Kategorie mladší

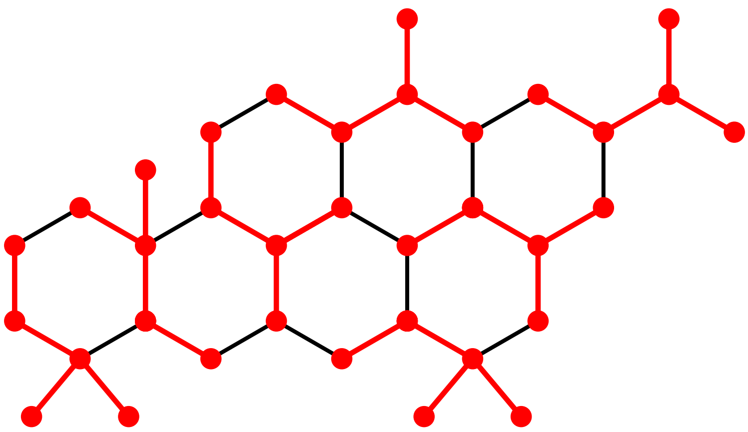
Úloha 1A Strašilky

Nejprve bychom si měli spočítat kolik strašilek se vůbec může na větvičce skrývat. Ze zadání víme dvě důležité informace. Nejprve si popíšeme strašilku. Strašilka se skládá z pomyslných bodů a jejich spojnic. Bodům říkejme vrcholy a spojnicím hrany.

Taková strašilka se vždy skládá z pěti vrcholů a čtyř hran. Nikdy více ani méně. Zároveň víme, že dvě strašilky jsou od sebe vždy odděleny větvičkou. Tedy žádné dvě strašilky nesdílí jeden vrchol. To nám ovšem hraje do karet tím, že když spočítáme, kolik vrcholů je na větvičce, tak zaručeně víme, že na ní nemůže být více než $\frac{\text{počet vrcholů}}{5}$ strašilek, ať už jsou uspořádané jakkoliv.

Vyzbrojeni touto informací můžeme určit, že na naší větvičce může být nejvýše 7 strašilek. Teď si ještě musíme rozmyslet, kde by se mohly nacházet. Víme, že je-li na větvičce schovaných sedm strašilek, tak na každém vrcholu se nachází strašilka (nemáme žádné vrcholy, které by nepatřily žádné strašilce). Všimneme si podezřelých okrajů ve tvaru písmena V. Pokud je správná myšlenka, že na větvičce je sedm strašilek, tak na tomto místě musí mít některá z nich hlavičku.

Tím máme vytipované alespoň tři místa, kde bude nutně hlavička (je-li strašilek sedm). Od toho se odrazíme a už nám zbývá jen lehce odhadovat jakým směrem se která strašilka stáčí. Ovšem tím, že některé pozice strašilek se navzájem vylučují se nám situace značně zjednoduší. Brzy tak dojdeme k řešení na obrázku 1. Vzhledem k tomu, že strašilek tam opravdu máme 7, tak víme, že víc jich tam být nemůže a toto je hledané řešení.



Obrázek 1: Klárčina větvička, strašilky jsou vyznačeny červeně.

Úloha 2A Oslavy

Uff, to je dat! Je to vůbec možné sestavit? Celkem je třeba $7+1+5+1+2+1+5+3+1+2+1 = 29$ dní. Zkusíme si je rozdělit podle Cilčiny cukrárny, která je zhruba ve $\frac{2}{3}$ měsíce. Takže, do konce 21. listopadu musí Petr stihnout: Aničku se $7+1$ dny, Cilku s $2+1$ dny a cukrárnu s 5 dny. To mu zabere $7+1+2+1+5 = 15$ dní. Do 21 zbývá ještě 6 dní a poměrně hodně volných termínů, kterých, jak se zdá, bude v druhé části měsíce málo.

Někoho ze zbývajících potřebujeme přesunout do první části měsíce. Emu Edward má nejzazší možný termín, toho bude lepší naplánovat až na 30. listopadu. Tím pádem musíme do první části měsíce přesunout dikobraze, protože 29. (jediný dikobrazův termín po 21. listopadu) se bude Petr věnovat Edwardovi. Na Bedřicha se dostane až 28. listopadu.

Do 21. listopadu chceme najít termíny pro Aničku, Cilku a dikobraze. Cukrárnu může Petr řešit v mezičase, víme, že to půjde. Možností je více, vybereme např. pro Cilku 6. listopadu, pro Aničku 14. listopadu a pro pro dikobraza 20. listopadu.

