Kategorie mladší

Úloha 1A Kudy kam

Tak toto je tedy pořádný zmatek, pojďme na to pomalu. Před sebou máme čtyři cesty oddělené třemi různými rostlinami: angreštem, růžemi a malinami.

Vojta nám prozradil, že musíme jít okolo angreštu. My na rozdíl od geparda Tomáše nevidíme, mezi kterými cestami je vysázený angrešt, ale prvních několik tvrzení nám dvě cesty hned vyloučí. Zdeněk nám říká, že okolo růží se dostaneme do sadu. Hned na to se od Vojty dovídáme, že růže nejsou uprostřed a k rybníku se jde okolo malin. A tu přichází Vojtovo záludné sdělení: pokud by byly růže uprostřed a vyměnili bychom angrešt a maliny tak, aby žádná rostlina nezůstala na původním místě, stále bychom šli k rybníku kolem malin. Náš obrázek tedy vypadá takto:

a) –?–M–?–A–?–R–?–
b) –?–R–?–A–?–M–?–
c) –?–A–?–M–?–R–?–
d) –?–R–?–M–?–A–?–

A po přesázení:

a) –?–A–?–R–?–M–?–
b) –?–M–?–R–?–A–?–
c) –?–M–?–R–?–A–?–
d) –?–A–?–R–?–M–?–

V případě a) jsme se mohli k rybníku dostat cestičkou 1 nebo 2 (číslováno zleva doprava), ale ani jedna nevede kolem malin po přesázení. V případě b) máme podobný problém, V případě c) se jde k rybníku cestičkou 2, v případě d) cestičkou 3. To nám ale moc nepomůže, do vesnice se stále může jít kteroukoliv cestou.

Zdeněk nám prozrazuje, že po přesázení bychom okolo angreštu šli do sadu. Vojta nám prozrazuje, že vesnice a řeka nejsou vedle sebe. Na závěr se ještě dovídáme, že k řece se jde cestou 1. Když se znovu podíváme na svoje možnosti d) a c), přijdeme na to, že pokud by byl angrešt zasazený mezi cestami 1 a 2, tak by musela cesta do vesnice vést cestou 2, což nám ale nějak nesedí, protože by byla hned vedle řeky. Takže už víme, jak jsou rostliny zasazené:
–ř–R–?–M–?–A–?–

K řece se tedy jde kolem růží, jenže kolem růží se jde i do sadu. Zbývá nám tak jediná cesta, kterou se do sadu dostaneme:
–ř–R–s–M–?–A–?–

Na cestě k rybníku si můžeme natrhat maliny, a proto už víme, která cesta vede do vesnice, a určitě na to přijde i Tomáš :-)
–ř–R–s–M–r–A–v–

Do vesnice vede čtvrtá cesta zleva, neboli též první cesta zprava.

Úloha 2A Rozměňovací

Abychom se nezamotali do mnoha možností, jak rozměňovat tři padesátikrejcary a došli k požadovanému počtu drobných mincí, tak bude nejjednodušší jít na to od konce – začít s drobnými mincemi a snažit se je „směnit“ na větší mince (podle opačné tabulky než rozměňování – např. jeden desetikrejcar a dva pětikrejcary směním na dvacetikrejcar). Vilhelmína se tedy bude snažit směnit jednokrejcary, dvoukrejcary a pětikrejcary na tři padesátikrejcary. Mince, které má Vilhelmína zrovna u sebe, si můžeme zapsat takhle:

13 x 1 11 x 2 9 x 5 0 x 10 0 x 20 0 x 50

Hodnoty mincí, které nemá, psát nebudeme, aby to bylo na první pohled vidět:

