Kategorie mladší

Úloha 1A Pěstitelská

Výsledná tabulka, kterou chce Gustav získat, bude opět obsahovat dva řádky a dva sloupce dle odlišných barev květů a jim příslušících barev semínek.

Pro začátek se podívejme například na modré květiny. Z první tabulky vidíme, že získáme 2 modré plody a 1 žlutý. Z modrých plodů potom dostaneme 3 modrá semena a 1 žluté za každý plod (celkem tedy v tomto případě $2 \cdot 3 = 6$ modrých semen a $2 \cdot 1 = 2$ žlutých semen); ze žlutého plodu potom máme 2 modrá a 3 žlutá semínka. Sečteme-li počty modrých i žlutých semen dohromady, snadno pak vidíme, že z modré květiny dostaneme 8 modrých semen a 5 žlutých.

Obdobným způsobem můžeme získat řešení pro žluté květy, nicméně zde se nyní pokusíme získat obecnější řešení, které by mohl Gustav využít i u jiných obdobných tabulek.

Jak jsme z ukázky u modrých květin vypozorovali, pro počet získaných modrých semen musíme sečíst dohromady příspěvky z obou typů plodů, přičemž daná čísla pak musí být přenásobená počtem plodů získaných z vybrané barvy květiny. Symbolicky zapsáno:

$$
\begin{aligned}
\text{počet MS (z jedné barvy květu)} &= \text{počet MS (ze žlutých plodů)} + \text{počet MS (z modrých plodů)} = \\
&= (\text{počet žlutých plodů z dané barvy květu}) \cdot (\text{počet MS z jednoho žlutého plodu}) + \\
&\quad + (\text{počet modrých plodů z dané barvy květu}) \cdot (\text{počet MS z jednoho modrého plodu}),
\end{aligned}
$$

kde MS značí modrá semena (a samozřejmě pro žlutá semena bude platit zcela obdobný vztah).

Za posledním rovnítkem máme nyní již výraz obsahující zkombinované hodnoty obou tabulek, přesně jak se po nás chtělo – a podíváme-li se na toto řešení pořádně, můžeme si všimnout, že vlastně vždy vynásobíme první hodnotu v řádku druhé tabulky s první hodnotou ve sloupci první tabulky, což následně sečteme s obdobným součinem druhých hodnot (lze si asi představit, že u různorodějších rostlin s více možnými barvami bychom pak postupovali stejně u třetí, čtvrté a další hodnoty). Tím získáme hodnotu v nové tabulce, kde barvě květu přísluší odpovídající označení sloupce první tabulky a barvě semen označení řádku tabulky druhé. Tohle obecné řešení se může zdát na první pohled o něco složitější, nicméně jde vlastně o stejný postup, který navíc není vázaný na konkrétní čísla z tabulek, a při jejich změně je tak stále platný, a jak bylo naznačeno, lze jej použít i u obdobných situací u jiných podobných rostlin.

Vrátíme-li se ale k původnímu příkladu, dostaneme kýženou tabulku ve tvaru:

květina		modrá	žlutá
semena	modré	8	14
	žluté	5	14

Tabulka 1: Jaké květiny tvoří plody

Z této tabulky už snadno můžeme zjistit, že počet semen z jednotlivých barev rostlin získaných v prvním roce z jedné květiny odpovídá právě hodnotám v tabulce. Co se týká množství semen po druhém roce (tedy těch, které bude možné zasadit v roce třetím), záleží, zda uvažujeme, že rostlinky po roce uvadají, nebo zda produkují semínka dále.

Po prvním roce bude mít tedy celkem 22 modrých a 19 žlutých krásenek, a po uplynutí dalšího roku můžeme tak políčka modrých květin přenásobit 22 a políčka žlutých květin 19. Prostým součtem žlutých a modrých semen tak dospějeme k finálnímu součtu 376 žlutých a 442 modrých krásenek, případně, počítáme-li že krásenky po roce nezhynou, přičteme za každou původní rostlinu opět 22 modrých a 19 žlutých semínek. Gustav tedy nemusí déle váhat, a může se směle pustit do pěstování svých oblíbených květin.

Úloha 2A Snědený dort

Začneme od Augusta. Ten podle svých slov dort neujídal.

