Kategorie mladší

Úloha 1A Nákup

Vzhledem k tomu, že prasátka z trhu dohromady donesla 120 pytlů obilí a spravedlivě si je mezi sebe rozdělila, dostal každý z nich nakonec 40 pytlů. Pištík za těchto 40 pytlů zaplatil 1400 JC, tedy jeden pytel ho stál $\frac{1400\,\mathrm{JC}}{40\,\text{pytlů}} = 35\,\frac{\mathrm{JC}}{\text{pytel}}$. Protože Kuliš i Napoleon si také oba nechali svých 40 pytlů, dostal Pištík od Kuliše 5 pytlů a od Napoleona zbylých 35 pytlů, a protože každému zaplatil 35 JC za pytel, dal nakonec Kulišovi

$$35\,\frac{\mathrm{JC}}{\text{pytel}} \cdot 5\,\text{pytlů} = 175\,\mathrm{JC}$$

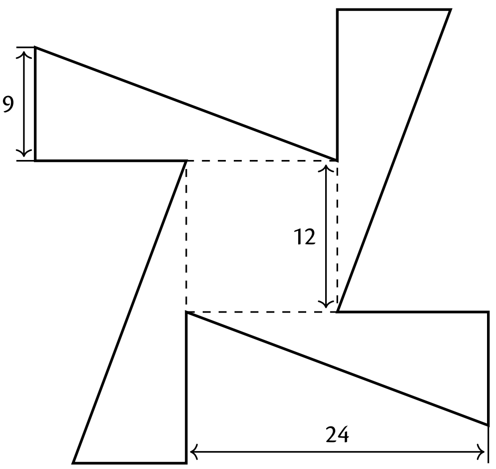
a Napoleonovi

$$35\,\frac{\mathrm{JC}}{\text{pytel}} \cdot 35\,\text{pytlů} = 1225\,\mathrm{JC},$$

díky čemuž byly dluhy vyřešeny a Kuliš, Napoleon a Pištík si byli opět rovni.

Úloha 2A Pracné perníčky

Pro výpočet objemu perníčku budeme potřebovat obsah obrazce. Ten dostaneme jako součet obsahů čtyř trojúhelníků a jednoho čtverce (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Tvar podstavy formičky. Všechny rozměry jsou milimetrech.

Čtverec má obsah $12 \cdot 12 = 144\,\mathrm{mm}^2$. Trojúhelník má obsah $\frac{24\cdot 9}{2}\,\mathrm{mm}^2 = 108\,\mathrm{mm}^2$. Z toho plyne, že celkový obsah perníčku je roven

$$S = 144\,\mathrm{mm}^2 + 4 \cdot 108\,\mathrm{mm}^2 = 576\,\mathrm{mm}^2 = 5{,}76\,\mathrm{cm}^2.$$

Vynásobením obsahu S výškou 2 cm dostaneme požadovaný objem perníčku

$$V = 5{,}76\,\mathrm{cm}^2 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 11{,}52\,\mathrm{cm}^3.$$

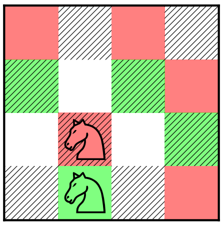
Poměr rozdílu objemů ku odhadovanému objemu získáme tak, že od našeho výsledku odečteme odhadovaný objem $7\,\mathrm{cm}^3$ a získaný rozdíl odhadovaným objemem vydělíme, tedy

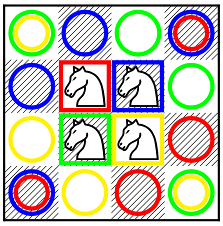
$$x = \frac{11{,}52 - 7}{7} \doteq 0{,}65 = 65\,\%.$$

Z toho plyne, že Pája bude muset nakoupit o zhruba 65 % více surovin než odhadoval.

