychom přitom „rozbili" sousedství $M_1$ a $M_2$. Podobně v třetí etapě přemístíme $M_4$ na pozici pravého souseda $M_3$, aniž bychom rozbili vzájemné pořadí $M_1$, $M_2$ a $M_3$, a tak dále. Pokud se tohle podaří, budeme na konci mít kolem stolu myšky v pořadí $M_1, M_2, \ldots, M_n$ a bude stačit je několikrát posunout tak, aby $M_1$ skončila na židli 1.

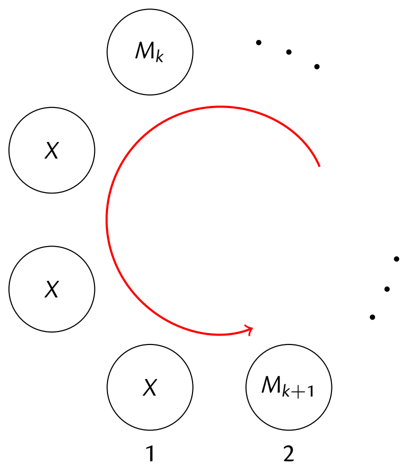
Popišme, jak bude vypadat $k$-tá etapa:

(i) Na začátku této etapy už máme od myšky $M_1$ směrem doprava postupně za sebou myšky $M_1, M_2, \ldots, M_k$.
(ii) Po myšce $M_k$ směrem doprava následuje nějaká vesměs libovolná posloupnost myšek, mezi nimiž je někde i myška $M_{k+1}$. O ostatní myšky se (v této etapě) nezajímáme a budeme je značit $X$. Viz obrázek 2a.
(iii) V souladu s pozorováním (A) nyní myšky několikrát posuneme doprava kolem stolu tak, aby se $M_{k+1}$ dostala na židli číslo 2 (viz obrázek 2b).
(iv) Dokud $M_{k+1}$ nesedí po pravici myšky $M_k$, opakujeme tyto kroky:
   - Prohodíme myšky na židlích 1 a 2. Tím se $M_{k+1}$ posune o jedno místo doleva na židli 1 směrem k $M_k$, zatímco nějaká myška $X$ se přemístí na židli 2 (obrázek 2c).
   - Posuneme všechny myšky o jedno místo doprava kolem stolu. Tím se $M_{k+1}$ vrátí zpátky na židli 2. Zachová se však to, že se přiblížila o jedno místo směrem k $M_k$ (obrázek 2d).

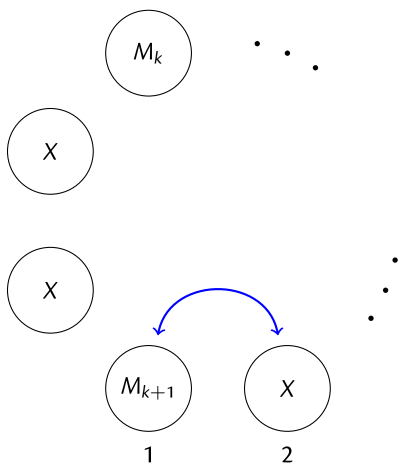
V krocích, které provádíme, se nikdy prohazování neúčastní žádná z myšek $M_1, M_2, \ldots, M_k$, takže se nemůže rozbít jejich pořadí, které jsme měli na začátku etapy. V závěru etapy však každé střídavé prohození a posunutí přibližuje $M_{k+1}$ směrem k $M_k$, takže se nakonec dostaneme do stavu, kdy $M_{k+1}$ bude pravým sousedem $M_k$. Tím je etapa úspěšně ukončena a může následovat další.