Tuto informaci využijeme u toho co nám tvrdí Ludwig. *Augustus ujídal právě tehdy, když ujídal Bertrand.* Tedy buď ujídal Augustus a Bertrand, nebo ani jeden neujídal. Víme, že Augustus neujídal, Bertrand tedy taky ujídat nemohl.

George tvrdí, že ujídal Ludwig nebo neujídal Augustus. Možné situace splňující Georgeovo tvrzení tedy jsou:

1. Ludwig ujídal a Augustus ujídal.
2. Ludwig neujídal a Augustus neujídal.
3. Ludwig ujídal a Augustus neujídal.

Opět, víme, že Augustus neujídal, takže Ludwig ujídat mohl, ale nemusel.

U Bertrandova tvrzení si také rozepíšeme možnosti, které jeho tvzení splňují.

1. Bertrand s Ludwigem neujídali a George ujídal.
2. Bertrand s Ludwigem neujídali a George neujídal.
3. Ujídal alespoň jeden z dvojice Bertrand a Ludwig a George ujídal také.

Z předchozích výpovědí víme, že Bertrand neujídal. První možnost tomuto požadavku odpovídá, v tomto případě by ujídal pouze George. Druhá možnost vyhovuje také, ta by říkala, že neujídal žádný z nich, což ale není možné, protože někdo dort určitě snědl. Třetí tvrzení bude pravdivé, pokud Ludwig a George ujídali. Možné scénáře jsou tedy tyto:

1. Augustus neujídal, Bertrand neujídal, Ludwig neujídal a George ujídal (tedy ujídal jen George).
2. Augustus neujídal, Bertrand neujídal, Ludwig ujídal a George ujídal (tedy ujídali Ludwig s Georgem).

Tedy Gottlob si může být jistý tím, že Augustus a Bertrand neujídali a že George ujídal, ale neví, jestli ujídal i Ludwig :).

Úloha 3A Motorkář

Aby byl co nejrychlejší, chce Oliver najet samozřejmě co nejméně kilometrů. Docílit toho může různými způsoby, z nichž jeden si nastíníme. Jako dobrý strategický plán se jeví ujet alespoň jednou celých 30 km naráz bez návratu, přičemž by se samozřejmě jednalo o závěrečný úsek trati (z cíle už není třeba se vracet).

Oliver tedy potřebuje na 30. kilometr dovézt 30 l benzínu, aby je pak mohl nabrat a dojet až do cíle. Protože po dojetí ze startu přímo na 30. kilometr mu žádný benzín v nádrži nezbyde, tak potřebuje mít ve vzdálenosti x před ním jiné stanoviště, ze kterého by mohl benzín, který tam předtím převezl, převézt dále. Zdá se, že by mohlo stačit, aby se na něj vrátil jenom jednou a přitom dovezl celých 30 l zásob. Na jednu cestu mezi hledaným stanovištěm a 30. kilometrem spotřebuje $x\,\mathrm{km} \cdot 1\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{km}}$ benzínu a daný úsek projede celkem třikrát (na 30. kilometr, zpět na předchozí stanoviště a ještě jednou na 30. kilometr), lze si tak napsat rovnici $30\,\mathrm{l} = 2 \cdot 30\,\mathrm{l} - 3 \cdot x\,\mathrm{km} \cdot 1\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{km}}$, tedy

$$\text{převezený benzín} = \left(\begin{array}{c}\text{celkové množství benzínu}\\ \text{nabraného na předchozím stanovišti}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{benzín spotřebovaný}\\ \text{na přejezdy mezi stanovišti}\end{array}\right).$$

Celkové množství benzínu nabraného na předchozím stanovišti vychází z toho, že chceme, aby Oliver dvakrát (na obě cesty směrem ke 30. kilometru) nabral plnou nádrž. Vzdálenost x tedy bude 10 km od 30. kilometru (tedy 20 km od startu) a na tomto stanovišti již potřebujeme mít připraveno 60 l benzínu (benzín, který budu chtít nabrat pro cesty dál).

