Kategorie mladší

Úloha 1A Závodní jídelna

Víme, že Milan rozdává knedlíky po 8 nebo 10, takže celkový počet rozdaných knedlíků se dá vyjádřit jako součet nějakého násobku osmi a násobku deseti. Protože násobky deseti končí nulou, musí náš hledaný násobek osmi končit šestkou (aby součet mohl být 96). Prvním takovým násobkem osmi je 16, malých knedlíků by tak ale bylo 80 a to nesplňuje zadanou podmínku, že velkých knedlíků Milan rozdal více než malých. Dalším násobkem osmi končícím šestkou je až 56, malých knedlíků je tedy 40, což už odpovídá zadání. Ostatní možnosti snadno vyloučíme, neboť dalším násobkem osmi končícím šestkou je 96 (a další jsou ještě větší), což už by znamenalo, že Milan nerozdal žádné malé knedlíky, což také odporuje zadaným podmínkám.

Víme tedy, že Milan rozdal $56 : 8 = 7$ porcí s velkými knedlíky a $40 : 10 = 4$ porce s malými knedlíky. Oběd tak dostalo celkem $4 + 7 = 11$ zvířátek.

Úloha 2A Linky metra

Aby se vlaky jedoucí proti sobě nepotkávaly v jednotlivých stanicích při příjezdech, spočítáme si čas, který uplyne mezi příjezdem do jednotlivých stanic v jednom a ve druhém směru (Studánku a Depo můžeme vynechat, protože tam k setkání v protisměru dojít nemůže; nesmíme zapomenout také na minutové čekací intervaly ve stanicích).

Alej—Alej: 1 min + 4 min + 1 min + 3 min + 1 min + 2 min + 1 min + 2 min + 1 min + 3 min + 1 min + 4 min = 24 min
Stadion—Stadion: 1 min + 3 min + 1 min + 2 min + 1 min + 2 min + 1 min + 3 min = 14 min
Louka—Louka: 1 min + 2 min + 1 min + 2 min = 6 min

Aby se nestávalo, že vlaky přijedou z jedné a druhé strany ve stejnou chvíli, nesmí být tyto úseky násobky daných intervalů (v ten moment by se některý z vracejících se vlaků nutně při příjezdu setkal s jiným, nově přijíždějícícm vlakem).

Protože číslo 24 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24, číslo 14 je dělitelné čísly 1, 2, 7 a 14 a číslo 6 je dělitelné čísly 1, 2, 3 a 6, tak víme, že žádný z těchto rozdílných časových intervalů není možný – nejnižší možný interval tak vychází jako 5 min. Nicméně vzhledem k tomu, že zvířátka mají jenom 4 soupravy, je tenhle interval moc krátký (zatímco vyjíždí z Depa poslední metro, je to první teprve před Loukou). Další možný interval je potom 9 min – vyjíždí-li tedy poslední metro z Depa, je to první akorát ve stanici Alej v druhém směru. Po druhém příjezdu na Alej trvá metru 4 min i se stáním v stanici, tudíž pak vždy ještě 5 min v Depu počká, aby ve správném devítiminutovém intervalu opět vyrazilo na trať. Zvířátka si tak mohou být jistá, že nebudou muset nastupovat v jednu chvíli do dvou protijdoucích soustav v jedné stanici zároveň, a také mají zaručeno, že jim vlaky budou jezdit pravidelně a ani se jim nebudou kumulovat v Depu.

Úloha 3A Zákusky

František má štěstí – možností, jak rozdělit mezi své kamarády zákusky, má hned několik, stačí, když bude postupovat dostatečně systematicky. Jedno z možných řešení je například toto:

Může si být jistý, že Erik dostane roládu, protože jako jediný ji má na prvním místě v žebříčku oblíbenosti. U ostatních pak na prvních i druhých místech figurují marokánka, věneček a laskonka, jen Ivan má na druhém místě trubičku – dostane ji tedy on. Nyní je potřeba zajistit, aby Ivanův nejoblíbenější zákusek věneček dostal ten, kdo ho má také na prvním místě, tedy Drahomíra. Zbývají tak Otýlie, Renata a Kristián, která si mají rozdělit marokánku, laskonku a indiána, přičemž u marokánky je jasné, že ať ji dostane kdokoli, celá tato skupina bude spokojená (všichni ji mají na prvním místě).

