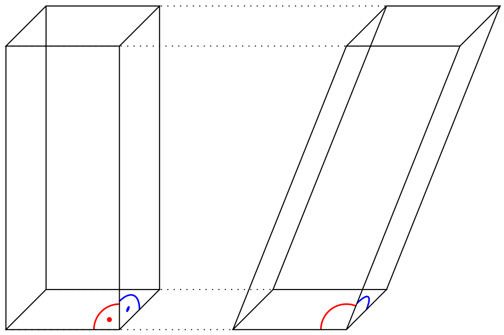
Kategorie mladší

Úloha 1A Tajemný předmět

Začneme s tím, co o tajemném předmětu od Františka víme. Máme dva čtverce o straně 2 cm, které jsou navzájem rovnoběžné, a roviny, ve kterých leží, jsou od sebe vzdálené 5 cm. Je důležité si uvědomit, že ať budou čtverce kdekoli v těchto rovinách, výška tělesa stále zůstane 5 cm.



Obrázek 1: Podstavy lze vůči sobě libovolně posouvat.

Více informací ale od Františka nemáme. Nemůžeme přesně určit, v jaké poloze vůči sobě čtverce jsou. Musíme tedy zjistit dva úhly (v obrázku červený a modrý), které svírají dvě na sebe kolmé hrany čtverce s hranou mezi podstavami, popřípadě nějaký jiný údaj, ze kterého se, společně s výše zmíněnými informacemi, dá těleso jednoznačně určit.

Úloha 2A Váha zaokrouhluje

Pro každou hodnotu x, kterou váha ukáže, musíme počítat s tím, že reálná hmotnost bude ležet mezi o půl gramu menší hmotností (zapsáno pomocí desetinné čárky: $(x-1)$,5 g) a o půl gramu vyšší hmotností (x,5 g). Např. pro $x = 1$ g tak skutečná hmotnost leží mezi 0,5 g a 1,5 g, pro 2 gramy mezi 1,5 g a 2,5 g, atd.

Uvažujme nyní o hodnotách v tabulce nejen jako o jednom čísle, ale jako o rozmezí mezi největší a nejmenší možnou hodnotou naměřené hmotnosti. Pak můžeme z každé takové maximální a minimální možné hmotnosti určit hmotnost jedné náušnice, která by takové naměřené hodnotě odpovídala – k tomu stačí jednoduše vydělit počtem náušnic. Skutečná hmotnost jedné náušnice pak musí ležet mezi těmito mezními hodnotami. Zkusíme-li toto provést pro naše naměřené hodnoty, dostaneme hodnoty zanesené v tabulce 1.

počet náušnic	celková hmotnost	rozmezí hmotnosti jedné náušnice	délka rozmezí
1	0,5 – 1,5 g	0,5 – 1,5 g	1 g
2	2,5 – 3,5 g	1,25 – 1,75 g	0,5 g
3	3,5 – 4,5 g	1,16 – 1,5 g	0,34 g
10	13,5 – 14,5 g	1,35 – 1,45 g	0,1 g
20	26,5 – 27,5 g	1,325 – 1,375 g	0,05 g

Tabulka 1: Rozmezí skutečné hmotnosti jedné náušnice na základě měření.

Zde si můžeme všimnout, že čím více náušnic zvážíme, tím menší rozmezí hmotnosti jedné náušnice dostaneme. Navážená hmotnost nám pro skutečnou hodnotu dá vždy rozpětí 1 gramu a tento 1 gram se vždy dělí mezi příslušný počet náušnic. Čím více náušnic tedy naráz zvážíme, tím přesnější můžeme očekávat výsledek (toho lze obecně využívat u vážení lehkých předmětů). Podíváme-li se nyní na všechny hodnoty, které nám omezují hmotnost jedné náušnice, dospějeme k závěru, že hmotnost musí ležet mezi 1,35 a 1,375 g. Po zaokrouhlení desetiny dostaneme 1,4 g.

Úloha 3A Pětková tabulka

Nejprve se na tabulku podívejme a zkusme si do ní vyplnit jenom značky $S_1, S_2, \ldots$ pro různá sudá čísla a $L_1, L_2, \ldots$ pro různá lichá čísla.

Protože v žádném řádku nesmí být vícekrát stejné číslo, je jasné, že v prvním řádku bude pět různých čísel – pojmenujme je S_1, L_1, S_2, L_2 a S_3. Tímto také dodržíme podmínku o tom, že stranou nesmí sousedit sudé číslo se sudým a liché s lichým. Posuneme-li se ale o řádek níže, narazíme na problém (viz tabulku 2a). V souladu s pravidly umístíme pod S_1 třeba L_1, pod L_1 dáme S_1, pod S_2 potom L_2 a naopak pod L_2 zase S_2. Nyní však nastává potíž – pod S_3 nám z čísel použitých v prvním řádku zbývá akorát S_3. Prohozením s S_1 nebo S_2 bychom si nepomohli, a podíváme-li se na to obecněji, zjistíme, že řešení s pouze pěti čísly nemůže existovat. V jednom řádku totiž potřebujeme pět různých čísel z nichž dvě jsou lichá a tři sudá. V druhém řádku by taktéž mělo ležet pět různých čísel, tentokrát však mají být dvě sudá a tři lichá. Každé číslo je buď sudé, nebo liché, z čehož je jasné, že na vyplnění tabulky budou potřeba nejméně tři sudá a tři lichá čísla. Řešení s právě pěti čísly tak neexistuje.

S_1	L_1	S_2	L_2	S_3
L_1	S_1	L_2	S_2	$L_?$

(a) Lichá a sudá čísla v tabulce.

A	D	B	E	C
D	A	E	B	F
A	D	B	E	C
D	A	E	B	F
A	D	B	E	C

(b) Vyplnění tabulky pomocí A, B, C, D, E, F.