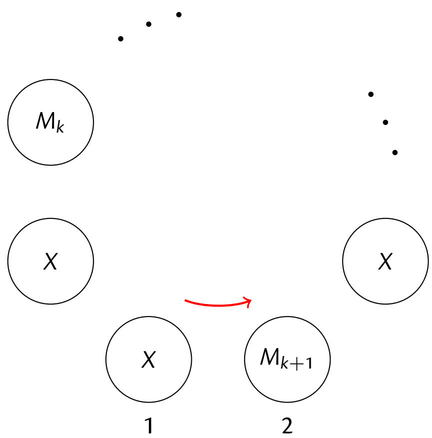

(a) Na začátku etapy máme mezi $M_k$ a $M_{k+1}$ několik myšek $X$.




(b) $M_{k+1}$ jsme posunuli na židli 2.




(c) Prohodili jsme $M_{k+1}$ a $X$.




(d) Posunuli jsme $M_{k+1}$ zpět na židli 2.

Obrázek 2

Jak jsme již řekli, po provedení všech etap máme od myšky $M_1$ směrem doprava seřazeny myšky $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Možná však sedí na špatných židlích, stačí tedy abychom podle pozorování (A) všechny posunuli tak, aby $M_1$ skončila na židli 1 – potom už všichni budou sedět na správných židlích.

## Úloha 5A Volby

Abychom zjistili průměrnou dobu mezi konáním dvou voleb, bude se nám hodit najít nějaký úsek, který se nám do nekonečna opakuje. Když totiž spočítáme průměrný výskyt voleb v tomto úseku, spočítáme tím průměrný výskyt voleb celkově. Nejjednodušší bude najít takový úsek který začíná a končí tím, že jsou volby ve stejný rok. To můžeme zjistit dvěma způsoby – buď si náročně vypisovat na papír, kdy jsou jaké volby a počítat mezi nimi rozdíly, nebo si jednoduše spočteme nejmenší společný násobek 4 a 5.

Protože prvočíselný rozklad 4 jsou $2 \cdot 2$ a pětka je prvočíslo, je nejmenší společný násobek (a tedy perioda doby, kdy jsou volby stejně daleko od sebe) $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ let.

Víme tedy, že každých dvacet let se stane, že oboje volby budou ve stejném roce. Víme také, že mezi těmito roky se bude konat celkem $\frac{20}{4} + \frac{20}{5} = 5 + 4 = 9$ voleb. Z toho dopočteme, že průměrně se konají jedny volby každého $\frac{20}{9} \doteq 2{,}2$ roku.

# Kategorie starší

## Úloha 1B Teplá koupel

Můžeme jistě předpokládat, že čím více teplé vody připustíme, tím vyšší bude výsledná teplota a stejně tak čím více studené vody tam zbude, tím studenější bude i zředěný výsledek. Potřebujeme tedy nějakou takovou závislost na objemu a teplotě, přičemž nejjednodušší vztah, který by takové představě odpovídal, je

$$V \cdot t = V_t \cdot t_t + V_s \cdot t_s,$$

kde $V$ je výsledný objem vody (neboli $V_s + V_t$), $t$ je výsledná teplota, $V_t$, $t_t$, $V_s$ a $t_s$ jsou objem a teplota teplé respektive studené vody. Že tento vztah platí, si můžeme ostatně ověřit i z fyziky.

To k čemu dochází, je vlastně výměna energie. Studená voda přijme teplo od teplé vody, a ta stejné množství tepla musí odevzdat. Tedy

$$\text{teplo přijaté studenou vodou} = \text{teplo odevzdané teplou vodou.}$$

Teplo lze pak vyjádřit jako $m \cdot c \cdot (t_1 - t_2)$, kde $m$ je hmotnost látky, $c$ je konstanta určující jak dobře materiál přijímá a odevzdává teplo, a $t_1$ a $t_2$ jsou teploty (jedna původní a druhá výsledná, v závorce je jejich kladný rozdíl). Pokud to použijeme v naší rovnici (spolu se známým vzorečkem $m = V \cdot \rho$, kde $\rho$ je hustota vody), máme

$$V_s \cdot \rho \cdot c \cdot (t - t_s) = V_t \cdot \rho \cdot c \cdot (t_t - t).$$

Pokud z obou stran rovnice pokrátíme $c$ a $\rho$ a roznásobíme zbylou závorku, dostaneme

$$V_s \cdot t - V_s \cdot t_s = V_t \cdot t_t - V_t \cdot t,$$

což už jde jednoduše převést na

$$(V_s + V_t) \cdot t = V_t \cdot t_t + V_s \cdot t_s.$$

Tedy fyzika náš prvotní odhad zcela potvrzuje, a vztah který používáme je správný.