Úloha 3A Pastva

Řekněme, že kůň políčko *spásá*, pokud na něm stojí nebo pokud se na něj dovede jedním tahem přesunout. Kolik políček může na šachovnici spásat jeden kůň? Určitě spásá pole, na kterém stojí, závisí už tedy jen na tom, jaké platné tahy má k dispozici (kolika tahy „nevyskočí ze šachovnice"). Na to, aby mohl skočit o dvě pole nahoru a o jedno doprava či doleva, potřebuje mít nad sebou ještě alespoň dva řádky, tj. nesmí se nacházet v prvním nebo druhém řádku odshora. Podobně na skok o dvě pole dolů a o jedno doprava či doleva potřebuje alespoň dva řádky pod sebou. Aby obojí nastalo zároveň, museli bychom na šachovnici mít alespoň 5 řádků (dva nad, dva pod a ten, na kterém kůň stojí). My ale pracujeme se šachovnicí 4×4. Proto vždy platí, že kůň nemůže skákat buď o dvě políčka nahoru (a o jedno doprava či doleva), nebo o dvě políčka dolů. To jsou dva tahy z osmi, které kůň na naší malé šachovnici určitě nemá k dispozici (nevíme, které přesně to jsou, ale víme, že jsou alespoň dva). Zcela stejně odvodíme, že kůň buďto nemůže skákat o dvě políčka doleva (a o jedno nahoru či dolů), nebo o dvě pole doprava (a o jedno nahoru či dolů). To jsou další dva neplatné tahy, kůň bude mít k dispozici vždy nanejvýš 4 tahy, takže bude celkem spásat nejvýše 5 polí (viz obrázek 2a).


(a) Jeden kůň spásá nanejvýš 5 polí.


(b) Čtyři koně stačí.

Obrázek 2

Z toho už lze odvodit, že ke spasení celé šachovnice nemůžou stačit tři koně. I kdyby totiž žádné pole nespásali dva různí koně, dohromady spasou nanejvýš $3 \cdot 5 = 15$ políček. Naše šachovnice však má políček $4 \cdot 4 = 16$, tři koně tedy nestačí. Zato se čtyřmi už šachovnici spást jde – stačí je postavit na čtyři prostřední políčka (viz obrázek 2b).

Úloha 4A Lopatičky

Vzhledem k tomu, že každá lopatička má jednu násadu a jeden list, bude v kroužku stejné množství listů i násad – říkejme téhle hodnotě (odpovídající také celkovému množství tančících krtků) k.

Pokud je krtek podavač, drží právě 1 list a 1 násadu, tedy je-li počet podavačů p (tohle písmeno bude odpovídat nějakému číslu v rozmezí od 0 do k), tak tato skupina drží v packách právě p násad a p listů. U držáků, jejichž množství označujeme dle zadání jako n, je množství držených listů vždy 2 listy na krtka, násady naopak nedrží tito krtci žádné. Kopáči, jejichž množství označíme jako m, to mají přesně opačně, tedy každému z nich přísluší 0 listů a 2 násady. Každá ze skupin tak drží dvě příslušné části lopat z celkového množství nářadí (konkrétně držáci $2 \cdot n$ listů a kopáči $2 \cdot m$ násad).

Součet počtů členů všech skupin krtků se rovná celkovému počtu krtků a obdobně pokud sečteme všechny násady a listy, co jednotliví krtci držím, vyjde nám počet lopatiček (který je stejný jako počet krtků). Dostaneme tedy tři rovnice, jednu pro množství krtků

$$k = p + n + m,$$

jednu pro množství listů

$$k = 1 \cdot p + 2 \cdot n$$

a jednu pro množství násad

$$k = 1 \cdot p + 2 \cdot m.$$

Vzhledemk tomu, že se jednotlivé levé strany těchto rovnic se rovnají, můžeme jejich pravé strany složit do další rovnice

$$p + 2 \cdot n = p + 2 \cdot m,$$

kterou upravíme a vyjde nám, že $n = m$, tedy že držáků je stejně jako kopáčů. Nalezli jsme tedy odpověď – je-li držáků n, musí být kopáčů vždy také n. Množství podavačů pak v případě potřeby snadno dopočítáme jako $p = k - 2 \cdot n$, přičemž si můžeme všimnout určitého omezení pro p, a to, že u sudého množství krtků musí být i počet podavačů sudý a u lichého k naopak lichý – protože $2 \cdot n$ je sudé číslo vždycky, a tedy protože platí $k = 2 \cdot n + p$, závisí sudost či lichost (tzv. *parita*) k jenom na p.

Všimni si také, že jsme v celém postupu nepředpokládali nic o tom, jak konkrétně vypadá uspořádání krtků v kruhu, kolik přesně je n (počet držáků) ani kolik přesně je k (celkový počet krtků).