13 x 1 11 x 2 9 x 5

Na konci postupu chceme, aby Vilhelmína měla jenom tři padesátikrejcary, takže všechny menší mince musíme nějak směnit za padesátikrejcary. Na začátku nevíme, kolik máme k dispozici desetikrajcarů a dvacetikrejcarů, protože Vilhelmíně je jedno, kolik těchto mincí bude mít na konci – v našem obráceném postupu na začátku. Když tedy budeme potřebovat některou z těchto mincí, můžeme si je přidat, akorát si to musíme poznamenat – mince, které jsme složili z drobnějších k současnému stavu přičteme a ty, ze kterých jsme směnili jinou minci od současného stavu odečteme (můžeme se dostat do záporných čísel, což nám ale nevadí, protože to znamená jenom to, že na konci rozměňování by Vilhelmíně kromě drobných mincí zbylo i několik desetikrejcarů či dvacetikrejcarů). Na konci našeho postupu však potřebujeme, aby počet desetikrejcarů a dvacetikrejcarů nebyl kladný. Nyní je efektivní směňovat na desetikrejcary a pětikrejcary: na získání jedné mince „se zbaví“ čtyř mincí. Zkusíme nejdříve mince větší hodnoty – desetikrejcary – musíme si však dát pozor, abychom si nechali dost pětikrejcarů na složení pádesátikrejcaru – na každý potřebujeme dva pětikrejcary.

12 x 1 9 x 2 8 x 5 1 x 10
11 x 1 7 x 2 7 x 5 2 x 10
10 x 1 5 x 2 6 x 5 3 x 10

9 x 1 3 x 2 5 x 5 4 x 10
8 x 1 1 x 2 4 x 5 5 x 10

Teď je výhodné směnit na padesátikrejcary – zbavíme se tří mincí (dvacetikrejcar nemáme směněný, takže se ho nepotřebujeme zbavit):

8 x 1 1 x 2 2 x 5 3 x 10 -1 x 20 1 x 50
8 x 1 1 x 2 0 x 5 1 x 10 -2 x 20 2 x 50

Na směnění dalších padesátikrejcarů nám chybí pětikrejcary, avšak stále nám zbývají jednokrejcary a dvoukrejcary, kterých se potřebujeme zbavit a které na pětikrejcary můžeme směnit:

5 x 1 0 x 2 1 x 5 1 x 10 -2 x 20 2 x 50

Teď nám pro změnu na směnění na pětikrejcar chybí dvoukrejcar, takže ho směníme z jednokrejcarů.:

3 x 1 1 x 2 1 x 5 1 x 10 -2 x 20 2 x 50

Nyní už zase může mince směnit na pětikrejcar:

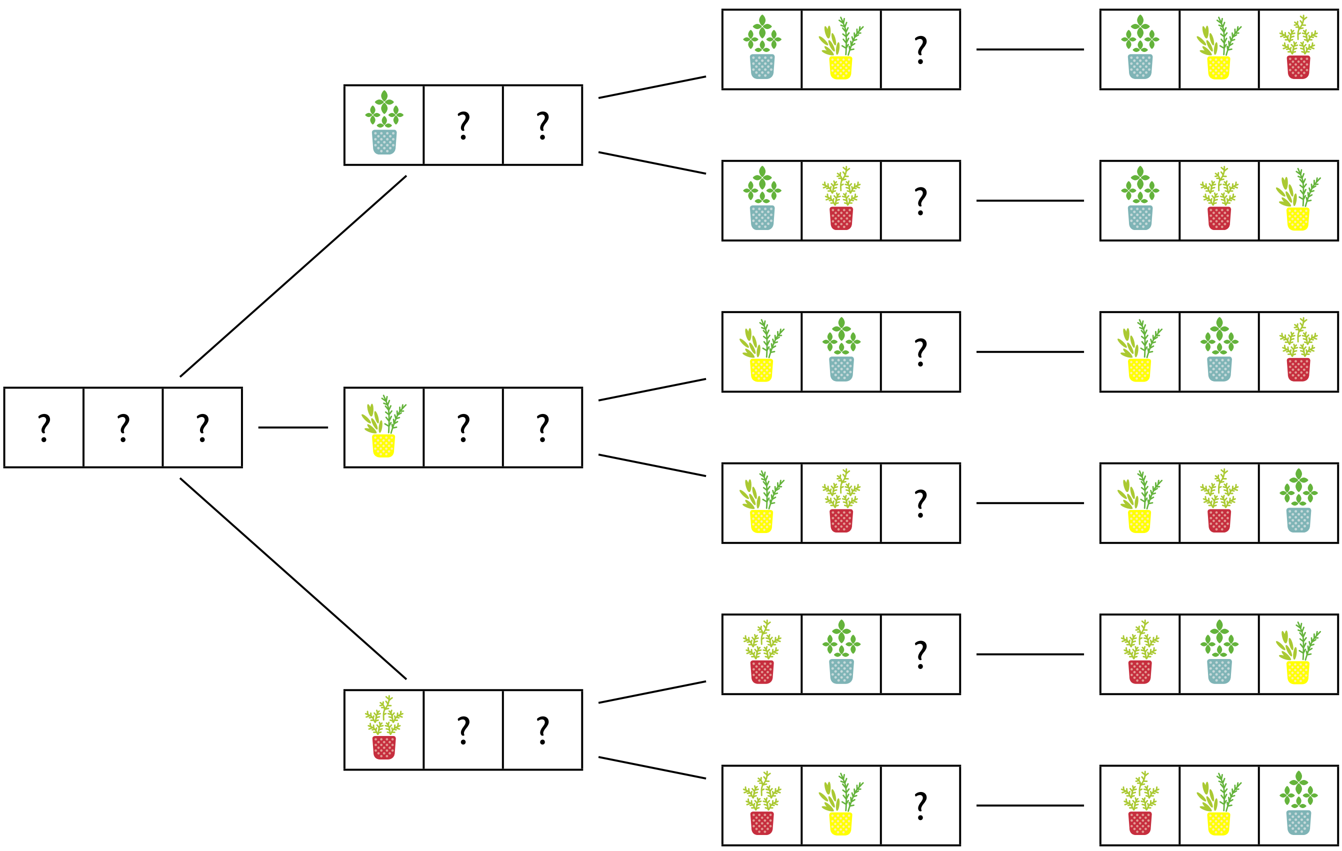
0 x 1 0 x 2 2 x 5 1 x 10 -2 x 20 2 x 50 Žádné jednokrejcary ani dvoukrejcary nám už nezbývají a potřebujeme se zbavit dvou pětikrejcarů a jednoho desetikrejcaru, ze kterých však směněním získáme poslední potřebný padesátikrejcar:

0 x 1 0 x 2 0 x 5 -1 x 10 -3 x 20 3 x 50

Když tento postup obrátíme, máme postup, jak ze tří padesátikrejcarů získat třináct jednokrejcarů, jedenáct dvoukrejcarů a devět pětikrejcarů. Zároveň jsme zjistili, že na konci rozměňování bude mít Vilhelmína kromě požadovaných drobných ještě jeden desetikrejcar a tři dvacetikrejcary. Nejmenší možný počet mincí, které musí Vilhelmína rozměnit, je tedy 11.

Úloha 3A Květináče

Jana si může představit, jako by na okně měla přesně tři místa, na která se dá umístit květináč. Jana má také tři různé květináče, takže na první místo může umístit tři různé květináče – má tedy tři různé možnosti. Ke každé z těchto tří možností může na druhé místo postavit jeden ze dvou zbývajících květináčů, počet rozložení na prvních dvou místech tedy bude $3 \cdot 2 = 6$, a protože ke každé z těchto šesti možností zbývá Janě jediný květináč na poslední místo, počet rozložení se nezmění (viz obrázek 1). Vystačí tedy na 6 dní.



Obrázek 1: Postupné umisťování tří květináčů.

V případě pěti květináčů bude Jana při výpočtu postupovat podobně, na první místo může postavit pět různých květináčů, k nim na druhé místo čtyři zbývající a tak dále, tedy $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ různých rozložení.

Úloha 4A Sušenky

Ve schématu automatu si lze povšimnout, že jednotlivé stavy automatu a přechody mezi nimi ne vždy odpovídají skutečné hodnotě vložených mincí (např. ze stavu 0 se pomocí pětikrejcaru dá dostat do stavu 3 a ne 5, jak bychom možná očekávali, naopak ze stavu 4 se pomocí jednokrejcaru dá dostat do stavu 6). Při nákupu sušenek tedy může využít toho, že při některých přechodech si automat myslí, že dostal více peněz, než opravdu dostal.