Tabulka 2

Jako nejmenší možný počet čísel, kterými lze vyplnit tabulku, se nám nyní dle předchozí úvahy jeví šest čísel. Označme si je zatím A, B, C, D, E a F. Řekněme navíc, že čísla A, B a C budou mít jinou „sudost nebo lichost“[1] než D, E a F. S těmito (zatím neurčenými) čísly navrhneme tabulku, ve které se pokusíme vměstnat daná čísla co nejvíckrát v souladu s pravidlem (3) – to praví, že v žádném řádku se nesmí stejné číslo vyskytnout víckrát. Budeme chtít co nejmenší součet, proto se nám bude hodit mít větší množství nižších čísel. Jelikož je řádků pět, zdá se, že nejvýše by se to mělo povést právě pětkrát. Budeme se také snažit, aby A, B a C nikdy nesousedily stranami a stejně tak ani D, E a F. Tomuto pak odpovídá například tabulka 2b. Stejná čísla se snažíme dát do dvojic sloupců, protože je pak snazší hlídat, aby v jednom sloupci nebyla čísla lišící se o 1 – zde to dobře půjde.

Vyplnili jsme tedy tabulku šesti čísly, což by měl být nejmenší možný počet. Nyní zbývá vymyslet, jak zařídit co nejnižší součet, který přitom bude dělitelný pěti.

Můžeme si všimnout, že A, B, D a E máme v tabulce pětkrát. Ať tedy budou jejich hodnoty jakékoli, jejich celkový součet zůstane dělitelný pěti, poněvadž $5A + 5B + 5E + 5D = 5(A + B + E + D)$ je násobek pěti. Jelikož je jich v tabulce nejvíce, zkusíme jim později přiřadit co nejmenší hodnoty. Nesmíme navíc zapomenout, že hodnoty čísel v jednom sloupci se nesmí lišit o 1!

Zbývá tedy už jen určit hodnoty C a F. Zatím si můžeme vybrat, jestli budou sudá nebo lichá, a víme, že C se vyskytuje třikrát a F dvakrát. Jednoduše by nás mohlo napadnout jim přiřadit hodnoty 5 a 10, tedy je udělat dělitelné pěti samy o sobě. Potom by byl jejich součet 35, a protože za A, B, D a E bychom mohli napsat čísla 1 až 4, byl by celkový součet $20 + 15 + 10 + 5 + 35 = 85$. Tady však narazíme na problém – jelikož čísla 1 a 3 se obě liší o 1 od 2, nedají se tato čísla rozmístit způsobem, který by dodržel jak podmínku na různou paritu sousedících čísel, tak požadavek na jejich rozdíl.

Do řešení tak musíme zahrnout i nějaká větší čísla. Kdybychom například vzali místo 3 nejbližší volné číslo 7, mohli bychom tak dostat ve dvojicích kombinace $(1,4)$ a $(2,7)$, které se neliší o 1 a které by nám daly součet $45 + 25 + 35 = 105$. Podobně bychom mohli vzít 6 místo 2, čímž bychom dostali dvojice $(1,4)$ a $(3,6)$ a opět součet 105.

Zamysleme se ale ještě, jestli nemůžeme dosáhnout i nižšího součtu všech C a F než je $5 + 5 + 5 + 10 + 10$. Přitom by také s trochou štěstí mohl odpadnout problém s 2, 3 a jejich sousedy tím, že bychom tyto číslice využili jako C nebo F. Můžeme si tak zkusit projít čísla dělitelná pěti nižší než 35 a zkusit, jaká C a F by případně mohla dát takové součty. Po chvíli přemýšlení a zkoušení dojdeme k tomuto:

5: nelze,
10: nelze,
15: nelze,
20: lze získat jako $6 + 6 + 6 + 1 + 1$ nebo $2 + 2 + 2 + 7 + 7$,
25: lze získat jako $7 + 7 + 7 + 2 + 2$ nebo $3 + 3 + 3 + 8 + 8$,
30: lze získat jako $8 + 8 + 8 + 3 + 3$ nebo $4 + 4 + 4 + 9 + 9$.

Z tohoto na první pohled jistě nejlépe vypadá součet 20. Rozeberme případy:

- Pokud bychom vzali variantu $6 + 6 + 6 + 1 + 1$ a písmenům A až D by byla přiřazena čísla 2, 4, 5 a 7, součet by byl $20 + 10 + 35 + 20 + 25 = 110$.
- Pro variantu $7 + 7 + 2 + 2 + 2$ by písmenům A až D patřila čísla 1, 3, 4 a 6, součet by byl $20 + 5 + 15 + 20 + 30 = 90$, což je zatím nejlepší.
- Varianta $7 + 7 + 7 + 2 + 2$ dá vyšší součet, a varianta s $3 + 3 + 3 + 8 + 8$ dá za využití písmen A až D s hodnotami 1, 2, 4 a 5 součet $25 + 5 + 10 + 20 + 25 = 85$, což je ještě lepší než 90.
- Varianta $8 + 8 + 8 + 3 + 3$ bude opět vyšší.
- Varianta $4 + 4 + 4 + 9 + 9$ může písmena A až D využít 1, 2, 5 a 6, případně 1, 3, 6 a 8, a součet bude opět vyšší než již objevené varianty.

Po pečlivém prošetření těchto možností tak můžeme konstatovat, že součet 85 je nejmenší možný, a nejlepší možné variantě tak odpovídá tabulka 3.

[1] V matematice se pro „sudost nebo lichost“ používá termín *parita*.

1	4	5	2	3
4	1	2	5	8
1	4	5	2	3
4	1	2	5	8
1	4	5	2	3

Tabulka 3: Jedno z vyplnění dosahujících nejmenšího součtu.

Úloha 4A Telefonní spojení

Ze zadání známe posloupnost, kterou nám vytvoří zvuk [1], tedy [2 4 0 4 1 3] (každé další číslo přitom znamená signál posunutý v čase). Při násobení zvuku na vstupu se přitom přenásobí i signál, a přichází-li v jednom čase dva signály, zkrátka se sečtou.