Když se podíváme na v pořadí druhé nejoblíbenější zákusky, na první pohled vidíme, že laskonku má nejraději Otýlie, která ji má na druhém místě, takže jí můžeme tuhle laskominu přiřadit. Zbývá indián a marokánka, a i když ani Renata ani Kristián indiána příliš nemusí, může ho František předat kterémukoli z nich.

Vzhledem k tomu, že dotyčný bude vědět, že ostatní u stolu jsou za své zákusky raději než by byl on, kdyby je dostal, bude vlastně nakonec spokojený taky (což by při postupu, kdy jsme důsledně dbali na to, aby každý dostal zákusek, který má raději než všichni ostatní a jím preferovanější zákusky dostali jejich ještě větší milovníci, mělo platit).

Námi nalezené řešení je tak například (v závorce je uvedeno pořadí v žebříčku „oblíbenosti“ u daného zvířátka):

Erik – roláda (1)
Ivan – trubička (2)
Drahomíra – věneček (1)
Otýlie – laskonka (2)
Renata – marokánka (1)
Kristián – indián (5)

Ještě zkontrolujeme, že zákusek číslo 1 u Otýlie i Ivana dostala zvířátka, která danou laskominu mají na prvním místě (což je pravda) a u Kristiána je tomu u všech laskomin také tak. František tak může zákusky rozdělit tímto způsobem.

Úloha 4A Račice obkládá

Nejprve bychom si měli spočítat celkový počet dlaždic: podlaha $2 \times 4 = 8$, dvě větší stěny $4 \times 4 \times 2 = 32$ (delší strana podlahy $\times$ výška obkladu stěny $\times$ 2) a dvě kratší stěny minus jedny dveře $2 \times 4 \times 2 - 2 \times 2 = 12$. Káťa má ve špajzce $8 + 32 + 12 = 52$ dlaždic. Káťa by chtěla vědět, kolik možných barevných uspořádání existuje, pokud použije dlaždice maximálně tří barev. Každá dlaždice má tři možnosti barev a stačí, aby se dvě různá uspořádání lišila barvou jediné dlaždičky.

Představme si to nejprve v případě dláždění plochy 2×1. Barvy si zakódujeme jako písmenka *A*, *B*, a *C*, možnostmi pak jsou *AA*, *AB*, *AC*, *BA*, *BB*, *BC*, *CA*, *CB*, *CC*. Když si zvolíme první dlaždici barvy *A*, máme tři možnosti u druhé (*AX*, kde *X* je libovolná z barev), ale máme tři barvy první dlaždice a každá má k sobě tři možnosti u své dvojice, takže máme nakonec $3 \cdot 3$ možností. Při přidání další dlaždice se u každé volby prvních barev na místě nové dlaždice vystřídají všechny barvy, takže se počet možností pokaždé vynásobí třemi (při dvou dlaždicích máme 9 možností a při třech u každé z nich prostřídáme tři barvy, tedy $9 \cdot 3$). Abychom se nemuseli vypisovat s 52 trojkami násobenými mezi sebou, tak využijeme mocninného zápisu:

$$3 \cdot 3 = 3^2, \qquad 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3, \qquad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4, \qquad \dots$$

Káťa má tedy 3^{52} možností, jak obložit špajz dlaždičkami třemi různými barvami, což je hodně velké číslo – má 25 cifer.

Káťu by také zajímal počet možností v případě, kdy je každá dlaždice jiná, takže bychom měli 52 barev. U první dlaždice si můžeme vybrat z 52 možností, u druhé z 51 (jedna možnost už je zabraná první dlaždičkou), u třetí z 50… Možnosti se mezi sebou násobí, protože u každé volby několika prvních barev máme stejně mnoho možností, jak zvolit další dlaždici – sečteme tedy počet možností u první volby barev, počet možností u druhé volby atd., a protože je počet možností u všech voleb barev stejný (zbývá nám vždy stejný počet dlaždic, které na dané místo můžeme umístit), tak dostaneme počet voleb krát počet možností. Celkově získáme

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdots 2 \cdot 1$$

možností, což je opravdu velké číslo – má 68 cifer.

Hodnotu součinu

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

nazýváme *faktoriál n*, a protože tento zápis je zdlouhavý, tak se pro faktoriál používá značení $n!$.

Úloha 5A Šum

Aby se nám se zprávou lépe pracovalo, tak si ji rozdělíme na pětice číslic (platná slova jsou totiž vždy pět číslic dlouhá).