Petrův kalendář na listopad by mohl vypadat například takto:
1.--3. listopadu – příprava Aniččiny oslavy
4.--5. listopadu – příprava Cilčiny oslavy
6. listopadu – Cilčina oslava
7.--9. listopadu – Cilčina cukrárna
10.--13. listopadu – příprava Aniččiny oslavy
14. listopadu – Aniččina oslava
15.--16. listopadu – Cilčina cukrárna
17.--19. listopadu – příprava dikobrazovy oslavy
20. listopadu – dikobrazova oslava
21. listopadu – volno :)
22. listopadu – příprava Edwardovy oslavy
23.--27. listopadu – příprava Bedřichovy oslavy

28. listopadu – Bedřichova oslava
29. listopadu – příprava Edwardovy oslavy
30. listopadu – Edwardova oslava

Úloha 3A Tajná zpráva

Chceme-li rozhodnout, kdy dokáže Tomáš chybu objevit a kdy opravit, musíme se nejprve zamyslet nad tím, co tyto pojmy znamenají. Přijde-li Tomášovi ve zprávě nějaké slovo, které není mezi domluvenými, tak ví, že se při přenosu stala chyba. Opravit chybu umí Tomáš v případě, kdy dokáže určit, ze kterého kódového slova přijaté slovo vzniklo – za předpokladu, že se změnil nejmenší počet znaků vedoucí z kódového slova na slovo přijaté. Ani při určování správnosti slova, ani při určení původního slova při chybě nelze tvrdit, že má Tomáš pravdu určitě: vždy se může stát, že se vlivem změn jednotlivých písmen jedno kódové slovo přemění na jiné kódové slovo (které pak Tomáš neurčí jako chybné). Také se ve slově může změnit více písmen, než Tomáš při opravě čeká, takže pak určí původní slovo chybně. *To se však při přenosu reálných dat neděje příliš často, ve většině případů zvládnou samotné aplikace, které s daty pracují, drobné chyby řešit.*

Při identifikaci chyby budeme chtít zjistit, při kolika změněných znacích Tomáš ještě špatný přenos odhalí a při kolika změněných znacích už bude slovo, které Tomáš dostane, vypadat jako jiné kódové slovo. K tomu se nám bude hodit vědět, kolik znaků se musí v jednotlivých kódových slovech změnit, aby se jedno kódové slovo změnilo na jiné, a chyba tak nešla odhalit. *Tomuto číslu se v teorii informace – oboru, který zkoumá, jak přenášet informaci například pomocí podobných kódů, jako mají Tom s Danem – říká Hammingova vzdálenost.* V tabulce 1 jsou uvedeny počty znaků, které se musí změnit, aby se jedno kódové slovo stalo jiným.

	00000	10011	00111	11010
00000	0	3	3	3
10011	3	0	2	2
00111	3	2	0	4
11010	3	2	4	0

Tabulka 1: Vzdálenosti mezi jednotlivými kódovými slovy.

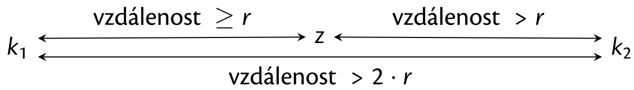
V této tabulce vidíme, že mezi všemi dvojicemi různých slov máme vzdálenost alespoň dva znaky. Když se tedy ve slově změní jen jeden znak, pak Tomáš dokáže říct, že výsledné slovo je chybné – určitě to totiž nebude jedno z domluvených kódových slov. Ne vždy už ale dokáže určit které slovo Dan poslal: např. pro přijaté slovo 00011 dokáže Tomáš určit, že je chybné, ale už neví, zda vyslané slovo bylo 00111, nebo 10011. Když ale obdrží slovo 10000, dokáže říct, že pokud se ve slově chybně přenesl jen jeden znak, pak původní slovo muselo být 00000, protože žádné jiné kódové slovo se od přijatého neliší pouze o jeden znak.