Úloha 5A Tiskařský stroj

Nejprve si spočítáme obvod o našeho plátna (viz obrázek 3). Ten je tvořen několika úsečkama a několika oblouky – označme si celkovou délku úseček o_1 a celkovou délku oblouků o_2. Vzhledem k tomu, že středy válců jsou uspořádané do tvaru čtverce s délkou strany $a = 4$ m, má každá z modrých úseček na obrázku 3 délku a.

Pro celkový obvod plátna platí $o = o_1 + o_2$. Jednoduše spočteme

$$o_1 = 4 \cdot a = 4 \cdot 4\,\mathrm{m} = 16\,\mathrm{m}.$$

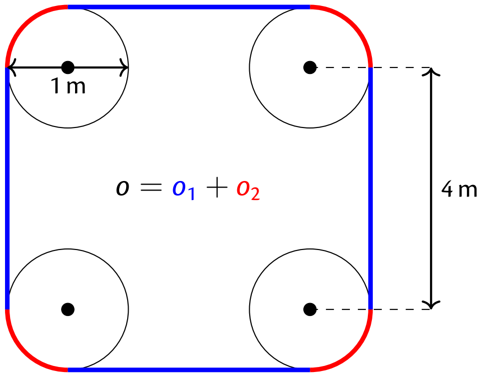
Druhá část obvodu je tvořena čtyřmi čtvrtkružnicemi. Všechny mají stejný poloměr $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$, takže se dohromady složí na jednu celou kružnici s tímto poloměrem. Z toho $o_2 = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = \pi\,\mathrm{m}$. Tím dostáváme celkový obvod

$$o = o_1 + o_2 = 4a + 2\pi r = 16 + \pi\,\mathrm{m} \doteq 19{,}14\,\mathrm{m}.$$

Zbývá jen dopočítat plochu plátna s touto délkou a výškou $v = 3\,\mathrm{m}$. Tu dopočteme jako

$$S = o \cdot v = 4av + 2\pi rv = (16 + \pi)\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m}^2 \doteq 38{,}28\,\mathrm{m}^2.$$

Výsledné plátno by tak mělo mít plochu $57{,}4\,\mathrm{m}^2$.

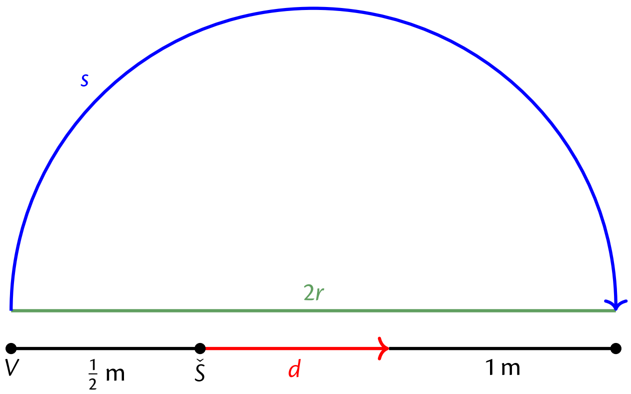


Obrázek 3: Náčrt tiskařského stroje

Kategorie starší

Úloha 1B Medojed běhá kolečka

Jako první krok si do obrázku 4 zakreslíme všechno, co o úloze víme. Medojed Vašík, na obrázku označen písmenkem V, se nachází půl metru za šnekem Štefanem. Chce oběhnout kolečko s nějakým poloměrem r tak, aby oběhl Štefana a skončil právě jeden metr před ním.



Obrázek 4: Vašík předbíhá Štefana

Vidíme, že spojnice bodů, které Vašík oběhne (zelená úsečka), je zároveň průměrem půlkruhu a součtem vzdáleností 1 m (Vašík skončí metr před Štefanem), $\frac{1}{2}$ m (Vašík začíná půl metru za Štefanem) a dráhy d, kterou Štefan stihne uběhnout za čas, ve kterém Vašík obíhá svou půlkružnici. Tedy

$$2 \cdot r = 1\,\mathrm{m} + \frac{1}{2}\,\mathrm{m} + t \cdot \frac{1}{\pi}\,\mathrm{m/s},$$

kde nám ke spočtení hledaného průměru chybí čas, po který Štefan utíká.