K tomu, aby Oliver dovezl na toto stanoviště potřebných 60 l benzínu, už mu jeden návrat na předchozí stanoviště stačit nebude. Nicméně, pokud bychom se drželi oněch 10 km jako vzdálenosti mezi stanicemi (v předchozím případě se osvědčila, intuitivně tak počítáme s tím, že by mohla být vhodná i na ostatních úsecích), potom by platil vztah $60\,\mathrm{l} = n \cdot 30\,\mathrm{l} - (2 \cdot n - 1) \cdot 10\,\mathrm{l}$, kde n je počet čerpání plné nádrže na předchozím bodu ($2 \cdot n - 1$ značí počet cest, které musíme mezi stanovišti projet – při poslední cestě už se nevrací, proto -1). Význam této rovnice je opět

$$\text{převezený benzín} = \left(\begin{array}{c}\text{celkové množství benzínu}\\ \text{nabraného na předchozím stanovišti}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{benzín spotřebovaný}\\ \text{na přejezdy mezi stanovišti}\end{array}\right).$$

Z této rovnice po úpravě dostaneme $50\,\mathrm{l} = n \cdot 10\,\mathrm{l}$, tedy n je rovno 5, a na stanovišti vzdáleném 10 km od startu by tak bylo třeba mít 150 l benzínu (oněch $n \cdot 30\,\mathrm{l}$, které potřebuje načerpat). V našem postupu převážíme benzín po 10 kilometrech, takže na 10. kilometr už můžeme převážet benzín ze startu, máme tedy pokrytou celou trasu. Množství m přejezdů nutných na tomto prvním úseku se dá určit z obdobného vztahu: $150\,\mathrm{l} = m \cdot 30\,\mathrm{l} - (2 \cdot m - 1) \cdot 10\,\mathrm{l}$, tedy $140\,\mathrm{l} = m \cdot 10\,\mathrm{l}$, a proto $m = 14$.

S touto strategií by tak Oliver ujel na prvním úseku $(2 \cdot 14 - 1) \cdot 10\,\mathrm{km}$, na druhém $(2 \cdot 5 - 1) \cdot 10\,\mathrm{km}$, na třetím $3 \cdot 10\,\mathrm{km}$ a na posledním oněch 30 km. To je celkem 420 km, což průměrnou rychlostí $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ zvládne za 4 hodiny a 12 minut, což je určitě rychleji, než je Silviiných 5 hodin a 15 minut.

Samozřejmě toho může docílit i jinými způsoby, vždy ale musí mít na paměti že do delší vzdálenosti doveze méně paliva, naopak hodně paliva může převážet jen po velmi malých vzdálenostech a jeho ideální, co nejrychlejší trasa, musí obsahovat tak nějak kompromis obojího.

Poznámka po opravování: Ukázalo se, že mnoho z vás zvolilo podobnou taktiku jako ve výše uvedeném ukázkovém řešení. Někteří ale našli i rychlejší možnosti. Výhodnějším se ukázalo býti rozdělit si prvních 30 km nikoli na úseky po 10 km, ale po 7,5 km -– celkový čas na trati v tomto případě činil 3 hodiny a 54 minut. Úplně nejrychlejší došlý postup jednoho z řešitelů pak zahrnoval zanechávání paliva na úsecích o délce pouhého 1 km, přičemž postupným odebíráním benzinu z již projetých stanovišť se celkový čas na trati dostal dokonce pod 3 hodiny (nejvíce benzinu bylo nutno převést na blízká stanoviště od startu, čímž se významně ušetřilo).

Úloha 4A Abstraktní

Po odevzdání všech úkolů vyvěsila Emmy toto vzorové řešení:

$$
\begin{aligned}
(\bigcirc \mho \triangle) \pitchfork (\triangle \mho \bigcirc) &\overset{(9)}{=} (\bigcirc \mho (\bigcirc \mho \bigtriangledown)) \pitchfork (\triangle \mho \bigcirc) \overset{(2)}{=} ((\bigcirc \mho \bigcirc) \mho \bigtriangledown) \pitchfork (\triangle \mho \bigcirc) \overset{(10)}{=} \\
&\overset{(10)}{=} (\square \mho \bigtriangledown) \pitchfork (\triangle \mho \bigcirc) \overset{(1)}{=} (\bigtriangledown \mho \square) \pitchfork (\triangle \mho \bigcirc) \overset{(11)}{=} \diamond \pitchfork (\triangle \mho \bigcirc) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} (\diamond \pitchfork \triangle) \mho (\diamond \pitchfork \bigcirc) \overset{(8)}{=} (\diamond \pitchfork \triangle) \mho \diamond \overset{(11)}{=} ((\bigtriangledown \mho \square) \pitchfork \triangle) \mho \diamond \overset{(4)}{=} \\
&\overset{(4)}{=} ((\bigtriangledown \pitchfork \triangle) \mho (\square \pitchfork \triangle)) \mho \diamond \overset{(5,5)}{=} ((\triangle \pitchfork \bigtriangledown) \mho (\triangle \pitchfork \square)) \mho \diamond \overset{(6)}{=} \\
&\overset{(6)}{=} (\square \mho (\triangle \pitchfork \square)) \mho \diamond \overset{(7)}{=} (\square \mho \bigtriangledown) \mho \diamond \overset{(5)}{=} (\bigtriangledown \mho \square) \mho \diamond \overset{(11)}{=} \diamond \mho \diamond \overset{(12)}{=} \diamond
\end{aligned}
$$