Peníze, které máme k dispozici, nám stačí na 12 přechodů (pomocí jednokrejcarů můžeme dvakrát postoupit o stav vpravo, pomocí dvoukrejcarů můžeme dvakrát postoupit o dva stavy a pomocí pětikrejcarů dvakrát o tři, celkem tedy $2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3 = 12$ přechodů, když bychom počítali přechody jen po jednom). Tím, že počítáme, kolik přechodů můžememe provést, a ne, kolik peněz máme k dispozici, nám stačí počítat jen počet jednokrejcarových přechodů a nemusíme se zabývat tím, které peníze jsme ve skutečnosti využili (musíme si však nakonec zkontrolovat, že potřebné počty kroků mezi výdejem sušenky se dají ze zadaných mincí – počtu přechodů – složit, aniž bychom některých mincí použili více, než kolik jich máme k dispozici).

Nejvýhodněji jde sušenka získat z přechodu mezi stavy 13 a 6 (jedna sušenka „stojí“ jen tři přechody) a když už by nezbyly peníze na další celý přechod ze stavu 6 do stavu 13, tak lze místo výdeje jedné sušenky ve stavu 13 přejít ještě o jeden stav dále a nechat si vydat sušenky dvě.

Nyní se podívejme na to, kolikrát vlastně můžeme tohoto přechodu využít, a tím pádem kolik můžeme vlastně získat sušenek. Kdybychom začínali ve stavu 6, tak na získání jedné sušenky potřebujeme tři přechody, na získání dvou čtyři, avšak po výdeji dvou sušenek nebudeme zpátky ve stavu 6, nýbrž ve stavu 1, takže je výhodné nejprve co nejvícekrát přejít mezi stavy 6 a 13 a až při posledním přechodu, pokud nám na to zbudou peníze, přejít až do stavu 15 a z něj si nechat vydat dvě sušenky. Nicméně abychom mohli využít tohoto výhodného přechodu, musíme se nejprve dostat do stavu 6 a na to potřebujeme 5 přechodů, takže na využití zmíněného cyklu nám zbývá $12-5 = 7$ přechodů. Přesně 7 přechodů je potřeba na jeden postup ze stavu 6 do stavu 13, vydání jedné sušenky (tj. zpětný přechod do stavu 6), přechod do stavu 15 a vydání dvou sušenek. Takto získám tři sušenky, nejvíce lze tedy získat tři sušenky. Automat sice skončí ve stavu 1 – ne všechny vložené peníze byly vyčerpány – avšak na stav 0 se vydáním sušenky z žádného stavu dostat nedá, vždycky v automatu zbude alespoň jeden nevyužitý krejcar.

Na závěr si ještě ověřme, že tento postup bude fungovat se zadanými hodnotami mincí. Tři sušenky se dají získat například vhozením pětikrejcaru ($\rightarrow$ stav 3), dvoukrejcaru ($\rightarrow$ stav 6), pětikrejcaru ($\rightarrow$ stav 13), stisknutím tlačítka ($\rightarrow$ stav 6), vhozením dvoukrejcaru ($\rightarrow$ stav 10), jednokrejcaru ($\rightarrow$ stav 13), jednokrejcaru ($\rightarrow$ stav 15) a stisknutím tlačítka ($\rightarrow$ stav 1) – takto získáme tři sušenky, využijeme všechny zadané mince a zároveň žádnou navíc. Způsobů, jak získat tři sušenky je mnoho, většina z nich využívá postup přes stavy 6, 13 a 15, jen s různými kombinacemi mincí na dosažení jednotlivých stavů.

Úloha 5A Útěk před bouřkou

Medvěd Móric měl možná méně práce, než se zdá. Ví, že zvuk hromu cestoval po dobu 30 s a že zvuk se pohybuje rychlostí $350\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Za 30 s tedy překoná $30\cdot 350$ m, což je 10 500 m, neboli 10,5 km. To je asi tolik, co na výletě ujdeme za dvě hodiny, což opravdu není málo.