Pro tato domluvená kódová slova (v teorii je skupina používaných kódových slov známá zkráceně jako „kód“) dokáže Tomáš objevit chybu obecně jen pro jeden změněný znak. Ačkoli existují slova, u kterých Tomáš zvládne odhalit chybu, i pokud při přenosu došlo k více chybám, u některých slov by už Tomáš při více chybách nedovedl určit, že jsou chybná. O tomto kódu tedy říkáme, že dokáže *objevit* pouze jednonásobné chyby. Podobně prohlásíme, že kód nedokáže *opravovat* žádné chyby, protože u některých nekódových slov nedovedeme rozhodnout, o které kódové slovo se nejspíš jednalo původně.

Můžeme si povšimnout, že u rozhodování o chybnosti a opravitelnosti slova už se nerozhodujeme pouze na základě jednotlivých vzdáleností mezi všemi možnými slovy, ale jen podle té nejmenší vzdálenosti mezi slovy v kódu. Pro jednodušší popis obecnějších závislostí si povíme, že této hodnotě se říká *Hammingova vzdálenost kódu* (tedy celé skupiny kódových slov). Kód používaný Danem a Tomášem má tuto vzdálenost rovnu 2.

Už z toho příkladu si můžeme povšimnout některých obecných tvrzení, která se o chybnosti a opravitelnosti kódu dají učinit. Pokud je počet znaků změněných v kódovém slově při přenosu menší, než je Hammingova vzdálenost kódu, tak toto změněné slovo určitě nebude vypadat jako jiné kódové slovo – tato chyba tak bude odhalitelná. Trochu formálněji řečeno, pokud je Hammingova vzdálenost používaného kódu d, počet změněných znaků v přeneseném slově r a platí $r < d$, pak dokážeme odhalit všechny chyby způsobené r či méně změněnými znaky. Když už víme, jak to funguje obecně, můžeme snadno rozhodnout odhalení chybnosti druhého zadaného kódu. Ten má Hammingovu vzdálenost rovnu dokonce jen jedné, tedy nepůjde detekovat žádná chyba – existuje kódové slovo, ve kterém změna jediného znaku vytvoří jiné kódové slovo.

S opravou chyb je to o něco složitější. Pro opravu chyby potřebujeme určit, ze kterého kódového slova přijaté slovo vzniklo. To znamená, že opravované slovo musí být od nejbližšího kódového slova vzdáleno nejvýše r, zároveň ale nesmí vzdálenost nanejvýš r mít od dvou či více různých kódových slov. Toto kritérium nám určuje nejmenší vzdálenost mezi dvěma kódovými slovy, pro kterou se chyba ještě dá opravit. Od jednoho kódového slova k přenesenému to může být nejvýše r a od přeneseného k druhému kódovému slovu to musí být více než r, tedy alespoň $r + 1$. Získáváme tak, že pro opravu chyby musí být vzdálenost mezi každými dvěma kódovými slovy větší než $2 \cdot r$ (znázorněno na schématku 2). Lze tak říci, že lze opravit až r změněných znaků, pokud Hammingova vzdálenost kódu d splňuje nerovnost $d > 2 \cdot r$.



Obrázek 2: Potřebné vzdálenosti pro opravu chybně doručených slov, k_1 a k_2 jsou kódová slova, z je chybně doručené slovo s nejvýše r změněnými znaky.

O druhém zadaném kódu tak můžeme prohlásit, že nedokáže opravit žádné chyby, protože jeho Hammingova vzdálenost je 1.

Kód, který by dokázal opravit jeden změněný znak, musí mít vzdálenost mezi slovy alespoň 3, což je například kód složený ze slov 00000, 11100, 10011 a 01111. S tímto kódem dokáže Tomáš u přijatého slova s jedním změněným znakem určit, z kterého slova vzniklo, protože od nejbližšího dalšího slova se bude lišit alespoň o dva znaky.

Úloha 4A Natahovací hodinky

Povšimněme si, že jediné chvíle, kdy zná Emanuel reálný čas, jsou časy jeho příchodů na Velké náměstí v 8:30 a v 16:30. Mezi těmito momenty tak uplyne 8 hodin reálného času. Co se týká příslušného hodinkového času (který je nařízen ráno na Náměstí na 8:30), tak jelikož cesta z náměstí do práce či naopak trvá 15 minut hodinkového času (viz přesun mezi 8:30 a 8:45) a Emu odchází z práce v 17, tak se opět objeví na velkém náměstí v hodinkovém čase 17:15. Na 8 hodin reálného času tedy připadá 8 hodin a 45 minut hodinkového času, neboli 8,75 hodin. To znamená, že na každou hodinu reálného času uplyne na hodinkách o něco více, a toto „něco navíc" by mělo odpovídat poměru $\frac{8{,}75}{8}$ (po osmi hodinách vynásobených tímto poměrem dostaneme přesně čas, který uplyne na hodinkách). Díky tomuto základnímu převodnímu vztahu nyní budeme schopni dopočítat další potřebné náležitosti.