Pod tím byla ještě poznámka:

Možná jste si všimli, že pravidla s proměnnými x, y a z se dají použít jen pro jednotlivé prvky. Výpočet by ale značně urychlila možnost dosazovat za tyto proměnné i celé závorky (tedy výsledky jiných operací). V tomto konkrétním příkladě by nám tedy stačilo dopočítat se k tomu, že jedna závorka bude obsahovat jen jeden prvek, nikoliv výsledek operace s více prvky a tím jsme ukázali, že se tato závorka dá pro účel pravidel s proměnnými považovat za jeden prvek, takže pravidlo můžeme použít i na závorku jako celek – víme-li, že $\bigcirc \mho \triangle$ *je rovno* $\diamond$*, pak můžeme zadání v rámci jednoho kroku, podle pravidla 3, upravit na* $((\bigcirc \mho \triangle) \pitchfork \triangle) \mho ((\bigcirc \mho \triangle) \pitchfork \bigcirc)$.

Abychom nemuseli u každé závorky či výsledku oprace ukazovat, že se dá převést na jeden prvek, tak bychom museli mít zadáno, že výsledek každé operace s prvky $\triangle, \square, \bigcirc, \diamond, \bigtriangledown$ *je opět jeden z nich (v matematice se této vlastnosti říká uzavřenost množiny na operaci: např. přirozená čísla – tedy čísla 1, 2, 3, … – jsou uzavřená na sčítání, neboť když dvě sečteme, dostaneme zase přirozené číslo). S touto podmínkou bychom mohli říci, že když používáme pravidlo na závorku – tj. výsledek operace mezi prvky* $\triangle, \square, \bigcirc, \diamond, \bigtriangledown$ *– jako na celek, tak můžeme, protože výsledek operace uvnitř závorky bude také jeden z těchto prvků.*

Úloha 5A Mravenci

Nejprve se podívejme na to, kolik kterých mravenců přijde během jedné hodiny. Tím zároveň zjistíme počet snězených drobečků za hodinu.

O červených mravencích víme, že jich během 5 minut přijde 20. Za hodinu jich je tedy

$$20 \cdot \frac{60}{5} = 240.$$

Od vzácných červenočerných mravenců přijde jeden zástupce každých 12 minut. Během hodiny jich přijde pouze

$$\frac{60}{12} = 5.$$

Zároveň každou minutu přichází pět černých mravenců. Za hodinu jich potom dorazí

$$5 \cdot 60 = 300.$$

Abychom zjistili, kolik drobečků si mravenci běžně odnesou během 3 dnů, stačí výsledky předchozích výpočtů sečíst a vynásobit počtem hodin:

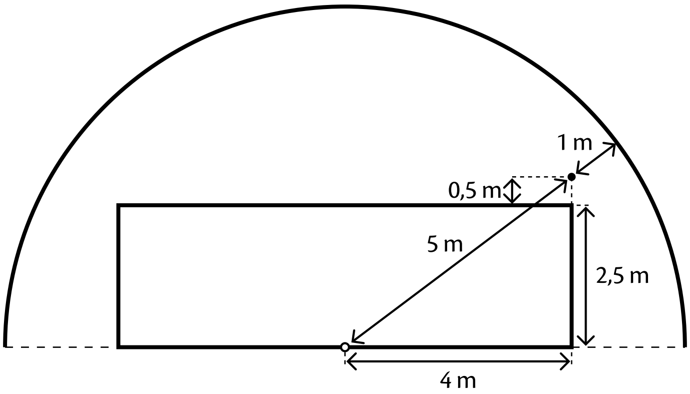
$$(240 + 5 + 300) \cdot 24 \cdot 3 = 545 \cdot 72 = 39240.$$

Víme, že jedna houska se skládá z 10000 drobečků. Pokud chceme nasytit 39240 mravenců, musí Láďa připravit 4 housky, neboť v případě 3 housek by mravencům 760 drobečků scházelo.