Vraťme se ale k původní úloze. Co víme zcela jistě je, že Hermína chce mít výslednou teplotu $t$ rovnou 30 °C a že se chce koupat ve 30 litrech vody (nebo-li třetině z 90litrové vany). Známe pak i teplotu teplé a studené vody. Zbývá tedy jenom dohledat ta správná $V_t$ a $V_s$ do rovnice

$$30\,\text{l} \cdot 30\,°\text{C} = 40\,°\text{C} \cdot V_t + 10\,°\text{C} \cdot V_s.$$

Navíc máme k dispozici informaci, že $V_s + V_t = V = 30\,\text{l}$, a tedy bude platit $V_s = 30l - V_t$. Po dosazení tak dostaneme

$$30\,\text{l} \cdot 30\,°\text{C} = 40\,°\text{C} \cdot V_t + 10\,°\text{C} \cdot (30\,\text{l} - V_t) = 30\,°\text{C} \cdot V_t + 10\,°\text{C} \cdot 30\,\text{l},$$

což jde jednoduše upravit na $600\,°\text{C} \cdot \text{l} = 30\,°\text{C} \cdot V_t$, a tedy

$$V_t = \frac{600\,°\text{C} \cdot \text{l}}{30\,°\text{C}} = 20\,\text{l}.$$

Známe tedy objem potřebné teplé vody a snadno dopočítáme, že potřebný objem studené vody je 10 litrů. Nyní už jen stačí zjistit, jak dlouho se má vypouštět studená voda a napouštět teplá. Studená se vypouští rychlostí 40 $\frac{\text{l}}{\text{min}}$ a původně jí ve vaně byla polovina z 90 litrů, tedy 45 litrů. Na konci jí chceme mít pouhých 10 litrů, tedy vypustit chceme 35 litrů. Ze vztahu pro rychlost tedy dostaneme, že

$$\text{potřebný čas} = \frac{\text{počet litrů}}{\text{rychlost vypouštění}} = \frac{35}{40}\,\text{min} = 0{,}875\,\text{min} = 52{,}5\,\text{s}.$$

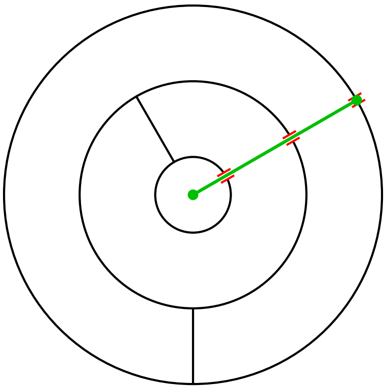
Teplá se zase napouští rychlostí 20 $\frac{\text{l}}{\text{min}}$ a chceme jí napustit přesně 20 litrů. Tady hned vidíme, že napouštět budeme přesně onu 1 minutu.

Na závěr shrňme, že Hermína tedy bude s koupelí spokojená, pokud bude studenou vodu vypouštět 52,5 vteřiny a teplou vodu napouštět 1 minutu.