10110 10010 10101 00111 11011 00000 01010 10011 11111 01110 11000 11101

Pro další postup je důležité, že jednotlivá platná slova se liší alespoň ve třech znacích. Nemůže se nám tedy stát, že by se slovo ze zprávy lišilo jen o jeden znak od více různých platných slov, díky čemuž dokážeme jednoznačně určit, které platné slovo bylo ve zprávě původně.

Nyní se podíváme, na jaká platná slova se dají převést slova naší zprávy úpravou jednoho znaku. Pro každé platné slovo se podíváme, která slova ze zprávy se od něj liší jen jedním znakem (v rámečku, červeně lišící se znak) a pro tato slova už dále nebudeme muset hledat původní platné slovo. Pro první slovo (00110) to vypadá následovně:

00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110
$\boxed{10110}$	*10010*	*10101*	$\boxed{00111}$	*11011*	*00000*	*01010*	*10011*	*11111*	$\boxed{01110}$	*11000*	*11101*

Zvýrazněná slova byla původně slovo 00110. Zbylá slova zprávy porovnáme s dalším platným slovem a tak budeme postupovat až do té doby, než určíme původ všech slov.

01000	01000	01000	01000	01000	01000	01000	01000	01000
10010	*10101*	*11011*	$\boxed{00000}$	$\boxed{01010}$	*10011*	*11111*	$\boxed{11000}$	*11101*

10011	10011	10011	10011	10011	10011
$\boxed{10010}$	*10101*	$\boxed{11011}$	$\boxed{10011}$	*11111*	*11101*

10011	10011	10011
10101	*11111*	*11101*

11101	11101	11101
$\boxed{10101}$	$\boxed{11111}$	$\boxed{11101}$

Žádné slovo nám nezůstalo a my s klidem můžeme prohlásit, že původní zpráva od antilopy Aničky zněla:

00110 10011 11101 00110 10011 01000 01000 10011 11101 00110 01000 11101

Kategorie starší

Úloha 1B Medojed běhá kolečka

Nejjednodušší řešení začneme tím, že si vyjádříme čas, za který Vašík uběhne jedno kolo. Po správném převedení jednotek jej spočítáme jako podíl dráhy (zde 300 metrů) a rychlosti (po převodu 7 m/s), pro jedno kolo si jej tedy můžeme zapsat jako $\frac{300}{7}$ s.

Stejně tak si můžeme vyjádřit, že za sekundu spálí $\frac{6{,}3}{60}$ kJ/s, ať už dělá cokoli – tedy za dobu, co uběhne jedno kolečko, spálí 290 kJ za uběhnutí + $\frac{\frac{300}{7}\cdot 6{,}3}{60}$ kJ, celkem tedy po oběhnutí jednoho okruhu spálí 294,5 kJ.

Celkový počet koleček, které musí uběhnout, tak už snadno můžeme spočítat jako $\frac{14\,000\text{ kJ}}{294{,}5\text{ kJ}}$, což je po zaokrouhlení rovno přibližně 47,54 kolečkům – pro jistotu jich tak rovnou může uběhnout celých 48 a má tak naprostou jistotu, že spálí všechny kalorie které s medem získal.

Úloha 2B Královská zahrada

Nejprve bychom si měli spočítat, na kolik nás vyjdou jednotlivé pásy. Na to potřebujeme vědět nejen jak jsou veliké, ale také kolik stojí jeden metr čtverečný růží a kolik stojí jeden metr čtverečný krokusů. Začneme tedy spočítáním cen květin.

Poloměr celé zahrady je $\frac{40}{2} = 20$ m, protože poloměr je polovina průměru. Dosazením do vzorečku ze zadání zjistíme, že celá zahrada má $S_{\text{zahrady}} = \pi \cdot 20^2\ \text{m}^2$, což je zhruba 1256,64 m^2. Touto hodnotou pak vydělíme cenu za celou zahradu růží, a cenu za celou zahradu krokusů, čímž získáme ceny za metr čtverečný daných květin. Tedy:

$$\text{Cena}_{\text{růže}} = \frac{20\,000\ \text{Jáma coinů}}{1\,256{,}64\ \text{m}^2} = 15{,}92\ \frac{\text{Jáma coinů}}{\text{m}^2}$$
$$\text{Cena}_{\text{krokus}} = \frac{20\,000\ \text{Jáma coinů} \cdot 3}{1\,256{,}64\ \text{m}^2} = 47{,}75\ \frac{\text{Jáma coinů}}{\text{m}^2}$$

Nyní se můžeme pustit na počítání jednotlivých obsahů kruhů a mezikruží. Začneme kruhem nejblíže středu zahrady.