Ten je ale stejný, jako čas, po který Vašík oběhne celý půkruh o hledaném poloměru. Délku trasy l, kterou musí Vašík oběhnout lze vyjádřit jednak jako polovinu obvodu kruhu s hledaným poloměrem r, tedy $l = \frac{o}{2} = \pi \cdot r$, jednak jako délku dráhy, kterou oběhne za čas t, tedy $l = 7\,\mathrm{m/s} \cdot t$, z kterýchžto dvou rovnic můžeme sestavit další

$$\pi \cdot r = 7\,\mathrm{m/s} \cdot t.$$

Dostali jsme dvě rovnice o dvou neznámých (t a r). Když si vyjádříme čas, po který oba běží z Vašíkovy rovnice

$$\pi \cdot \frac{r}{7\,\mathrm{m/s}} = t$$

a ze Štefanovy rovnice

$$\frac{2 \cdot r - \frac{3}{2}\,\mathrm{m}}{\frac{1}{\pi}\,\mathrm{m/s}} = t,$$

můžeme levé strany těchto rovnic složit do další rovnice, která už bude mít jen jednu neznámou, náš hledaný poloměr r.

$$\pi \cdot \frac{r}{7\,\mathrm{m/s}} = \frac{2 \cdot r - \frac{3}{2}\,\mathrm{m}}{\frac{1}{\pi}\,\mathrm{m/s}}.$$

Tu stačí upravit a spočíst hledaný poloměr r.

$$\frac{\pi \cdot r}{7\,\mathrm{m/s}} = 2 \cdot r \cdot \pi\,\mathrm{s/m} - \pi\,\mathrm{s/m} \cdot \frac{3}{2}\,\mathrm{m},$$

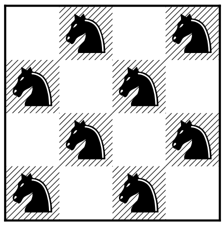
$$r \cdot \left(2 \cdot \pi\,\mathrm{s/m} - \frac{\pi}{7\,\mathrm{m/s}}\right) = \pi\,\mathrm{s/m} \cdot \frac{3}{2}\,\mathrm{m},$$

$$r = \frac{\pi\,\mathrm{s/m} \cdot \frac{3}{2}\,\mathrm{m}}{2 \cdot \pi\,\mathrm{s/m} - \frac{\pi}{7\,\mathrm{m/s}}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 - \frac{1}{7}}\,\mathrm{m} = \frac{21}{26}\,\mathrm{m}.$$

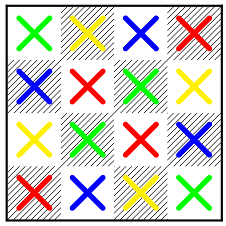
Výsledný poloměr by tedy měl být $\frac{21}{26}$ m, což je přibližně 0,808 m. Nám tedy postačí, když kolečko, které Vašík uběhne, bude mít poloměr 81 cm.

Úloha 2B Pastva

Obarvěme pole naší menší šachovnice klasicky bíle a černě tak, aby políčka sousedící stranou měla vždy opačné barvy. Pak si lze všimnout, že kůň při každém svém tahu mění barvu svého pole. To znamená, že všechna pole, na které může skočit z nějakého černého pole, jsou bílá (a naopak). Pokud tedy budeme umisťovat koně pouze na černá políčka, můžeme si být jisti, že si žádní dva nebudou překážet. Na šachovnici 4×4 máme 8 černých polí, takže na každé z nich lze bezpečně umístit koně (viz obrázek 5a).



(a) Osm koní dovedeme rozmístit.



(b) Rozdělení polí do čtveřic

Obrázek 5

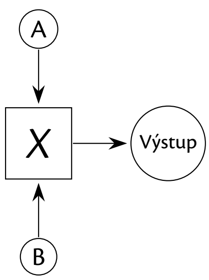
Pojďme si ukázat, proč více než osm koní na šachovnici umístit nelze (i když pro zdárné vyřešení úlohy tento důkaz nebyl požadován). Pole šachovnice rozdělíme do čtyř čtveřic (viz obrázek 5b) a ukážeme, že v každém z nich mohou být koněm obsazena nejvýše dvě pole – pak už bude moci na šachovnici celkem být nanejvýš $4 \cdot 2 = 8$ koní. Podívejme se nejprve na zelenou čtveřici. Pokud bude umístěn kůň do jednoho rohového políčka, nesmí již být další umístěn na kterékoliv ze dvou prostředních políček. Zbývá už tak pouze protější rohové políčko. Podobně pokud je obsazeno jedno z prostředních políček, jsou tímto vyloučena rohová zelená políčka, takže zbývá pouze druhé středové. Dohromady tak na zelená políčka lze umístit nanejvýš dva koně.