Projděme si nyní pozpátku Emanuelovo obvyklé ráno. 45 minut hodinkového času by mu měla trvat cesta na Velké náměstí. Předtím potřebuje snídat 30 minut reálného času neboli 0,5 hodiny. Abychom reálný čas v hodinách převedli na hodinkový, vynásobíme jej 8,75 h a vydělíme 8 h, a máme tak

$$\frac{0{,}5\,\mathrm{h} \cdot 8{,}75\,\mathrm{h}}{8\,\mathrm{h}} \doteq 0{,}5469\,\mathrm{h},$$

což odpovídá přibližně 32,8 hodinkovým minutám. Snídani pak ráno předchází ještě 8 důkladných hodinkových hodin spánku. Celkem tedy od chvíle, kdy jde spát, do chvíle, kdy má stát na Velkém náměstí, uplyne v součtu přibližně 9 hodin a 18 minut hodinkového času. Jelikož na Velké náměstí dochází emu obvykle ve chvíli, kdy jeho hodinky ukazují 10:00, znamená to, že obvykle chodívá spát zhruba v 0:42 dle jeho hodinek.

Známe tedy jeho obvyklý čas ulehání do peřin. Oproti normálu ale dnes potřebuje, aby ráno dorazil o půl hodinu skutečného času dříve. To znamená, že dle hodinek musí jít spát dříve o oněch přibližně 33 hodinkových minut. Konečně zná tedy ten správný čas na ulehnutí – přibližně 0:09 hodinkového času.

Úloha 5A Zalévání kytičky

Chceme-li spustit zavlažování kytičky co nejmenším množstvím dolité vody, musíme zjistit, které kbelíky se přelijí do spodních při přidání co nejméně vody. Vidíme, že do kbelíku vlevo nahoře stačí přilít jeden litr vody a celý obsah kbelíku (tedy sedm litrů) se přelije do kbelíku pod ním. který se také přelije i s celým svým obsahem ($1 + 7$ litrů) do nejnižšího kbelíku. V tomto kbelíku tak za cenu jednoho přilitého litru získáme 8 litrů. Ale ve druhém kbelíku zleva také stačí jeden litr, aby se jeho obsah přelil do kbelíku pod ním. V tom potom však bude pořád moc málo vody na to, aby se tyto další tři litry přelily do dvacetilitrového kbelíku dole. Když však nejdříve nalijeme litr do druhého kbelíku zleva a pak teprve do prvního zleva, tak se z kbelíku pod nimi přelije dohromady 11 litrů – jeden litr ze spodního levého kbelíku, tři z druhého kbelíku zleva nahoře a sedm litrů z levého horního kbelíku.

Do potřebných dvaceti litrů zbývá devět. Ty se dají snadno získat přilitím tří litrů do pravého horního kbelíku, jenž se vylije do kbelíku pod ním, který se hned přelije dál i s celým svým obsahem. Ten v tu chvíli bude činit $3 + 3 + 3 = 9$ litrů vody, což už je v součtu s 11 litry z levého spodního kbelíku dost na přelití spodního dvacetilitrového kbelíku a zalití kytičky. A to vše jen za cenu přinesení a přilití pěti litrů vody.

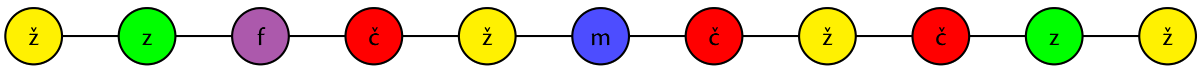
Kategorie starší

Úloha 1B Drahý náhrdelník

Šárka zahlédla čtyři uskupení po třech perlách a jedno seskupení o čtyřech perlách. Perel má být pouze jedenáct, musela tedy minimálně pět perel vidět dvakrát. (Pozornějším pohledem zjistíme, že nemohla žádnou perlu vidět třikrát nebo víckrát.)

Začneme kouskem žzf. Fialová barva na konci se špatně napojuje, ale na jedno seskupení to přesto jde – zfčž. Dostaneme tedy žzfčž a zbývají seskupení žčz, žmč a čzž. Seskupení žmč rozhodně nechceme na kraji – nikde jinde se nevyskytuje modrá perla, která by nám proto zabránila mít druhou a předposlední perlu stejnou. Umístíme žmč na konec stávajícího řetězce.