Kategorie starší

Úloha 1B Most

Nejprve si načrtneme obrázek parníku, jež se nachází pod mostem (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Průjezd parníku pod mostem. Kilián stojí na pravém okraji lodi.

Je zřejmé, že čím bude Kilián dál od středu lodi (ať už směrem doprava či doleva), tím bude blíž mostu. Proto předpokládejme, že stojí na pravém okraji.

Vzdálenost Kiliána od konstrukce mostu nyní spočteme jako rozdíl poloměru půlkružnice a vzdálenosti Kiliánova ramene od středu půlkružnice. Tuto vzdálenost vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, jedná se o délku přeponu přepony pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna měří 3 m (výška paluby + výška Kiliánova ramene) a druhá odvěsna měří 4 m (polovina šířky paluby). Tedy

$$6 - \sqrt{3^2 + 4^2}\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}.$$

Kilián je tedy pouze 1 m od mostu. Pokud natáhne ruku správným směrem (tak, aby přímka vzniklá jejím prodloužením procházela středem půlkružnice, viz obrázek 1), mostu se zaručeně dotkne.

Úloha 2B Králíček

Z bodu (ii) zadání můžeme usoudit, že mezi ušními alelami je vztah úplné dominance. Protože po zkřížení dvou králíků z bodu (ii) mají mláďata uši nahoru, je alela pro uši nahoru dominantní. Označíme si ji *U*. Alelu pro uši dolů si označíme *u*.

Karlička má uši nahoru, takže její ušní alely jsou buď *UU* nebo *Uu*. Za předpokladu, že Karliččiny alely jsou *Uu* a vybera partnera s ušima dolů (*uu*), je možné, aby její mláďata měla uši dolů.

Naopak, aby Karlička měla mláďata s ušima nahoru, měl by její partner mít ušní alely *Uu* nebo ještě lépe *UU*, aby měla 100% jistotu uší nahoru. Jestliže je Karlička *Uu* (což nevíme) a vybrala by si partnera *Uu*, mohlo by se stát, že některá její mláďata budou mít uši dolů (*uu*).

Z bodu (iii) je zjevné, že vztah mezi alelou pro bílou barvu (označíme *B*) a černou barvu (*Č*) je neúplná dominance. Při jejich kombinaci vzniká barva hnědá. Karlička proto musí mít černého partnera, aby její mláďátka byla hnědá.

Suma sumárum, Karliččin partner může mít kombinace alel *Uu* a *ČČ* v lepším případě *UU* a *ČČ*. Na svém vysněném partnerovi však Karlička rozdíl mezi *Uu* a *UU* nepozná.

Úloha 3B Líná

Víme, že každý den ujdou zvířátka o 300 metrů více než předchozí den. Takže trasa, kterou zvířátka mají ujít v n-tý den, je o 300 metrů delší než ta, kterou mají ujít v den $n-1$, která je zase o 300 metrů delší než ta, co mají ujít v den $n-2$, a tak dále. Za každý proběhlý den se tedy do délky trasy n-tého dne přičte 300 metrů, takže trasa n-tého dne $d_n = n \cdot 300$ m. Po půl roce tak zvířátka půjdou trasu dlouhou $d_{180} = 180 \cdot 300\ \mathrm{m} = 54\,000\ \mathrm{m} = 54\ \mathrm{km}$.

Jaké ale bude celková vzdálenost, kterou ušli? Jedná se o součet vzdáleností za jednotlivé dny, tedy

$$300\ \mathrm{m} + 2 \cdot 300\ \mathrm{m} + \cdots + k \cdot 300\ \mathrm{m} + \cdots + 180 \cdot 300\ \mathrm{m}.$$

V tomto součtu můžeme vytknout 300 m, čímž získáme

$$(1 + 2 + \cdots + k + \cdots + 180) \cdot 300\ \mathrm{m},$$

takže nám stačí posčítat $1 + 2 + \cdots + 180$. To bychom mohli provést ručně, ale raději si odvodíme obecný vzorec.