Pojďme tedy nejprve zjistit, co za signál uslyšíme na druhé straně při vstupním signálu [6 4 0 7 3]. Zvuk 6 vygeneruje signál

$$6 \cdot [2\ \ 4\ \ 0\ \ 4\ \ 1\ \ 3] = [12\ \ 24\ \ 0\ \ 24\ \ 6\ \ 18].$$

Zvuk 4 přijde až o jednu dobu později, místo prvního čísla si tedy napíšeme pomlčku, a až za ní začneme signál [2 4 0 4 1 3], tedy

$$4 \cdot [-\ \ 2\ \ 4\ \ 0\ \ 4\ \ 1\ \ 3] = [-\ \ 8\ \ 16\ \ 0\ \ 16\ \ 4\ \ 12]$$

a obdobně

$$\begin{aligned} 0 \cdot [-\ \ -\ \ 2\ \ 4\ \ 0\ \ 4\ \ 1\ \ 3] &= [-\ \ -\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0], \\ 7 \cdot [-\ \ -\ \ -\ \ 2\ \ 4\ \ 0\ \ 4\ \ 1\ \ 3] &= [-\ \ -\ \ -\ \ 14\ \ 28\ \ 0\ \ 28\ \ 7\ \ 21], \\ 3 \cdot [-\ \ -\ \ -\ \ -\ \ 2\ \ 4\ \ 0\ \ 4\ \ 1\ \ 3] &= [-\ \ -\ \ -\ \ -\ \ 6\ \ 12\ \ 0\ \ 12\ \ 3\ \ 9]. \end{aligned}$$

Nyní zbývá dle pravidel jen sečíst dohromady čísla na stejných pozicích, tedy

$$\begin{gathered}[12\ \ \ 24+8\ \ \ 0+16+0\ \ \ 24+0+0+14\ \ \ 6+16+0+28+6\ \ \ 18+4+0+0+12\ \ \ 12+0+28+0\ \ \ 0+7+12\ \ \ 21+3\ \ \ 9] \\ = \\ [12\ \ \ 32\ \ \ 16\ \ \ 38\ \ \ 56\ \ \ 34\ \ \ 40\ \ \ 19\ \ \ 24\ \ \ 9].\end{gathered}$$

Tento signál uslyší buřňák Tomáš na druhé straně telefonní linky.

Nyní se podívejme na opačnou úlohu – co říct, aby Tomáš na druhé straně slyšel signál [6 20 30 40 23 49 19 29 2 6]? Z předchozího příkladu vidíme, že v čase jedna je vstup dán pouze prvním zvukem – šestka na začátku tedy musí vznikat jako součin 2 a prvního čísla signálu, první číslo tedy bude 3. Celý signál vzniklý z 3 pak je

$$3 \cdot [\ldots] = [6\ \ 12\ \ 0\ \ 12\ \ 3\ \ 9].$$

Na druhé pozici chceme 20 a z předchozího již máme 12. Chybí tedy 8, což je čtyřnásobek 2, tedy

$$4 \cdot [-\ \ \ldots] = [-\ \ 8\ \ 16\ \ 0\ \ 16\ \ 4\ \ 12].$$

Na třetí pozici chceme 30 a již k nám přichází 0 a 16, tedy zbývá 14 a v čase 3 tak půjde o sedminásobek signálu:

$$7 \cdot [-\ \ -\ \ \ldots] = [-\ \ -\ \ 14\ \ 28\ \ 0\ \ 28\ \ 7\ \ 21].$$

Na čtvrté pozici chceme 40 a z předchozích kroků dostáváme $12 + 0 + 28 = 40$, tedy signál zde bude 0:

$$0 \cdot [-\ \ -\ \ -\ \ \ldots] = [-\ \ -\ \ -\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$$

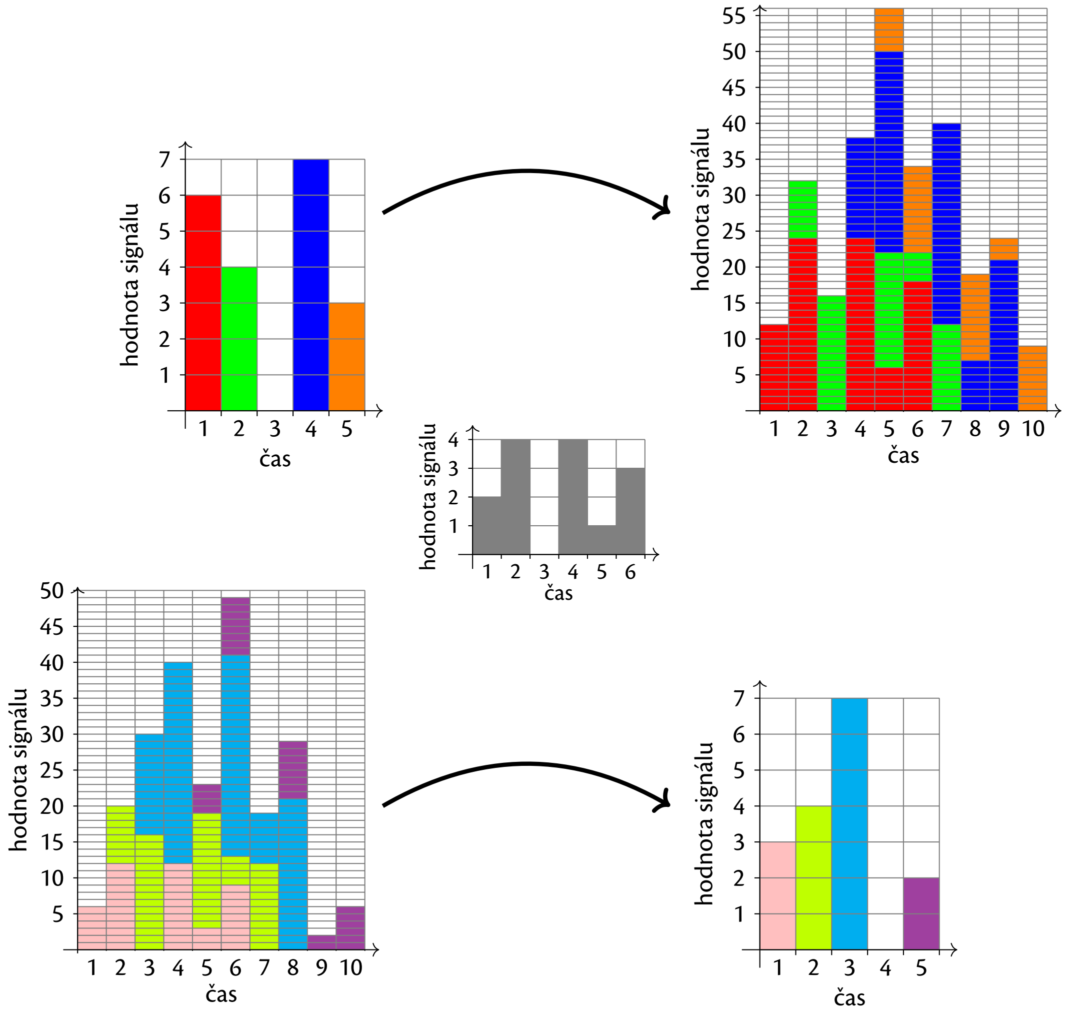
Na páté pozici by měla být 23 a z dřívějška přichází $3 + 16 + 0 = 19$. Zbývá tedy 6 a opět by mělo jít o dvojnásobek zvuku:

$$2 \cdot [-\ \ -\ \ -\ \ -\ \ \ldots] = [-\ \ -\ \ -\ \ -\ \ 4\ \ 8\ \ 0\ \ 8\ \ 2\ \ 6]$$

Nyní zbývá právě 5 dalších pozic do konce. Pokud chceme mít zprávu bez nějakého pokračování navíc, pak to znamená, že už bychom ji neměli prodlužovat (každý zvuk vydává signál po 6 časových dob). Pojďme to ale raději ověřit:

- Dále má následovat 49, což zde bude zatím $9 + 4 + 28 + 0 + 8 = 49$, tedy následující číslo skutečně vychází jako 0.
- Poté má přijít 19, zde předchozí kroky přispívají $12 + 7 + 0 + 0$ což je opět 19.
- Následovat má 29, k čemuž přispěje $21 + 0 + 8 = 29$.
- Na závěr už přispívá jen signál z posledního zvuku, což jsou po řadě 2 a 6.

Zodpověděli jsme tedy i druhou otázku a zbývá jen zapsat získaný signál pohromadě, což je zde [3 4 7 0 2]. Ilustraci zde nejlépe provedeme na čtverečkovaném papíře vybarvovaném různými barvami pro příspěvky od různých signálů – např. jako na obrázku 2.



Obrázek 2: Skládání signálů.

Úloha 5A Stonožka

Kdyby stonožka dokázala plně využít všechny své nohy, mohla by každou z 30 nohou šlehat $10 + 5$ sekund. Celkem by tedy šlehala $(10\,\mathrm{s} + 5\,\mathrm{s}) \cdot 30 = 450\,\mathrm{s}$ neboli 7,5 minuty. To je víc, než potřebuje, dokonce by stačilo, kdyby každou nohou šlehala jen oněch prvních 10 sekund.

Jak ale nohy co nejlépe využít? Začínáme od pravé nohy prvního páru. Až stonožka došlehá tam, může předat metličku do levé nohy ve stejném nebo v dalším páru.

Zůstane-li metlička v prvním páru, po došlehání levou nohou musí metličku předat do pravé nohy druhého páru. Tam udělá to samé a postup zopakuje i pro všechny ostatní páry. Na konci už bude mít odšlehaných pět minut. Po našlehání posledním párem může předat metličku křížem do předchozího páru a ještě šlehat $14 \cdot 2 \cdot 5\,\mathrm{s} = 140\,\mathrm{s}$ šlehat. (V posledním páru nebude moct šlehat podruhé.)

Stonožka by také mohla po prvním šlehání předat metličku do levé nohy druhého páru, pak do pravé nohy třetího páru a s každým dalším šleháním takto posouvat metličku křížem do dalšího páru. Na konci by musela předat metličku do protější nohy stejného páru. Poté by stejným způsobem předala metličku do dosud nevyužitých nohou a naposled by šlehala levou nohou prvního páru. Kdyby chtěla pokračovat, předala by metličku zpátky do pravé nohy prvního páru a celý postup zopakovala s tím rozdílem, že už bude metličku předávat po pěti sekundách. Tímto způsobem by plně využila všechny své nohy.

Celkem tedy může šlehat 7,5 minuty, což by mělo stačit na jeden a půl kelímku šlehačky.

Kategorie starší

Úloha 1B Rumová

Nejdříve pro Sylvii spočítáme, kolik alkoholu její pralinky celkem obsahují. Víme, že ve 145 g pralinek je jedno procento 50% roztoku alkoholu. Jedno procento ze 145 g je 1,45 g. Tento skoro gram a půl rumu je z půlky tvořen alkoholem. Takže celkem budeme mít v pralinkách 0,725 g alkoholu.

My však víme, jaký objem alkoholu kvasinky potřebují, musíme proto převést hmotnost alkoholu v pralinkách na objem. K tomu využijeme znalost hustoty alkoholu a vzorečku $V = \frac{m}{\rho} = \frac{0{,}725\,\mathrm{g}}{0{,}79\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}} = 0{,}9177\,\mathrm{ml}$. To není ani mililitr. Tedy pralinky nám stačit nebudou, musíme obětovat několik vosích hnízd.

Pro vosí hnízda nejprve spočítáme, kolik rumu celkem skončilo v těstu. Měli jsme šest patnáctimililittrových lžic 40% rumu, což je celkem 90 ml rumu. Z toho 40 % tvoří čistý alkohol a 40 % z 90 ml rumu je 36 ml čistého alkoholu. Tento objem čistého alkoholu je rovnoměrně rozložen ve všech 30 vosích hnízdech. Na každé hnízdo tak připadne 36 ml : 30 = 1,2 ml alkoholu. Naše kvasinky potřebují 12 ml, proto jim bude stačit vosích hnízd deset.