Seskupení žčz a čzž se na žzfčžmč nedají navázat s překryvy tak, aby bylo dodrženo pravidlo o první a poslední perle. Zato je lze velmi dobře provázat navzájem. Vznikne tak žčzž, které už jen stačí položit za žzfčžmč. Celkem máme žzfčžmčžčzž. Překontrolujeme podle Šárčiných poznatků – jedenáct perel souhlasí, žluté jsou čtyři, červené jsou tři, první a poslední je žlutá, druhá a předposlední zelená. Podařilo se, Šárčin náhrdelník můžeme vidět na obrázku 3.



Obrázek 3: Šárčin náhrdelník.

Úloha 2B Hra

Pro určení, kdo má větší šanci na výhru, je klíčová informace, že se hraje dlouhou dobu – tedy že jeden hráč stihne potkat mnoho dalších, nikoliv jen třeba jednoho nebo dva – a hráči běhají zcela nahodile (tedy že je stejná šance, že Nataša potká Aloise, jako že potká Bětku). Můžeme tak říct, že jeden hráč bude v průběhu hry potkávat všechny ostatní hráče stejně často a tedy počet bodů, které sesbírá celkem bude násobkem počtu bodů, které sesbírá tehdy, když se s každým přítomným hráčem potká právě jednou. Nám tedy stačí spočítat, kolik při takovémto „kole" získá bodů četník a kolik lupič.

Četníci jsou na hřišti celkem čtyři, takže jeden četník potká v jednom „kole" tři četníky, za což získá $3 \cdot 2$ body. V každém kole potká také všech pět přítomných lupičů, za což získá $5 \cdot 11$ bodů. Celkem tedy jeden četník za jedno „kolo" získá 61 bodů.

Jeden lupič potká v každém „kole" všechny čtyři přítomné četníky a získá tak $4 \cdot 3$ body. Navíc potká ještě ostatní čtyři přítomné lupiče, za což získá $4 \cdot 12$ bodů. Celkem tak jeden lupič získá za jedno „kolo" 60 bodů.

Vidíme tedy, že jsou-li na hřišti čtyři četníci a pět lupičů, tak má větší šanci na výhru některý z četníků.

Dále zjistíme, zda je při přesunu na vedlejší hřiště, kde už hraje pět četníků a pět lupičů, pro Natašu lepší stát se četníkem, nebo lupičem. K tomu musíme spočítat kolik bodů získá jeden četník, bude-li na hřišti šest četníků a pět lupičů, a porovnat to s počtem bodů, které získá jeden lupič, bude-li na hřišti pět četníků a šest lupičů. V prvním případě získá četník $5 \cdot 2 + 5 \cdot 11 = 65$ bodů. V tom druhém pak lupič obdrží $5 \cdot 3 + 5 \cdot 11 = 70$ bodů. Nataše se tedy víc vyplatí stát se šestým lupičem.

Úloha 3B Hostina

Borůvky chutnají 46, jahody 65 a švestky 60 zvířátkům. Kdybychom to takto sečetli a porovnali s celkovým množstvím zvířátek, tak vyjde $46 + 39 + 60 = 171$ což je víc než 130, protože některá zvířátka byla započtena víckrát.

Borůvky i švestky chutnají 21 zvířátkům. Těch, kterým borůvky i švestky sice chutnají, ale nemají rádi jahody je 16. To znamená, že $21 - 16 = 5$ zvířátkům chutnají všechny tři druhy ovoce. Tato zvířátka jsou v našem součtu třikrát, a proto je musíme dvakrát zase odečíst.

Ještě potřebujeme vědět, kolika zvířátkům chutnají borůvky a jahody, ale ne švestky: $5 - 5 = 0$ a kolika jahody a švestky, ale nikoli borůvky: $28 - 5 = 23$. Skupinku s borůvkami a švestkami bez jahod už známe. Tato zvířátka se nám do součtu dostala dvakrát, a stačí je tedy odečíst jednou. Celkově má alespoň nějaké ovoce rádo $171 - 2 \cdot (5) - 1 \cdot (0 + 23 + 16) = 122$ zvířátek. Do celkových 130 nám chybí ještě 8 zvířátek, pro které bude dodo Dan vařit špagety.