Kategorie starší

Úloha 1B Koláče

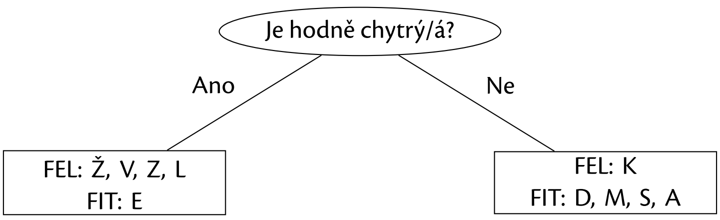
Nejprve si musíme velikosti jednotlivých dílů koláčů převést na společného jmenovatale. To znamená, že pod zlomkovou čarou bude všude stejné číslo. Začneme tím, že si najdeme nejmenší společný násobek všech jmenovatelů a následně vynásobíme každý zlomek tak, aby byl jmenovatelem nejmenší společný násobek. Valentýnka má tedy k dispozici tři kousky povidlového koláče o velikosti $\frac{20}{60}$, čtyři kousky tvarohového koláče o velikosti $\frac{15}{60}$, pět kousků makového koláče o velikosti $\frac{12}{60}$ a šest kousků jablečného koláče o velikosti $\frac{10}{60}$, ale sníst chce jen $\frac{159}{60}$ koláče. $\frac{9}{60}$ koláče se dá docílit jen jedním způsobem – jeden kousek tvarohového koláče a dva kousky makového, které dohromady dají $\frac{15}{60} + 2 \cdot \frac{12}{50} = \frac{39}{60}$ – ze zbývajících kousků zbývá složit $\frac{120}{60}$ koláče ($\frac{159}{60} - \frac{39}{60} = \frac{120}{60} = 2$). Nepoužijeme už další kousky makového koláče, protože nám ho zbývají $\frac{3}{5}$ a ty se nedají ostatními kousky doplnit na celé koláče. Dva koláče se ze zbývajících kousků dají sestavit třemi způsoby – buď vezmeme celý povidlový koláč (tedy tři kousky) a celý jablečný (šest kousků) – zbylé dva koláče už nejsou celé, nebo celý povidlový (tři kousky), polovinu tvarohového (dva kousky) a polovinu jablečného (tři kousky), nebo dva kousky povidlového, dva tvarohového a pět kousků jablečného koláče ($2 \cdot \frac{20}{60} + 2 \cdot \frac{15}{60} + 5 \cdot \frac{10}{60} = \frac{120}{60}$).

Úloha 2B Těžká rozhodnutí

Zamysleme se nejprve nad tím, jak budeme při konstrukci stromu postupovat: Na začátku máme všechny Láďovy kamarády v jedné velké skupině; vybereme si nějakou otázku, a podle odpovědi na ni zvířátka rozdělíme do dvou skupin. Následně budeme postup opakovat na každou z těchto skupin, a to tak dlouho, dokud nebude platit, že všechna zvířátka, která jsou ve stejné skupině, chodí na stejnou školu.

Jak ale vybrat tu správnou otázku, podle které zvířátka rozdělit? Jednoduchá odpověď neexistuje a neexistuje ani jednoduchý postup, který by za všech okolností vedl k nejlepšímu možnému řešení. Zdá se ale rozumné snažit se třeba o to, aby výsledné skupiny byly co nejstejnorodější, tedy aby valná většina zvířátek v dané skupině chodila na stejnou školu. Ne už tak zjevné, ale také rozumné, může být také to, aby výsledné skupiny měly pokud možno podobnou velikost. Pokud se budeme snažit vybírat otázky tak, abychom co nejlépe naplnili tyto dvě podmínky, nemáme sice zaručeno, že vždy dojdeme k ideálnímu řešení, ale v naprosté většině případů dojdeme k řešení velice dobrému. (Takovému postupu, který nám nic nezaručuje, ale většinou funguje, se v informatice říká *heuristika*.)