Na okamžik tedy zapomeňme na číslo 180 a uvažujme obecněji součet $S = 1+2+\cdots+n$, kde n je nějaké přirozené číslo. Provedeme trik – zapíšeme si tento součet dvakrát pod sebe, čímž spočítáme $2 \cdot S$ (samotné S pak jednoduše dostaneme vydělením dvěma). V druhém „řádku“ ale sčítance napíšeme v opačném pořadí:

$$\begin{array}{lccccccccccccc} 2 \cdot S = S + S = & & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & k & + & \ldots & + & (n-1) & + \; n \; + \\ & + & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & (n-k+1) & + & \ldots & + & 2 & + \; 1. \end{array}$$

Vidíme, že vždy každá dvě čísla pod sebou se sečtou na $n + 1$. Pokud bychom si nebyli jisti, že toto platí i „v prostředku“ celého součtu, můžeme uvažovat třeba následovně: platí to v prvním sloupci (je zřejmé, že $1 + n = n + 1$) a vždy, když se přesuneme o jeden sloupec doprava, tak k číslu v první řádku přičteme 1 a od čísla v druhém řádku odečteme 1, takže jejich součet zůstane stejný. Dohromady tak v celém součtu dostaneme

$$2 \cdot S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n\text{-krát}} = n \cdot (n+1),$$

z čehož už víme, že $S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Nyní si opět vzpomeneme na naši konkrétní situaci s $n = 180$. Dosazením do výše odvozeného vzorečku máme

$$1 + 2 + \cdots + 180 = \frac{180 \cdot (180 + 1)}{2} = 90 \cdot 181 = 16\,290.$$

Zbývá už jen vynásobit vzdáleností 300 m a zjistíme, že zvířátka by měla za celý půlrok tréninku nachodit

$$16\,290 \cdot 300\ \text{m} = 4\,887\,000\ \text{m} = 4887\ \text{km}.$$

To je celkem dost – pro představu: kdyby našim zvířátkům nestály v cestě oceány a jiné překážky, mohla během toho půlroku z Prahy dojít např. do Dakaru na západním pobřeží Afriky (asi 4870 km), na ostrov Newfoundland na východním pobřeží Kanady (asi 4750 km) či do nejlidnatějšího města Kazachstánu, Almaty (asi 4700 km).

Úloha 4B Termitiště

Abychom zjistili, kolik dveří zůstane po průchodu posledního termita otevřených, můžeme v podstatě udělat dvě věci. První z nich je systematicky projít postupně všechna čísla od 1 do 100, zkoumat, která čísla dělí, a pak zjistit, které dveře jsou na konci otevřené a které zavřené. Už z toho, jak to zní, je jasné, že tento postup bude velmi zdlouhavý (navíc si zkuste představit, kdyby se termiti přestěhovali do většího termitiště s 1000 dveřmi! To by se teprve počítání nesnesitelně protáhlo...). Druhou možností je tedy postup, který nás té pracnosti zbaví – podíváme se na dělitelnost jednotlivých čísel dveří, a tedy na počet termitů, který jimi projde (konkrétní termiti nás zde potom příliš zajímat nebudou).

Zásadní pro nás bude počet dělitelů čísel dveří, protože s každým z nich projde dveřmi jeden termit a změní jejich stav (otevřený/zavřený). Pro prvočísla p například budeme mít vždy jen dva dělitele, a tedy dva termity (protože každé takové číslo lze rozložit na součin jedině jako $p = p \cdot 1$), a stav se tak změní dvakrát (na otevřený a následně zase na zavřený). Dobré je už nyní poznamenat, že samotná 1 má pak jen jednoho dělitele, a tyto dveře tak zůstanou otevřené ($1 = 1 \cdot 1$ – právě proto se také nezapočítává mezi prvočísla – u těch jsou dělitelé právě dva). Jak je to ale se zbylými dveřmi, označenými složenými čísly?