Vezmeme si poloměr celé zahrady a od tohoto poloměru můžeme odečíst šířku zbylých pásů. Náš poloměr r_1 se tedy rovná $20\ \text{m} - 4\ \text{m} - 8\ \text{m} = 8\ \text{m}$. Obsah prvního pásu je $S_1 = \pi \cdot 8^2\ \text{m}^2$, zaokrouhleně 201,06 m^2. To můžeme vynásobit cenou růží a získáme cenu prvního pásu:

$$201{,}06\ \text{m}^2 \cdot 15{,}92\ \frac{\text{JC}}{\text{m}^2} = 3\,201\ \text{JC}$$

U druhého pásu to bude lehce obtížnější. Nejprve si spočítáme jeho obsah jako kdyby v něm nebyl vnořený první pás a pak velikost prvního pásu odečteme. Početně tedy:

$$r_2 = 20\ \text{m} - 8\ \text{m} = 12\ \text{m}$$
$$S_2 = (\pi \cdot 12)\ \text{m}^2 - S_1 = 251{,}329\ \text{m}^2$$

Vynásobíme obsah prostředního pásu cenou krokusů a získáme jeho cenu:

$$251{,}326\ \text{m}^2 \cdot 47{,}75\ \frac{\text{JC}}{\text{m}^2} = 12\,001\ \text{JC}$$

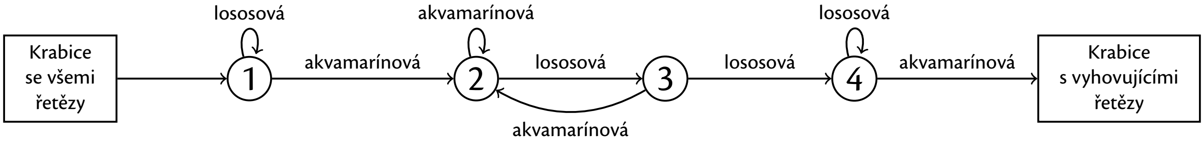
U třetího pásu postupujeme obdobně, jen odečteme od obsahu celé zahrady obsah obou přechozích pásů:

$$S_3 = S_{\text{zahrady}} - S_1 - S_2 = 804{,}248\ \text{m}^2$$

Opět vynásobíme cenou růží a získáváme částku 12 804 JC. Dohromady tedy král Lev zaplatí 3 201 JC + 12 001 JC + 12 804 JC = 28 006 Jáma coinů.

Úloha 3B Dekorace

Klaudie po důkladném promyšlení dá pomocníkům tyto instrukce: První pomocník kontroluje řetěz, dokud nenarazí na akvamarínovou, protože to by mohl být začátek hledaného A, L, L. Jakmile tedy akvamarínovou najde, předá řetěz dál. Následně pomocník 2 pokračuje v kontrolování a v případě lososové ozdoby předá pomocníkovi 3, ale když jsou na řetězu samé akvamarínové, kontroluje stále dál. Pokud se řetěz dostane k pomocníkovi 3, víme, že už se v něm vyskytlo A a L za sebou, proto když bude další ozdobou lososová, předá pomocník 3 řetěz dalšímu. Pokud ale pomocník 3 na řetězu jako následující uvidí akvamarínovou, vrátí ji zpátky pomocníkovi 2, neboť tato ozdoba zkazila pořadí barev A, L, L a nyní z hledaného pořadí máme jen jednu akvamarínovou (a pomocník dva opět hledá lososovou). Když řetěz dojde až k pomocníkovi 4, určitě se v něm nachází pořadí barev A, L, L, zbývá tedy podmínka, aby v něm někde dál byla akvamarínová ozdoba. Pomocník 4 tedy kontroluje a jakmile narazí na akvamarínovou, může řetěz s klidným svědomím dát do krabice, protože vyhovuje Klaudiiným podmínkám. Nákresem by se postup znázornil takto (obrázek 1):