Úloha 2B Neuronová síť

Zkusme výpočet sítě zjednodušit. Označme si vstupy jako A = obtížnost, B = opravující, C = dní před koncem kola a počítejme, jaké výrazy vyjdou v jednotlivých neuronech sítě. Na konci pak dostaneme vzoreček pro výstup na základě vstupů.

Zkusme to postupně. V první vrstvě se stačí u každého neuronu podívat na tři šipky, které do něj vedou, a zapsat je do vzorce s neznámými A, B, C. V prvním neuronu (od shora) dostaneme $1 \cdot A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C$, v druhém $0 \cdot A - 1 \cdot B + 0{,}2 \cdot C = -B + 0{,}2 \cdot C$ a v posledním $1 \cdot A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C$. Můžeme si všimnout, že první neuron nám vychází stejně jako poslední.

Pro každý neuron z druhé vrstvy se podíváme na šipky, které do něj vedou, přenásobíme příslušnými čísly výrazy neuronů z první vrstvy a sečteme (posbíráme dohromady všechny členy s A, všechny členy s B a všechny členy s C). Pro první neuron máme

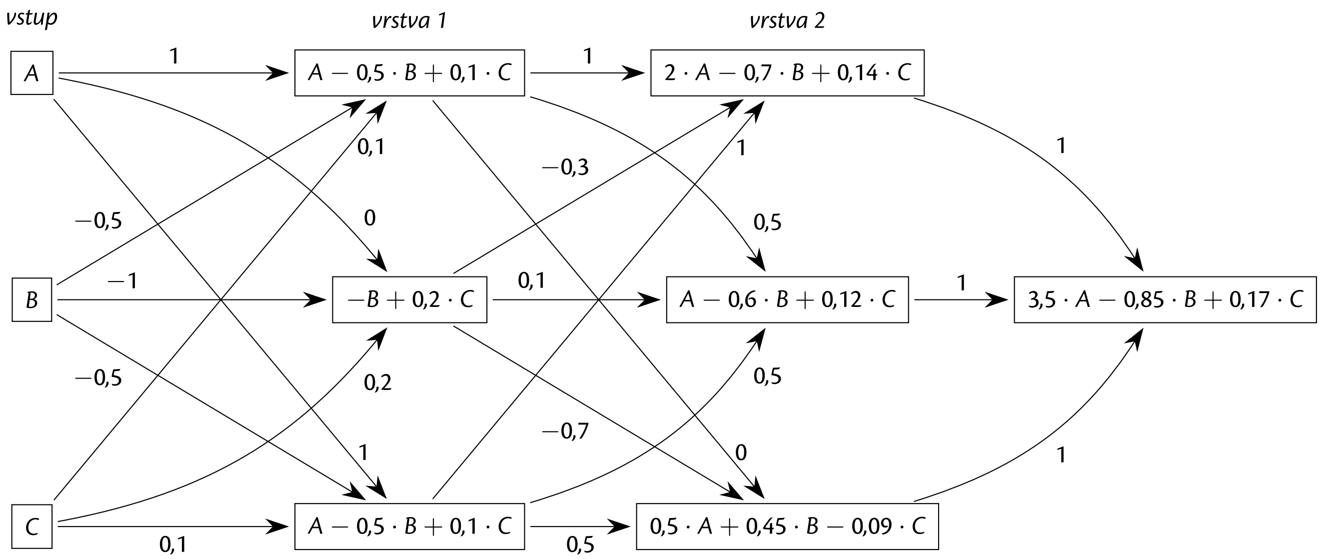
$$\begin{aligned}
\text{první neuron} &= 1 \cdot (A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C) - 0{,}3 \cdot (-B + 0{,}2 \cdot C) + 1 \cdot (A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C) = \\
&= A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C + 0{,}3 \cdot B - 0{,}06 \cdot C + A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C = \\
&= (1 + 1) \cdot A + (-0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}5) \cdot B + (0{,}1 - 0{,}06 + 0{,}1) \cdot C = \\
&= 2 \cdot A - 0{,}7 \cdot B + 0{,}14 \cdot C.
\end{aligned}$$

Obdobným výpočtem pak i

$$\begin{aligned}
\text{druhý neuron} &= 0{,}5 \cdot (A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C) + 0{,}1 \cdot (-B + 0{,}2 \cdot C) + 0{,}5 \cdot (A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C) = \\
&= (0{,}5 + 0{,}5) \cdot A + (-0{,}25 - 0{,}1 - 0{,}25) \cdot B + (0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}05) \cdot C = \\
&= A - 0{,}6 \cdot B + 0{,}12 \cdot C, \\
\text{třetí neuron} &= 0 \cdot (A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C) - 0{,}7 \cdot (-B + 0{,}2 \cdot C) + 0{,}5 \cdot (A - 0{,}5 \cdot B + 0{,}1 \cdot C) = \\
&= (0 + 0{,}5) \cdot A + (0 + 0{,}7 - 0{,}25) \cdot B + (0 - 0{,}14 + 0{,}05) \cdot C = \\
&= 0{,}5 \cdot A + 0{,}45 \cdot B - 0{,}09 \cdot C.
\end{aligned}$$

Jako poslední už spočteme konečný výstup sítě. Všechny tři šipky do něj mají váhy 1, takže prostě sečteme výrazy z neuronů druhé vrstvy, tedy

$$\begin{aligned}
\text{výstup} &= (2 \cdot A - 0{,}7 \cdot B + 0{,}14 \cdot C) + (A - 0{,}6 \cdot B + 0{,}12 \cdot C) + (0{,}5 \cdot A + 0{,}45 \cdot B - 0{,}09 \cdot C) = \\
&= (2 + 1 + 0{,}5) \cdot A + (-0{,}7 - 0{,}6 + 0{,}45) \cdot B + (0{,}14 + 0{,}12 - 0{,}09) \cdot C = \\
&= 3{,}5 \cdot A - 0{,}85 \cdot B + 0{,}17 \cdot C.
\end{aligned}$$



Obrázek 3: Hodnoty v jednotlivých neuronech na základě vstupu.