Úloha 4B Mrkací

Podívejme se napřed podrobně na Karlův let po dílčích částech. Hned na začátku vyráží hodně ostře nahoru z bodu $(1,0)$ takže hodnoty na ose y rychle narůstají (od 0 směrem k 1). Na ose x je oproti tomu klesání hodnot souřadnic, které zde s Chlodvíkem pozorujeme, zpočátku pozvolnější (od 1 směrem k 0). Postupně se to ale prohazuje – zatímco růst na ose y zpomaluje, pokles hodnot na ose x směrem k 0 zrychluje, až komár doletí do bodu $(0,1)$. Na následném úseku se na ose x opět klesá, ale zároveň se v klesání pokračuje i na ose y – v případě osy x jde zpočátku o rychlejší změny, na ose y o pomalejší a postupně se to opět prostřídá. Poté komár dorazí do bodu $(-1,0)$. Takto se pak pokračuje i v druhé polovině kružnice, a výsledek jsou grafy na obrázku 4.

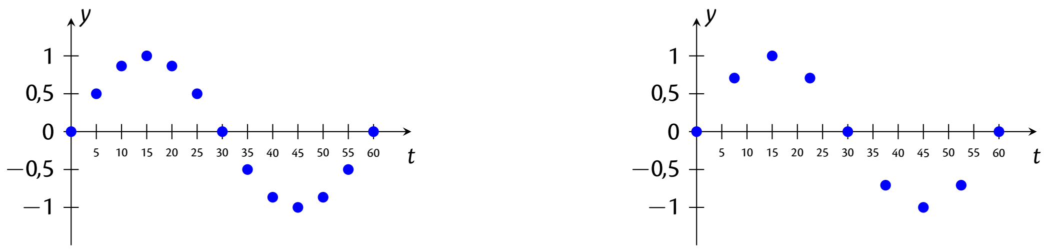
(a) Pohyb Karla na ose *x*.

(b) Pohyb Karla na ose *y*.

Obrázek 4

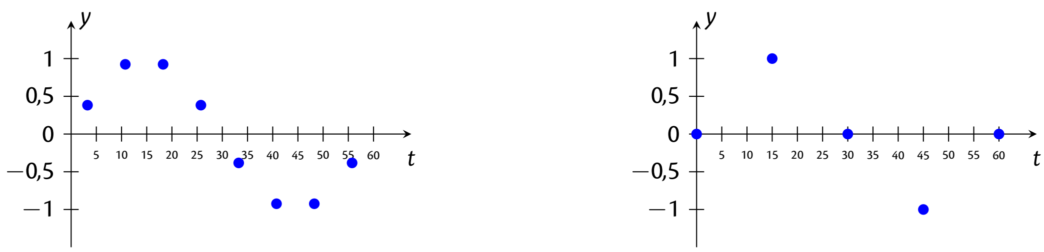
Co se týká ideální mrkací doby, můžeme vyjít v podstatě z výše uvedené úvahy. V každé čtvrtině bychom ideálně chtěli zachytit dva body mimo „vrcholy“ (tedy body $(0{,}1)$, $(1{,}0)$, $(-1{,}0)$ a $(0{,}-1)$), protože díky tomu jsme schopni zachytit „rychlejší“ či „pomalejší“ růst či klesání v dané oblasti. To znamená, že celkem bychom chtěli mít vzorkování po $\frac{1}{12}$ doby obletu, tedy po 5 sekundách. Chlodvíkovo pozorování by pak vypadalo jako na obrázku 5a. Pokud by byl ale Chlodvík opravdu líný a přesto by chtěl sledovat měnící se rychlost „klesání“ či „růstu“ hodnot na osách, mohl by se rozhodnout, že nemusí vidět situaci u průletu „vrcholy“, a první mrknutí tak načasovat na jiný moment. Potom by mu měla stačit pouhá dvě mrknutí na čtvrtinu (bez krajních bodů), tedy oněch 8 vzorků jako je na obrázku v zadání, ale posunutých o kousek jinam (mrkací doba by tady pak byla $\frac{1}{8}$ minuty, tedy 7,5 s), pozorování je pak na obrázku 5c.

Díky výše uvedeným mrkacím dobám je tak možné zachytit i změnu „rychlosti růstu či klesání“ v jednotlivých oblastech. Zcela bezpodmínečně je ale potřeba zachytit alespoň to, jestli hodnota *x* a *y* na nějakém úseku roste nebo klesá. To se děje v našich čtyřech „vrcholech“, tedy pro zachycení tohoto je třeba mrknout aspoň 4× za minutu, tedy jednou za 15 sekund, pozorování je na obrázku 5d.