Pokud chceme nějaké číslo k rozložit na součin jiných čísel, musí být tato čísla vždy alespoň dvě. Pokud chceme tedy získat všechny možné dělitele čísla k, stačí nám systematicky hledat dvojice čísel, na jejichž součin jej lze rozdělit (nemusí jít o prvočinitele, můžou zde být i čísla složená). Nakonec bychom takto měli najít všechny možné dělitele daného čísla. To znamená, že máme různé možné rozklady čísla k na součiny dvou čísel. Pokud by se v žádné z těchto dvojic tito dva dělitelé nerovnali, můžeme už velmi snadno dojít ke stejnému závěru jako u prvočísel – dveře budou na konci zavřené, protože jimi projde sudý počet termitů (jde o dvojice čísel, tedy o dvojice termitů). Zbývá tedy otázka – jsou některá čísla, u kterých se někteří takto získaní dělitelé rovnají, a bude nám tak chybět „další termit s již jednou použitým číslem“ na průchod?

Opět se odrazme od poměrně jednoduchých úvah. Pokud číslo k vydělíme číslem m, musí to být jednoznačně rovno n, neměla by zde být jiná varianta (představte si konkrétní příklad: kdybychom 100 dělili 20, asi bychom se hodně divili, kdyby nám jednou vyšlo 5 a podruhé nějaké jiné číslo). To znamená, že pokud jsme každou dvojici čísel zahrnuli právě jednou, můžeme získat rovnost dělitelů jen v tu chvíli, pokud přímo platí $m = n$. Takovým k, pro která tato situace nastane, se často říká *čtverce* přirozených čísel, nejnižším takovým číslem by mohlo být již zmiňované číslo 1, následně jsou to 4 $(= 2 \cdot 2)$, 9 $(= 3 \cdot 3)$, 16$(= 4 \cdot 4)$ atd. Nicméně to jsou jediné situace, kdy je počet (různých) dělitelů čísla k lichý – v ostatních případech je podle výše zmíněných úvah dělitelů sudý počet.

Vrátíme-li se postupně na začátek, již snadno dojdeme k závěru, že dveřmi označenými čísly 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 a 100 projde vždy lichý počet termitů, zatímco pro všechny ostatní jimi projde vždy sudý počet. Což znamená, že na konci bude přesně 10 dveří otevřených a zbylých 90 bude zavřených.

Úloha 5B Žeton

Ukážeme, že Žaneta mohla obdržet jako konečné skóre kterékoliv liché celé číslo mezi -41 a 41 (včetně). Zaprvé si uvědomme, že za každý hod přičte liché číslo (1 nebo -1), na konci tedy dostane součet lichého množství lichých čísel – ten musí být lichý. Dále si představme skóre na číselné ose: hod 1 znamená skok o 1 doprava, zatímco -1 znamená skok o 1 doleva. Vždy se tak jedná o skok na vzdálenost 1, takže 41 takovými skoky se nelze od nuly vzdálit o více než 41. Každé konečné skóre tak musí být liché číslo mezi -41 a 41 (včetně).

Dále naopak ukažme, že každého takového čísla lze nějakou kombinací hodů dosáhnout. Nyní si tedy představíme, že při každém hodu můžeme určit, jaké číslo padne, a že se snažíme dosáhnout nějakého předem zadaného konečného skóre ℓ, kde ℓ je nějaké liché celé číslo splňující $-41 \leq \ell \leq 41$. Pokud bychom se pro kladné ℓ dostali do stavu, kdy je skóre 0 a zbývalo nám přesně ℓ hodů, stačí ve zbylých hodech mít jedničky. Takového stavu ale lze dosáhnout: číslo $41 - \ell$ je sudé (je to rozdíl dvou lichých čísel), takže v první $41 - \ell$ hodech můžeme střídat 1 a -1. Dohromady tak ℓ nasčítáme jako

$$\underbrace{\underbrace{1+(-1)}_{=0}+\underbrace{1+(-1)}_{=0}+\cdots+\underbrace{1+(-1)}_{=0}}_{41-\ell \text{ sčítanců}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\ell \text{ sčítanců}}=\frac{41-\ell}{2}\cdot 0+\ell=\ell.$$

Obdobně když se budeme chtít dosčítat na $-\ell$, stačí prvních $41-\ell$ prvních hodů střídat 1 a -1 a v posledních ℓ hodech nechat padnout samé mínus jedničky, tedy

$$\underbrace{\underbrace{1+(-1)}_{=0}+\underbrace{1+(-1)}_{=0}+\cdots+\underbrace{1+(-1)}_{=0}}_{41-\ell \text{ sčítanců}}+\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{\ell \text{ sčítanců}}=\frac{41-\ell}{2}\cdot 0+(-\ell)=-\ell.$$