Zcela stejně zdůvodníme, že na červených polích můžou stát nanejvýš dva koně. Podívejme se nyní na modrá políčka. Každé leží na kraji jedné strany šachovnice a kůň z něj může přeskočit na pole ležící u sousedních stran. Pokud je tedy obsazeno jedno modré pole, nelze obsadit žádné ze dvou „sousedních", takže zbývá už jen to „protější". Zcela stejné zdůvodnění platí pro žlutá pole, takže dohromady můžeme mít nanejvýš dva koně v každé čtveřici, takže dohromady nanejvýš osm koní.

Úloha 3B Zámečnická

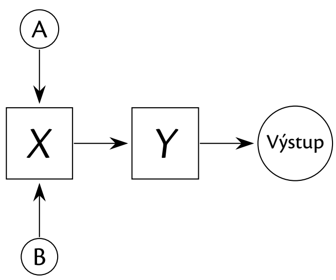
Úkolem je sestrojit zámek, který se otevře tehdy, když je 1 na *C* a zároveň na alespoň jednom z *A* či *B*. Operaci „a zároveň" provádí součástka *X*, stačí nám tedy zkonstruovat z *X* a *Y* zámek se dvěma vstupy, který se otevře tehdy, je-li na alespoň jednom ze vstupů jednička. Ze čtyř možností hodnot zadaných na vstupech *A* a *B* (tj. 00, 01, 10 a 11), by tento menší zámek měl vracet jedničku ve třech případech (01, 10 a 11) a nulu ve zbylých. Jak něco takového poskládat ze součástek *X* a *Y*?

Můžeme si všimnout, že *X* vrací tři nuly a jednu jedničku (viz tabulku 1a). Pokud tedy za *X* zapojíme *Y*, obrátíme tím všechny výstupy a toto zapojení tak bude vracet tři jedničky a jednu nulu (viz tabulku 1b). Nejsme však ještě hotovi, protože tento zámek vrací nulu pro vstup 11 a jedničku pro vstup 00, zatímco my chceme, aby vracel hodnoty opačné. Stačí však ještě zapojit jednu součástku *Y* před každý ze vstupů (viz tabulku 1c) – do součástky *X* pak bude vcházet 11 právě tehdy, když na vstupech bude 00 a opačně, což přesně chceme.



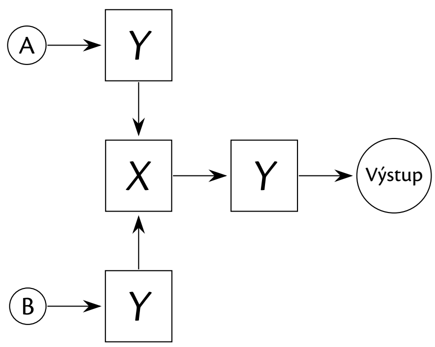
A	B	Výstup
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a) Součástka *X*



A	B	Výstup
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b) Součástka *X* „s obráceným výstupem"

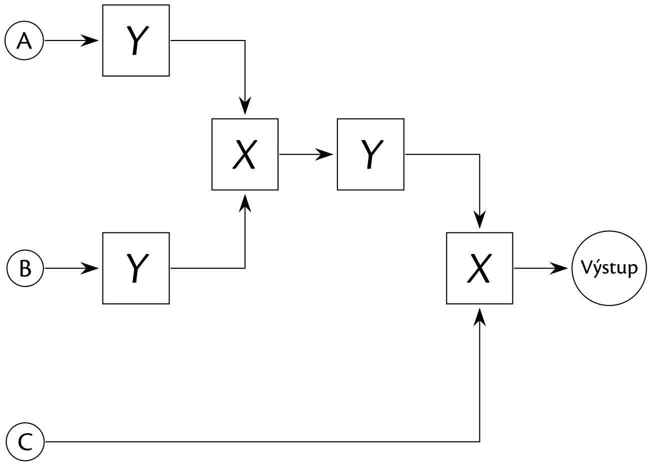


A	B	Výstup
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c) Součástka *X* „s obrácenými vstupy i výstupem"

Tabulka 1

Výstup toho menšího zámku pak stačí napojit do součástky X spolu se vstupem C, čímž získáme zámek s požadovanými vlastnostmi.