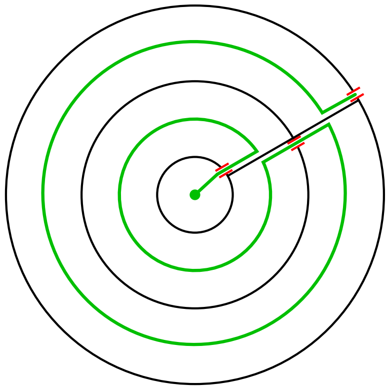
## Úloha 2B Bludiště

Nejkratší cesta z okraje kruhu do jeho středu vede přímo po poloměru. I takové bludiště si může Blažena postavit, přestože jeho procházení asi příliš zábava nebude – viz obrázek 3a.

Uražená vzdálenost bude pro $n$ úrovní vždy $k \cdot (n - \frac{1}{2})$. Za každou úroveň urazí totiž vzdálenost $k$, ale za cestu ve středové oblasti je to pak pouhá polovina $k$ (proto se od celkového počtu úrovní ve vztahu musí chybějící polovina k odečíst). Pro tříúrovňové bludiště s $k = 1$ cm je tak nejkratší možná uražená vzdálenost vzdálenost 2,5 cm.



(a) Bludiště s přímou cestou do středu.



(b) Bludiště s nejdelší možnou cestou.

Obrázek 3

Nejdelší cesta by pak měla být ta, kdy je Blažena donucena projít na dané úrovni co největší část kružnice, než může přejít o úroveň výše. Pokud vždy umístí stěnu hned vedle průlezu, může se jí povést, aby dokonce na každé úrovni bylo potřeba obejít celou kružnici (viz obrázek 3b). Na každé úrovni mimo tu středovou pak projde obvod kružnice, u níž se pravidelně mění poloměr. Pro druhou úroveň je poloměr roven $k$, pro třetí úroveň $2k$ atd., obecně pak $(n-1)\cdot k$ (od středu k první stěně je totiž vzdálenost $\frac{1}{2}k$, stejně tak od stěny k prostředku chodby). Jejich obvod je vždy tedy $2\cdot\pi\cdot(n-1)\cdot k$ To ale není vše – kromě chození po kružnicích jsou tam ještě přechody směrem ke středu. Ty ale v součtu dají opět přesně poloměr celého bludiště, stejně jako v případě nejkratší cesty (jak prozradí i pohled na obrázek 3b). Nejdelší cesta jde tedy vyjádřit jako

$$2\cdot\pi\cdot(n-1)\cdot k+2\cdot\pi\cdot(n-2)\cdot k+\cdots+2\cdot\pi\cdot k+k\cdot(n-\frac{1}{2})=2\cdot\pi\cdot k\cdot(n-1+n-2+\cdots+1)+k\cdot(n-\frac{1}{2}).$$

Součet v závorce můžeme ještě upravit. Můžeme posčítat dohromady $n-1$ s 1, poté $n-2$ s 2 atd. Můžeme tedy říct, že že máme vlastně jen polovinu sčítanců, které jsou ale všechny rovny $n$. Celkem tedy sčítáme $\frac{n-1}{2}$ sčítanců s hodnotou $n$, tedy výsledný výraz pro vzdálenost můžeme upravit do tvaru

$$2\cdot\pi\cdot k\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+k\cdot(n-\frac{1}{2}).$$

Pro tříúrovňové bludiště s $k=1$ tato vzdálenost tedy bude celkem $2\cdot\pi\cdot(2+1)$ cm $+$ 2,5 cm $\doteq$ 21,3 cm.

## Úloha 3B Husí pochod

Zapišme podobně jako v ukázce v zádání husí choreografii rovnicí. Husy začínají v obdélníkové formaci, nechť je to obdélník o délce $x$ hus a šířce $y$ hus. Poté se rozdělí na tři skupiny: dvojstup o délce $x$, trojřadu o šířce $y$ a poslední skupinu o přesně 23 husách. Jedná se tak o rovnici

$$x\cdot y=2\cdot x+3\cdot y+23,$$

kterou řešíme v kladných celých číslech (nulový nebo dokonce záporný počet hus by v úloze nedával smysl). Členy $2\cdot x$ a $3\cdot y$ převedeme na levou stranu, čímž dostaneme