Obrázek 1: Schéma řešení

Úloha 4B Cínová armáda

Označme počet vojáčků jako x a shrňme vše, co o x víme. Platí $2000 \leq x \leq 2500$ a dále dává x po dělení dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, šesti a sedmi vždy zbytek 1. To ale znamená, že $x - 1$ je zároveň násobek dvou, násobek tří atd. Tudíž musí $x - 1$ být násobkem nejmenšího společného násobku čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7. Označme si ho n a spočítejme jej – nejprve potřebujeme prvočíselné rozklady čísel 2 až 7, to jsou

$$2 = 2^1, \qquad 3 = 3^1, \qquad 4 = 2^2,$$
$$5 = 5^1, \qquad 6 = 2 \cdot 3, \qquad 7 = 7^1.$$

Prvočíselný rozklad n obdržíme tak, že každému prvočíslu přiřadíme jako exponent to největší číslo, které se u daného prvočísla vyskytuje v rozkladech čísel 2 až 7. Takže prvočíslu 2 přiřadíme exponent 2 (ve čtyřce máme 2^2), prvočíslu 3 exponent 1 (v trojce i šestce máme 3^1) a oběma prvočíslům 5 a 7 exponent 1. Dohromady tak

$$n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420.$$

Nyní již svedeme určit x, resp. $x - 1$. Víme, že $x - 1$ je násobek 420 a leží v rozsahu 1999 až 2499 (včetně). Ukážeme, že takové číslo existuje jenom jedno a to 2100. Platí totiž $2100 = 5 \cdot 420$ a zároveň oba nejbližší násobky 420, tedy čísla

$$4 \cdot 420 = 1680, \qquad 6 \cdot 420 = 2520$$

leží mimo interval $\langle 1999, 2499 \rangle$. Můžeme si tak být jisti, že $x - 1 = 2100$, neboli $x = 2101$.

Úloha se nás ale ptá, jaké nejmenší číslo kromě jedničky dělí x. Mohli bychom prostě hrubou silou zkoušet postupně všechna čísla od 2 až po x, ale můžeme si ušetřit kus práce, když se trochu zamyslíme. Označme si písmenem d hledaného nejmenšího dělitele x vyjma jedničky. Rozmysleme si, že d musí být prvočíslo. Kdyby d bylo složené, pak by bylo součinem nějakých čísel a, b menších než d, ale větších než 1. Pak ale a dělí d a zároveň d dělí x, takže dohromady i a dělí x. Přitom a je menší než d a větší než 1, což není možné, protože d má být kromě jedničky ten nejmenší dělitel x. Určitě tak d nemůže být složené, stačí ho tedy hledat mezi prvočísly. Můžeme si být jisti, že to není dvojka, trojka, čtyřka, pětka, šestka ani sedmička, protože už ze zadání víme, že po dělení těmito čísly dává x zbytek 1 – nemůže tedy být jejich násobkem. Nejmenší následující prvočíslo je 11, snadno zjistíme, že 11 už x skutečně dělí, jelikož platí $x = 2101 = 11 \cdot 191$. Určitě tak $d = 11$ – Cézar musí utvořit zástupy nejméně po jedenácti.

Úloha 5B Utíkající hodiny

Ukazují-li zvířecí hodiny ve 24 hodinách správný čas vždy 4krát a víme-li, že ručičky se pohybují stále stejnou rychlostí, tak musí platit, že po 24 hodinách jsou ručičky v přesně stejné poloze jako na začátku. Ony časové shody musí potom nastat po stejně velkých časových úsecích (tedy úsecích po 6 hodinách), přičemž první shodný čas označíme t_0, shodný čas po 6 hodinách jako t_6, po 12 hodinách jako t_{12} a po 18 hodinách jako t_{18} (poté opět dorazí hodiny na začátek cyklu v čase t_0).

Dále víme, že stejný jako reálný čas ukazují zvířecí hodiny ve chvíli, kdy ručička těchto hodinek „předbíhá“ ony normální. Tato předběhnutí pak tedy nastanou kromě počátečního času t_0 celkem 3krát za den – to znamená, že zatímco u normálních hodin doběhnou ručičky z času t_0 na t_6, musí ručičky zvířecích hodin uběhnout celý okruh hodin a navíc tenhle daný úsek 6 hodin (analogická úvaha pak bude platit mezi časy t_6 a t_{12}, t_{12} a t_{18} a stejně tak t_{18} a t_0).

Tedy za dobu, co na normálních hodinách uběhne 6 hodin, na zvířecích uběhne $12 + 6 = 18$ hodin, z čehož jasně vidíme, že zvířecí hodiny musí běžet 3krát rychleji než naše lidské hodiny.