Obrázek 6: Výsledné zapojení Mončina zámku

Úloha 4B Datel na lodi

Abychom zjistili, jak dlouho může datel dělat díry do lodi, musíme spočítat její ponor. Hlouku ponořené části si lze vyjádřit z Archimédova zákona, který v řeči sil vypadá následovně:

$$F_{\mathrm{vz}} = F_{\mathrm{t}}$$

$$\rho_{\mathrm{vody}} \cdot V_{\mathrm{pon}} \cdot g = m \cdot g$$

$$V_{\mathrm{pon}} = \frac{m}{\rho_{\mathrm{vody}}}$$

$$d \cdot s \cdot h = \frac{m}{\rho_{\mathrm{vody}}}$$

$$h = \frac{m}{\rho_{\mathrm{vody}} \cdot d \cdot s}$$

kde F_{vz} je vztlaková síla působící na lod, F_t je tíhová síla působící na loď, ρ_{vody} je hustota vody, V_{pon} je objem ponořené části lodi, m je celková hmotnost, d a s jsou délka a šířka lodi a h je výška ponořené části lodi, tedy to, co nás zajímá.

Nejprve si spočítáme celkovou hmotnost, která se skládá z hmotnosti lodi a součtu hmotností zvířátek. Hmotnost zvířátek je $80\,\mathrm{kg} + 12\,\mathrm{kg} + 330\,\mathrm{g} + 200\,\mathrm{kg} + 25\,\mathrm{kg} + 370\,\mathrm{g} + 8\,\mathrm{kg} = 325{,}7\,\mathrm{kg}$. Hmotnost lodi spočteme z objemu její kontrukce a hustoty použitého dřeva. Objem kontrukce jde spočíst buď sečtením všech jejích stěn, nebo spočtením objemu „celé“ lodi a odečtením objemu prázdné části. Hmotnost lodi je tedy (v je výška celé lodi, prázdná část lodi je menší o šířku stěn):

$$m_{\mathrm{lodi}} = \rho_{\mathrm{dřeva}} \cdot (d \cdot s \cdot v - (d - 0{,}2) \cdot (s - 0{,}2) \cdot (v - 0{,}1)) = 120\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (80\,\mathrm{m} \cdot 30\,\mathrm{m} \cdot 20\,\mathrm{m} - 79{,}8\,\mathrm{m} \cdot 29{,}8\,\mathrm{m} \cdot 19{,}9\,\mathrm{m}) = \\ = 81\,240{,}48\,\mathrm{kg}.$$

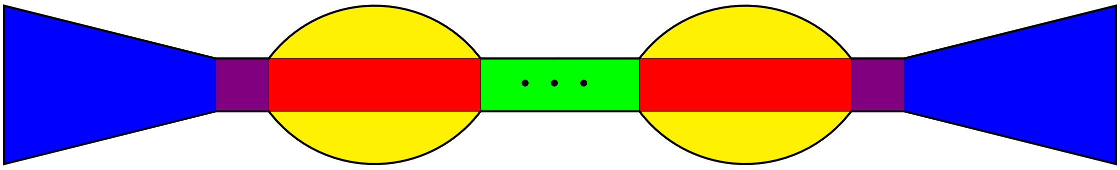
Celková hmotnost $m = 81\,566{,}18\,\mathrm{kg}$.

Ponor lodi $h = \frac{81\,566{,}18\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 80\,\mathrm{m} \cdot 30\,\mathrm{m}} = 3{,}4\,\mathrm{cm}$. Zdá se, že se Lukáš při plánovaní a stavění trochu upočítal a nejspíš byl po spuštění lodi na vodu jejím ponorem trochu překvapen ;). Loď by unesla mnohem více kamarádů a mohl by ji postavit i z težšího dřeva.

Zjistili jsme tedy, že Daniel může klovat díry do lodi až k podlaze (ponor je menší, než tloušťka prken, ze kterých je loď postavena), stačí tedy spočítat, kolik děr může vyklovat do stěn lodi. Na výšku se do stěny vejde $\frac{20\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{cm}}{10\,\mathrm{cm}} = 199$ děr, na šířku se do delší stěny vejde $\frac{30\,\mathrm{m} - 2 \cdot 10\,\mathrm{cm}}{10\,\mathrm{cm}} = 298$ a do kratší stěny $\frac{80\,\mathrm{m} - 2 \cdot 10\,\mathrm{cm}}{10\,\mathrm{cm}} = 798$, tedy celkem $199 \cdot 2 \cdot (298 + 798) = 436\,208$ děr, což Danielovi bude stačit na 87 241 a kousek dne, což je mnohem více, než doba Lukášovy plavby.