$$x\cdot y-2\cdot x-3\cdot y=23. \qquad (\spadesuit)$$

Aby se nám povedlo zjistit, které dvojice celých čísel tuto rovnici splňují, pokusíme se získat součinový tvar. Výraz na levé straně tedy chceme zapsat jako nějaký součin – zkusme získat součin tvaru $(x-A)\cdot(y-B)$, kde $A$, $B$ budou nějaká čísla. Kdybychom takovýto výraz roznásobili, získáme

$$x\cdot y+x\cdot(-B)-A\cdot y-A\cdot(-B)=x\cdot y-B\cdot x-A\cdot y+A\cdot B.$$

Člen $x\cdot y$ přesně sedí. Abychom správně trefili členy $-2\cdot x$ a $-3\cdot y$, které chceme mít v rovnici ($\spadesuit$), vidíme, že potřebujeme zvolit $B=2$, $A=3$. Poslední člen $A\cdot B=2\cdot 3=6$ sice v rovnici ($\spadesuit$) nemáme, ale to nevadí – přičteme 6 k oběma stranám a nalevo tak získáme tvar $(x-A)\cdot(y-B)=(x-3)\cdot(y-2)$. Rovnici ($\spadesuit$) tedy postupně upravíme do tvaru

$$\begin{aligned}x\cdot y-2\cdot x-3\cdot y&=23,\\x\cdot y-2\cdot x-3\cdot y+6&=23+6,\\x\cdot y-2\cdot x-3\cdot y+2\cdot 3&=29,\\(x-3)\cdot(y-2)&=29.\end{aligned} \qquad (\heartsuit)$$

Výborně, máme součinový tvar – co dál? Podíváme se, jak lze 29 rozložit na součin. Zde máme štěstí, protože 29 je *prvočíslo* – nemá jiné dělitele, než sebe samo a jedničku. Jako součin dvou kladných celých čísel se tedy dá zapsat jen „nezajímavými“ způsoby: $1\cdot 29$ a $29\cdot 1$.

První rozklad by znamenal možnost $x - 3 = 1$ a $y - 2 = 29$, což dá výsledky $x = 4$ a $y = 31$. Podobně z rozkladu $29 \cdot 1$ máme $x - 3 = 29$ a $y - 2 = 1$, tedy $x = 32$ a $y = 3$. Zkouškou můžeme ověřit, že tato řešení skutečně vyhovují původní rovnici:

$$x = 4, \quad y = 31, \qquad\qquad x = 32, \quad y = 3,$$
$$x \cdot y = 4 \cdot 31 = 124, \qquad\qquad x \cdot y = 32 \cdot 3 = 96,$$
$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 23 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 31 + 23 = 124, \qquad\qquad 2 \cdot x + 3 \cdot y + 23 = 2 \cdot 32 + 3 \cdot 3 + 23 = 96.$$

Vypořádat bychom se měli ještě s jednou nepříjemností: číslo 29 se ještě dá rozložit jako $(-1)\cdot(-29)$ nebo $(-29)\cdot(-1)$. Nemohla by tedy existovat další řešení s těmito rozklady? I když sice $x$ a $y$ mají být kladná čísla, klidně by se mohlo stát, že hodnoty závorek $(x-3)$ a $(y-2)$ v rovnici (♡) by byly záporné (třeba pro $x = y = 1$). Aby však existovalo řešení s rozklady na dvě záporná čísla, musela by jedna ze závorek být rovna $-29$. To nemůže nastat: $x$ i $y$ jsou alespoň jedna, takže $x - 3 \geq 1 - 3 = -2 > -29$ a podobně $y - 2 \geq 1 - 2 = -1 > -29$. Řešení odpovídající těmto rozkladům na záporný čísla proto nemohou v naší úloze existovat, takže jedinými řešeními jsou ta, která jsme nalezli:

$$x = 4 \quad \text{a} \quad y = 31, \qquad\qquad x = 32 \quad \text{a} \quad y = 3.$$

V nové choreografii celkem vystoupí $x \cdot y$ hus, takže to bude buď $4 \cdot 31 = 124$, anebo $32 \cdot 2 = 96$.