(a) Mrkací doba 5 s.

(b) Mrkací doba 7,5 s.



(c) Mrkací doba 7,5 s s posunutým prvním mrknutím.

(d) Mrkací doba 15 s.

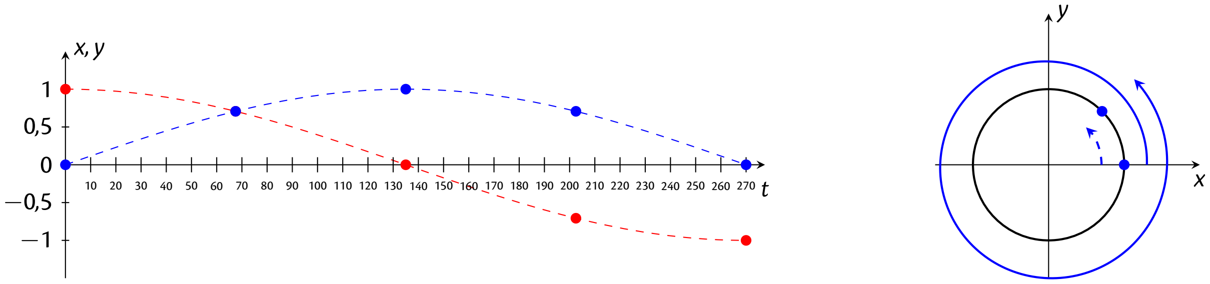
Obrázek 5

Cokoli menšího je pak odsouzené k nezdaru pozorování. Několik variant je pak obzvláště zajímavých:

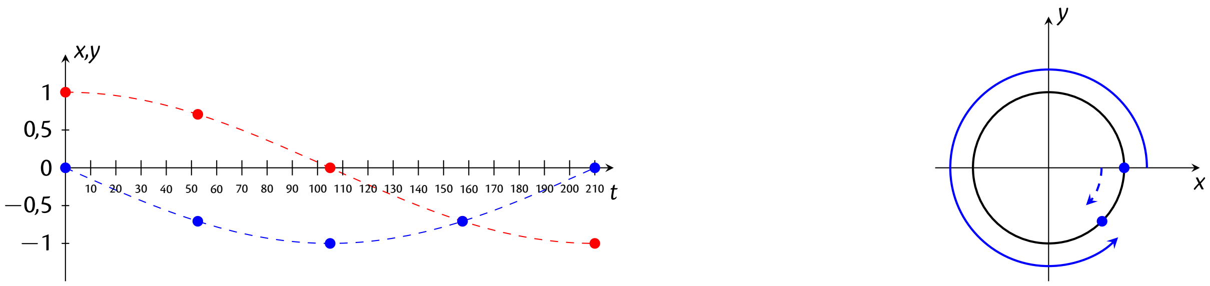
(a) Je-li mrkací doba jednou za minutu, zdá se Chlodvíkovi, že komár vlastně nelétá a stojí na místě, viz obrázek 6a.
(b) Pro mrkací dobu, která je delší než 1 minuta, můžeme například pozorovat to, že se Chlodvík pohybuje správným směrem, ale mnohem pomaleji. Zkuste se podívat třeba na mrkací dobu 1 minuta a 7,5 s – zatímco Karel obletí kolo a kousek, zdá se Chlodvíkovi, že se posunul o jediný úsek. To je tedy ukázka situace, kdy se může zdát, že letí jinak rychle (viz obrázek 6b), obecně se to děje pak v situaci, kdy je mrkací doba rovna minutě plus „rozumně krátké“ mrkací době.
(c) Co se týká mrkací doby, u níž chceme, aby Karel letěl zdánlivě pozpátku, může se nám hodit se opět podívat na obrázek v zadání. Na bod, který je po směru hodinových ručiček (tedy proti směru letu), dorazí Karel zde konkrétně za 1 minutu minus 7,5 s, tedy za 52,5 s. Po uplynutí další mrkací doby se opět posune o další úsek ve směru chodu hodinek atd. Toto je tak jedna možná hodnota mrkací doby, při níž se zdá komárův pohyb opačný oproti skutečnosti (viz obrázek 6c). Obecně pak jde říci, že pro jakékoli „rozumné

mrkací doby“ (častější než 4× za minutu, jak je zmíněno výše) lze mrkací dobu pro couvání spočítat jako minuta minus „rozumná mrkací doba“.