Hlavní část práce máme nyní za sebou. Výstup sítě dovedeme vypočítat přímo z hodnot jednotlivých vstupů, nemusíme pro měnící se hodnoty vstupů počítat vždy znovu celou neuronku. Dovedeme tedy odpovědět na otázku ze zadání: pokud se úloha Matyldě zdála středně těžká ($A = 1$), opravuje Alenka ($B = 1$) a do konce kola zbývalo $C = 7$ dní, vyjde nám z neuronové sítě výstup

$$3{,}5 \cdot A - 0{,}85 \cdot B + 0{,}17 \cdot C = 3{,}5 \cdot 1 - 0{,}85 \cdot 1 + 0{,}17 \cdot 7 = 3{,}5 - 1{,}35 + 1{,}19 = 3{,}84.$$

Kdybychom tedy zaokrouhlili na celé body, pak síť předpovídá Matyldě zisk čtyř bodů.

Z pohledu na získaný vzoreček taky hned vidíme, že pro spoustu vstupů síť skutečně předpoví nesmyslný výsledek. Číslo, kterým se ve výsledku násobí B, je záporné, takže např. stačí, aby $A = 0$ i $C = 0$, načež bude výsledkem $-0{,}85 \cdot B$. To vyjde pro kteréhokoliv opravovatele vyjma Zuzky jako záporné číslo. Naopak kdyby $A = 2$ a $B = 0$ (Zuzka opravuje lehkou úlohu), pak se vzoreček zjednoduší na $7 + 0{,}17 \cdot C$, takže pokud Matylda úlohu odevzdá včas, předpoví jí síť zisk větší než 7 bodů, což je víc, než kolik lze z úlohy maximálně získat. Neuronová síť tedy může často dávat nesmyslné výsledky, jak dosvědčují uvedené příklady.

Úloha 3B Generování řetězců

Na vygenerování řetězce 00222100 jinou posloupností pravidel než tou ze zadání má Honza hned několik možností. Začínat samozřejmě musí počátečním symbolem A, na něj pak například použije pravidlo (iii) a získá 00A, pak použije pravidlo (iv) a dostane řetězec ve tvaru 00A00, což už je stav, ve kterém se nacházel i v příkladu v zadání, a protože se v prvních dvou pravidlech liší, můžeme pak dále použít zbytek posloupnosti ze zadání a celková posloupnost bude jiná. Naše nová posloupnost pravidel tedy bude vypadat takto: (iii), (iv), (ii), (vi). Případně můžeme zvolit jinou změnu, místo pravidla (vi) lze použít za sebou pravidla (v) a (vii) a dojít opět ke stejnému výsledku.

Při popisování vygenerovaných řetězců se zaměříme nejprve na pravidla pro počáteční symbol A Všimneme si ale, že pravidlo (ii) se od ostatních liší, nejen vygenerovanými čísly ale hlavně tím, že po jeho aplikování už se nemůžeme dostat na písmeno A. Pravidlo (ii) totiž vygeneruje písmeno B a z žádného dalšího písmena kromě A samotného už písmeno A znovu nevygenerujeme. Z toho vyplývá, že pravidla (i), (iii) a (iv) se mohou aplikovat pouze dokud se neaplikuje pravidlo (ii). Co tedy můžeme říct o pravidlech (i), (iii), (iv)? Všechna pravidla generují dvě číslice 0, ty se liší pouze pozicí vůči písmenu A. Každé pravidlo tedy generuje sudý počet 0, můžeme tedy konstatovat, že ve výsledném řetězci počet 0 musí být taktéž sudý a může být i nulový, pokud bychom rovnou na počáteční symbol použili pravidlo (ii). Případné číslice 0 se také budou vždy nacházet na krajích vygenerovaného řetězce, tedy první při čtení zepředu či zezadu. Po vygenerování 0 tedy nemáme jinou možnost než použít pravidlo (ii), a do řetězce nám tak přibude 2B1. Naše řetězce potom vypadají nějak takto:

$$\underbrace{0\ldots0}_{t\text{-krát}}\,2B1\,\underbrace{0\ldots0}_{s\text{-krát}}, \qquad \text{kde } t + s \text{ je sudé.}$$

Teď můžeme buď použít rovnou pravidlo (vi) a získat řetězec 00…2221…00, nebo stejného výsledku dosáhneme postupným použitím pravidel (v) a (vii). Všechny řetězce tedy mají sudý (celkový) počet 0 na krajích a mezi nimi čísla 2221.

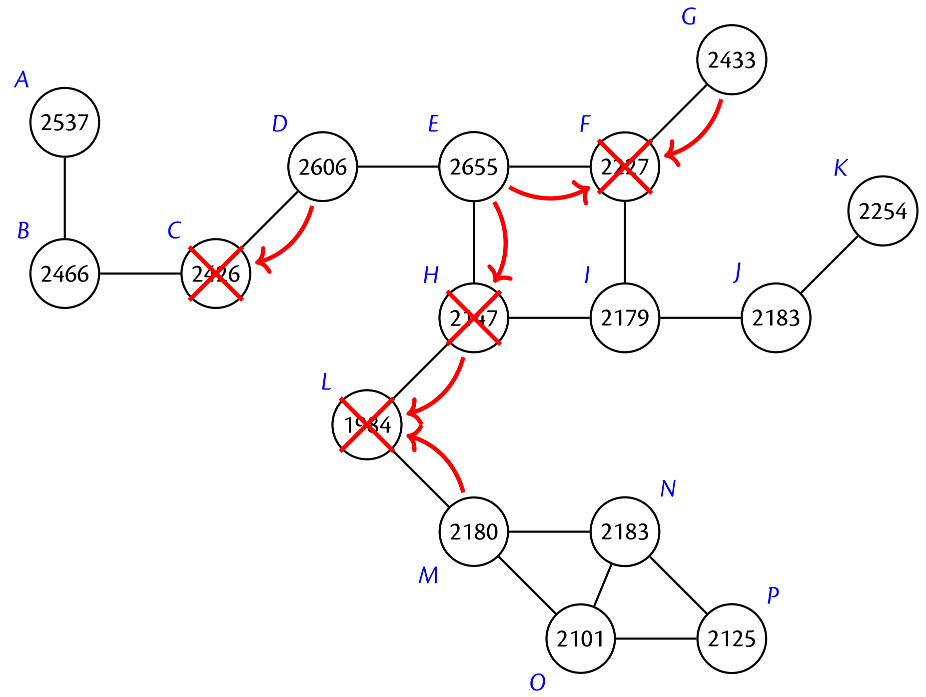
Zaměřme se nyní na generování řetězců tvaru 0000…00003331111…111, kde počet počátečních nul je o jednu větší než počet jedniček na konci. Jako počáteční symbol si zvolíme například písmeno S. Nejprve si představíme, jak bychom vytvářeli řetězec, který by měl stejně mnoho nul jako jedniček. Můžeme se inspirovat pravidlem (i) ze zadání a vytvořit pravidlo tvaru $S \rightarrow 0S1$. Tímto způsobem můžeme získat nekonečně mnoho řetězců se stejným počtem 0 a 1, pak ale potřebujeme přidat ještě jednu 0. Uděláme to jednoduchým pravidlem