Úloha 5B Motýlek

Aby se nám obsah plochy motýlku spočítal snáz, rozdělíme si jej na několik základních obrazců, jejichž obsah umíme vypočítat (viz obrázek 7).



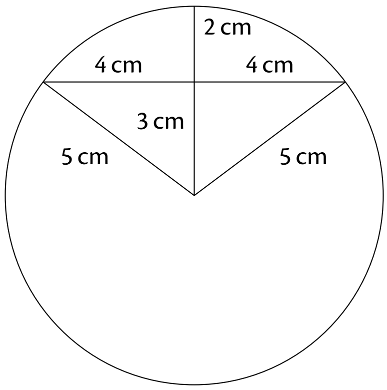
Obrázek 7: Rozdělení motýlku na části, jejichž obsah umíme spočíst.

Modré lichoběžníky mají každý obsah $\frac{2\,\text{cm}+6\,\text{cm}}{2}\cdot 8\,\text{cm} = 32\,\text{cm}^2$, fialové čtverečky $2\,\text{cm}\cdot 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$, červené obdélníky $8\,\text{cm}\cdot 2\,\text{cm} = 16\,\text{cm}^2$, zelený obdélník $60\,\text{cm} - 2\cdot(8\,\text{cm}+8\,\text{cm}+2\,\text{cm}))\cdot 2\,\text{cm} = (60\,\text{cm}-36\,\text{cm})\cdot 2\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2$. Sečteme-li všechny tyto části mimo žlutých kruhových úsečí, dostaneme obsah $152\,\text{cm}^2$.

Pro kruhové úseče buď můžeme najít vzoreček, nebo můžeme vzorec pro jejich obsah odvodit. Zde si ukážeme, jak tento obsah relativně snadno nalézt. Nakreslíme-li si kruh o poloměru 5 cm, a doplníme-li si rozměry úseče, které známe, můžeme nalézt kruhovou výseč, z níž pochází naše úseč (viz obrázek 8). Vzorec pro obsah kruhu je známý, a naše výseč z něj zaujímá část rovnou výrazu $2\cdot\frac{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}{360°} \doteq 0{,}295$, tedy necelou třetinu (jde jednoduše o poměr úhlu u vrcholu výseče ku 360°, tedy úhlu příslušícímu plnému kruhu). Od obsahu této výseče stačí potom odečíst obsah trojúhelníku se stranou 8 cm a příslušnou výškou 3 cm, a máme hodnotu naší úseče. Spojíme-li předchozí kroky dohromady, dostaneme tak výraz

$$2\cdot\frac{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}{360°}\cdot\pi\cdot 5\,\text{cm}\cdot 5\,\text{cm} - \frac{8\,\text{cm}\cdot 3\,\text{cm}}{2} \doteq 23{,}2\,\text{cm}^2 - 12\,\text{cm}^2 = 11{,}2\,\text{cm}^2,$$

přičemž jsme zaokrouhlili v průběhu nahoru a námi určený obsah úseče je tak o něco vyšší, než ve skutečnosti.



Obrázek 8: Odvození obsahu kruhové úseče

Nic nám pak už nebrání dopočítat, že celková plocha motýlku bude

$$152\,\text{cm}^2 + 4\cdot 11{,}2\,\text{cm}^2 = 196{,}8\,\text{cm}^2,$$

takže zbylá plocha látky bude rovna výrazu

$$60\,\text{cm}\cdot 6\,\text{cm} - 196{,}8\,\text{cm}^2 = 163{,}2\,\text{cm}^2.$$

Vzhledem k tomu, že Blanka na kapesník potřebuje $40\,\text{cm}^2$, může bez starosti počítat s tím, že jí látka na něj vystačí – vystačila by jí dokonce na 4 takové kapesníky.

Pokud bychom byli v řešení hodně líní, stačilo by se podívat na samotnou část látky nad zeleným pruhem – jde o obdélník s délkami stran $60\,\text{cm} - 2\cdot(8\,\text{cm}+8\,\text{cm}+2\,\text{cm}) = 24\,\text{cm}$ a 2 cm, tedy i tento samotný obdélník na jeden námi požadovaný kapesník vystačí.