(a) Mrkací doba je jednou za minutu, červeně je pohyb po ose x, modře pohyb pro ose y.



(b) Mrkací doba je jednou za minutu plus 7,5 s, červeně je pohyb po ose x, modře pohyb pro ose y.



(c) Mrkací doba je jednou za minutu mínus 7,5 s, červeně je pohyb po ose x, modře pohyb pro ose y.

Obrázek 6: Různé mrkací doby.

Zajímavostí je, že Karlův pohyb vykresluje takzvané goniometrické funkce sinus a cosinus, se kterými se pravděpodobně časem setkáte. Mrkací době se pak říká učeně vzorkovací čas, a v různých odvětvích lidského vědění je možné potkat i jej, a nemusí to být přitom jen u těchto sinů a cosinů. Například díky špatným vzorkovacím časům jednotlivých obrázků můžeme občas ve starých filmech vidět kola aut, která se otáčí opačně, než ve skutečnosti. Nepřipomíná Vám to něco na Karlově pohybu?

Úloha 5B Digitální písmenka

Zamysleme se napřed nad variantou se sedmi světélky. Dva znaky mohou vypadat tak, že všechna políčka budou zhasnutá nebo rozsvícená. Pak budeme mít dalších 7 možností, kdy bude svítit jen jedno světlo, a 7 možností, kdy bude zhasnuté jen jedno světlo. Už takhle máme 16 možností, což vypadá více než slibně. Zkusíme ale pokračovat systematicky a nezkoušet ostatní varianty jen „uhodnout“, pomůže nám to i v dalším postupu. Další variantou jsou přesně dvě zhasnutá nebo rozsvícená světla. Tady už to bude chtít trochu více uvažování, označme si tedy 7 světel jako A, B, C, D, E, F a G, ať je můžeme vzájemně odlišit. Řekněme, že bude svítit světlo A. Pro něj je pak 6 možností, jaká další světla mohou být rozsvícena. Pokud by svítilo světlo B, máme 5 možností, které jsme ještě neměli (variantu A a B jsme již měli), pro svítící C to budou 4 varianty, pro D 3 varianty, pro E 2 varianty a pro F pouze 1 varianta. Celkem nám tedy pro dvě rozsvícená světla přibude $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ možnost, celkem tedy 21 možností, a stejný počet pro právě dvě zhasnutá světla. Máme tedy celkem 48 možných znaků, a to jsme se nedostali ani k poslední variantě se třemi rozsvícenými nebo zhasnutými světly (pro čtyři rozsvícená či zhasnutá světla už bychom dostali vlastně opět situaci se třemi zhasnutými či rozsvícenými světýlky).

Už nyní je tedy jasné, že nám bude určitě stačit i menší počet světel (ten hledaný si označme N). Z předchozího postupu se můžeme poučit a uvědomit si, že za všechna rozsvícená a zhasnutá světla si můžeme připočítat vždy 2 varianty, a pro jedno rozsvícené či zhasnuté světlo dostaneme celkem $2 \cdot N$ variant. Pro dvě zhasnutá či rozsvícená světla jsme pak zjistili, že máme $(N-1) + (N-2) + \cdots + 2 + 1$

variant, ke třem jsme se zatím nedostali. Zkusme ale tedy, jestli by nám takto stačil nejmenší teoreticky možný počet světel, což jsou 4 (u 3 je problém, že dvě zhasnutá světla znamenají vlastně 1 rozsvícené světlo, a možností by bylo opravdu málo, zatímco u 4 tento problém ještě není).

Máme tedy 2 varianty $+ 8$ variant $+ 2 \cdot (3 + 2 + 1)$ varianty, což je celkem $10 + 12$ variant a to je 22 variant. To je méně než 26, zkusme tedy provést podobný výpočet pro 5 světel. Dostaneme 2 varianty $+ 10$ variant $+ 2 \cdot (4 + 3 + 2 + 1)$ variant, což je celkem $12 + 20 = 32$ variant. Můžeme se tedy zaradovat – pro vypsaní 26 znaků na svítícím displeji nám stačí pouhých 5 světýlek a ještě budeme mít 6 znaků do rezervy. A sedm světel je samozřejmě také dostačujících.