## Úloha 4B Zpěvavá

Určitě takových písniček nebude zrovna málo. Jenže s těmi omezeními to bude problém. Začneme proto s něčím jednodušším. Co kdyby měla mít jen jednu notu? Pak by byly jen čtyři „písničky“. Co kdybychom přidali ještě jednu notu? Tak A bychom mohli přidat jen k A a k B. B bychom přidali k A, B a k C. C k B, C a D. No a D se dá přidat jen za C a D. To je 2 + 3 + 3 + 2 = 10 písniček.

Přidáme další notu. Začneme opět od A. To přidáme za A a za B. To už jsme jednou dělali. Ale tentokrát musíme vzít v potaz, kolik písniček nám v předchozím kroku na A a na B končilo. Byly to 2 a 3 písničky. Proto existuje 5 písniček, které jsou dlouhé tři noty a končí na A.

Další je B. Přidáváme za A, B a C. Na ty posledně končilo 2 + 3 + 3 = 8 písniček. Pak uděláme totéž i pro C a D, nebo si uvědomíme, že pro C (resp. D) to vyjde stejně jako pro B (resp. A).

Budeme-li pokračovat dál, vznikne následující tabulka:

| poslední tón/počet not | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 5 | 13 | 34 | 89 | 233 |
| B | 1 | 3 | 8 | 21 | 55 | 144 | 377 |
| C | 1 | 3 | 8 | 21 | 55 | 144 | 377 |
| D | 1 | 2 | 5 | 13 | 34 | 89 | 233 |
| celkem | 4 | 10 | 26 | 68 | 178 | 466 | 1220 |

Tabulka 4: Počty písniček.

Takže písniček o pěti notách existuje 178. Pro šest not to bude o 466 - 178 = 288 písniček víc. Písniček o sedmi notách existuje krásných 1220. To je o 1042 víc než pro písničky o pěti notách.

## Úloha 5B Pečení piškotu

Aby byl piškot stále stejně vysoký, musí být zachován poměr mezi obsahem dna formy a výsledným objemem. Je to proto, protože objem kvádru i válce vypočítá jako obsah dna krát výška.

$$\frac{\text{objem plechu}}{\text{obsah plechu}} = \frac{\text{objem kruhové formy}}{\text{obsah kruhové formy}}$$

Obsah dna obdélníkové formy se spočítá jako šířka krát délka, v našem případě $25\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 750\,\text{cm}^2$. Obsah kruhové formy je $\pi \cdot \text{poloměr}^2$, tedy $\pi \cdot \left(\frac{25\,\text{cm}}{2}\right)^2 \doteq 491\,\text{cm}^2$.

$$\frac{\text{objem plechu}}{750\,\text{cm}^2} \doteq \frac{\text{objem kruhové formy}}{491\,\text{cm}^2}$$

Poměr počtu vajec ku výslednému objemu je stále stejný. Díky tomu můžeme neznámý objem nahradit počtem vajec krát nějaké číslo Z = kolik objemu koláče připadá na jedno vejce. Číslem Z rovnou obě strany rovnice vydělíme.

$$\frac{\text{hledaný počet vajec}}{750\,\text{cm}^2} \doteq \frac{\text{počet vajec pro kruhovou formu}}{491\,\text{cm}^2},$$
$$\frac{\text{hledaný počet vajec}}{750\,\text{cm}^2} \doteq \frac{4}{491\,\text{cm}^2}$$

Vyřešením poslední rovnice dostaneme

$$\frac{750\,\mathrm{cm}^2}{491\,\mathrm{cm}^2} \cdot 4 \doteq 6,$$

Viki tedy do těsta musí dát šest vajec.