$S \to 0T$. Všimneme si totiž, že kdyby pravidlo měnilo S na $0S$, mohli bychom si číslic 0 vygenerovat libovolně a ne pouze jednu. Proto jsme použili další písmeno. Poté potřebujeme ještě vygenerovat tři trojky, přidáme tak pravidlo $T \to 333$. Celkově tedy používáme písmena S (počáteční symbol), T, číslice 0, 1, 3 a pravidla

(i) $S \to 0S1$,
(ii) $S \to 0T$,
(iii) $T \to 333$.

Úloha 4B Kamzíci a města

V mapě máme zaneseny naměřené nadmořské výšky, které se od skutečných liší nanejvýš o 50 m. Máme-li tedy sousední města X, Y a naměřená výška X je více než 100 m vyšší než naměřená výška Y, pak si můžeme být jisti, že X leží výš než Y (značme $X > Y$). I kdyby totiž skutečná výška Y byla o 50 m vyšší než naměřená a skutečná výška X o 50 m nižší než naměřená, pořád by to nepřekonalo onen stometrový rozdíl.



Obrázek 4: Vyškrtnuté obce nikdy nemohou být městy. Šipky značí vztah „zaručeně leží výš".

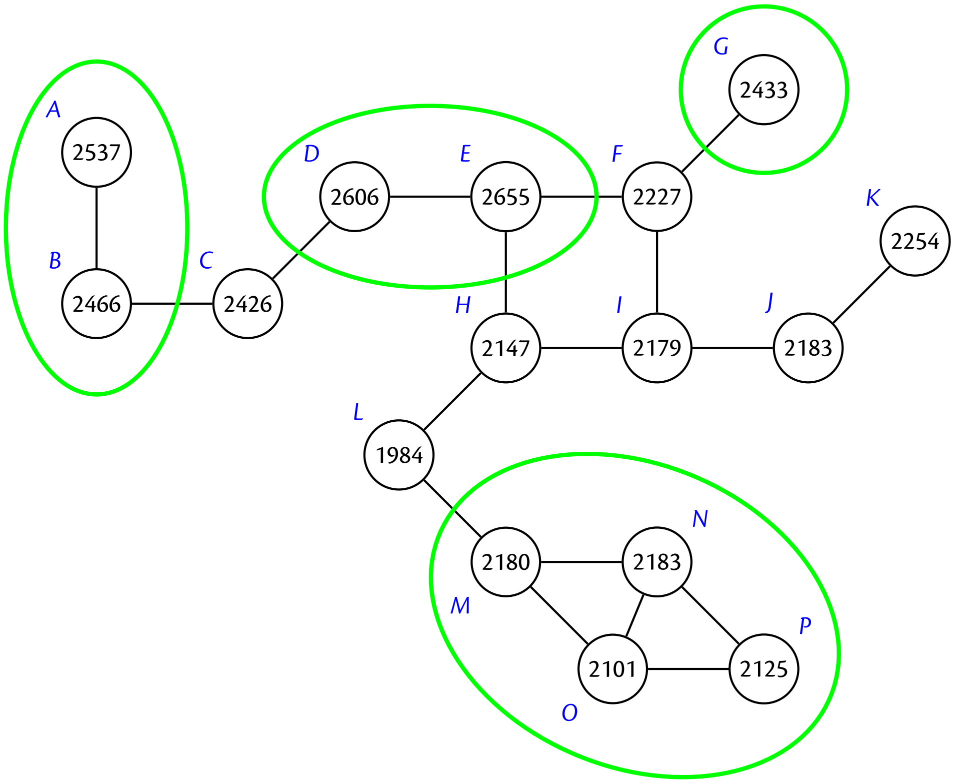
Pokud si obce v Knížectví kamzíků označíme písmeny A až P jako na obrázku 4, můžeme si být jisti, že $D > C$, $E > H$, $G > F$, $H > L$ a $M > L$. To znamená, že C, F, H a L určitě nejsou města, takže nebudou součástí žádné aglomerace. Odebráním těchto měst se mapa rozpadne na několik menších, rozpojených kousků: $\{A,B\}$, $\{D,E\}$, $\{G\}$, $\{I,J,K\}$ a $\{M,N,O,P\}$. Jelikož města aglomerace spolu musí být spojena cestami, můžeme si být jisti, že každá aglomerace leží celá uvnitř jedné z předchozích částí Knížectví. Buďme však obezřetní: aglomerace může vyplňovat celou část, která nám takto zbyla; ale taky může vyplňovat jen její menší kus; dokonce by se v jedné části Knížectví mohli nacházet dvě a více aglomerací, nebo naopak žádná. Projděme postupně všechny části:

- $\{A,B\}$. Podle naměřených výšek je A výš než B, ale rozdíl je menší než 100 m, takže vhodným posunutím obou o 50 m by se mohlo stát $B > A$. To znamená, že A samo o sobě aglomeraci netvoří. Ani B samo netvoří aglomeraci – může nastat $A > B$. Co A a B dohromady? Aby ani jedno z nich nebylo městem, muselo by platit $A < B$ (aby A nebylo město) a následně $B < C$ (aby B nebylo město). To by ale znamenalo i $A < C$, což nejde, protože rozdíl mezi naměřenými výškami A a C je víc než 100. Alespoň jedno z A, B tak vždy bude město, nedokážeme však určit které – žádné z nich samo o sobě by městem být nemuselo, takže ani jedno z nich nemůže tvořit samostatnou aglomeraci, což znamená, že $\{A,B\}$ je aglomerace.
- $\{D,E\}$. Zaprvé si všimněme, že naměřené výšky D a E se liší o méně než 100 m, takže by mohlo nastat jak $D > E$, tak i $D < E$, takže by se mohlo stát, že D není město, a stejně tak by se mohlo stát, že E není město. Všechny sousedící obce (C, F, H) však mají naměřené výšky výrazně nižší (o více než 100 m), takže budou určitě nižší než obě D, E. To znamená, že jedno z D, E bude určitě městem (to vyšší, anebo obě, budou-li stejně vysoko), takže $\{D,E\}$ je aglomerace – ověřili jsme, že samo o sobě ani jedno město k vytvoření aglomerace nestačí.
- $\{G\}$. Obec G má jediného souseda, o kterém víme, že je zaručeně nižší. Máme tak jistotu, že G je město, takže už samo o sobě tvoří aglomeraci.
- $\{I,J,K\}$. Naměřené výšky obcí I, J, K se mezi sebou liší vždy jen o méně než 100 m, takže by se mohlo zdát, že by mohly tvořit aglomeraci. Nesmíme však zapomenout na sousedící obce F a H. Ačkoliv je F škrtnuté, neboť má ještě vyšší sousedy F a G, stále je

(podle naměřené výšky) výš než I. Pokud by tedy chyby výškoměru byly obzvláště zákeřné, mohlo by nastat $F > I > J > K$, takže by žádná z obcí I, J, K nebyla město. To by přihodilo třeba tehdy, kdyby $F = 2227$, $I = 2220$, $J = 2210$, $K = 2204$, což ještě splňuje podmínku, že výškoměr se v pokaždé spletl o nanejvýš 50 m. V této části Knížectví tak žádnou aglomeraci nenajdeme.

- $\{M,N,O,P\}$. Naměřené výšky těchto obcí se opět liší „jen málo“, mezi sebou vždy o méně než 100 m. Jediná sousedící obec L je navíc zaručeně nižší než všechny M, N, O, P, takže nám nenastane problém jako v předchozí části. Zdůvodněme si, proč $\{M,N,O,P\}$ skutečně je aglomerace. Na základě měření leží skutečná výška obce M v rozsahu 2130 až 2230, obec N rozsah 2133 až 2233, pro O je to 2051 až 2151 a konečně pro P platí rozsah 2075 až 2175. Všimněme si, že tyto čtyři rozsahy mají společný překryv – výšek z rozsahu 2133 až 2151 může nabývat každá ze čtyř obcí. Vhodným „nastavením“ chyb bychom tedy dovedli skutečné výšky těchto čtyř obcí libovolně seřadit. Tím bychom zvládli docílit toho, že kterékoliv z nich je jediným městem: například aby M bylo jediné město, vzali bychom třeba $M = 2150$, $N = 2145$, $O = 2140$ a $P = 2135$, což by znamenalo $M > N > O > P$. To znamená, že kdybychom kteroukoliv z obcí ubrali, zbytek by netvořil aglomeraci. Naopak víme, že jedna z obcí bude nejvyšší ze všech čtyř, takže už bude vyšší (nebo rovna) než všechny její sousední obce, takže bude městem. Tím jsme zdůvodnili, že $\{M,N,O,P\}$ je aglomerace.

Dohromady tak v Knížectví máme čtyři aglomerace $\{A,B\}$, $\{D,E\}$, $\{G\}$ a $\{M,N,O,P\}$ (znázorněné na obrázku 5).



Obrázek 5: Aglomerace v Knížectví kamzíků.

Úloha 5B Návštěvy

Jednotliví kamarádi bydlí ve vrcholech čtverce o straně $a = 100$ m. Kdybychom si nakreslili dvě kružnice se středy ve dvou protějších vrcholech a poloměry 70 m, všimli bychom si, že se uprostřed čtverce těsně míjejí. To by znamenalo, že zvířátka obývající protější vrcholy čtverce od sebe bydlí dále než 140 m, takže se nemohou potkat.

Abychom úvahu z obrázku podepřeli přesným výpočtem, spočítejme, jak dlouhá je úhlopříčka čtverce. Z Pythagorovy věty si tuto délku ℓ vyjádříme pomocí strany čtverce jako

$$\ell = \sqrt{a^2 + a^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{100^2 + 100^2}\,\mathrm{m} = 100 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{m} \doteq 141{,}4\,\mathrm{m}.$$

Úhlopříčka je tedy skutečně delší než 140 m, takže zvířátka z protějších vrcholů se v rozsahu 70 m od svých domů nemohou potkat.

Aby se tedy zvířátka mohla potkat, bude potřeba prodloužit povolenou vzdálenost. Když opět uvážíme dvě zvířátka z protějších vrcholů, mohla by se potkat na půli cesty, tedy přesně ve středu čtverce. Úhlopříčky se navzájem půlí, takže tento bod setkání bude výhodný i pro druhou dvojici zvířátek. Vzdálenost z vrcholu čtverce do jeho středu navíc snadno získáme jako polovinu délky úhlopříčky $\frac{\ell}{2}$. Z toho dostáváme, že zvířátkům bude k setkání jako povolená vzdálenost stačit přibližně 70,7 m.

Zvířátka by proto měla rodiče požádat o prodloužení vycházky na alespoň 71 m.