Podle výše zmíněných kritérií se jako vhodná volba na první otázku jeví „Je hodně chytrý/á?“, která rozdělí zvířátka na dvě stejně velké skupiny, z nichž v první (skupina „ano“) jsou čtyři zvířátka z FELu (Žofka, Vilda, Zuzka a Lída) a jen jedno z FITu (Emil), a ve druhé (skupina „ne“) jsou naopak čtyři zvířátka z FITu (Daniela, Móric, Sára a Aleš) a jen jedno z FELu (Kobi) (viz obrázek 2; pro jednoduchost označujeme zvířátka pouze prvním písmenkem jejich jména). (Stejně dobré, i když ne totožné, rozdělení by poskytla taky otázka „Baví ho/ji matematika?“.)



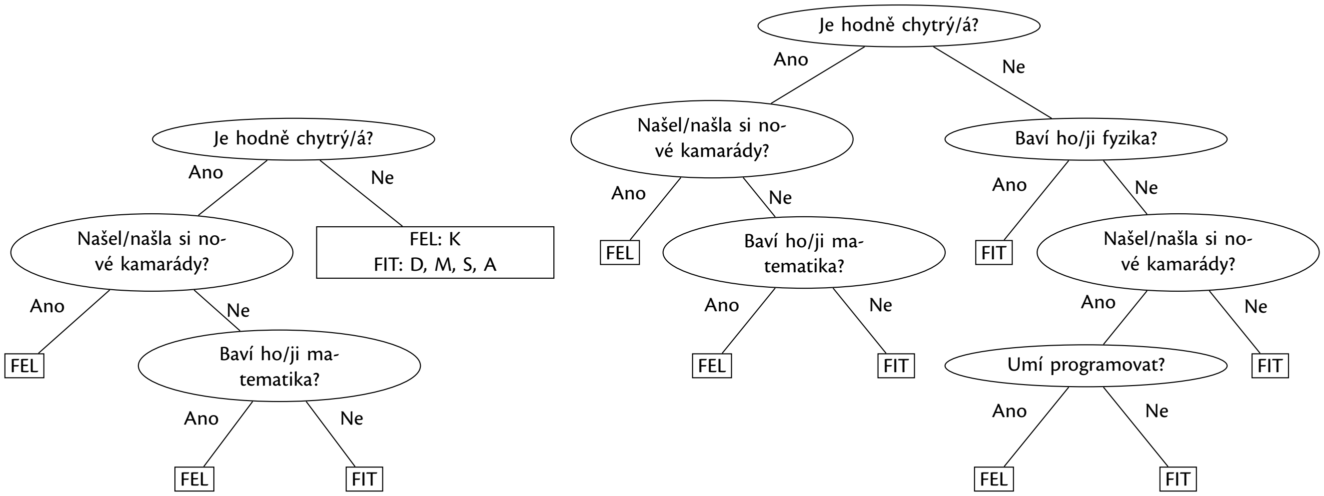
Obrázek 2: Rozdělení zvířátek po první otázce

Nyní se budeme věnovat první skupině, na obrázku 2 vlevo. V ideálním případě bychom rádi našli otázku, na kterou Emil odpoví „ano“ a ostatní zvířátka „ne“, nebo naopak - taková ale bohužel není. Použijeme tedy např. otázku „Našel/našla si nové kamarády?“, na kterou Žofka, Zuzka a Vilda odpoví „ano“, a protože jsou všichni z FELu, naše cesta tímto směrem končí. Lídu a Emila, kteří si nové kamarády nenašli, potom rozlišíme pomocí libovolné z otázek „Baví ho/ji matematika?“, „Umí programovat?“ a „Baví ho/ji fyzika?“, neboť na všechny tři odpoví Lída a Emil rozdílně. Levá větev stromu je tedy zobrazena na obrázku 3a.

Vraťme se nyní ke zvířátkům, která na otázku „Je hodně chytrý/á?“ odpověděla „Ne“. Podobně jako v předchozím případě bychom chtěli najít otázku, která odliší Kobiho od Daniely, Mórice, Sáry a Aleše, ale ani tentokrát takovou nenajdeme. Můžeme se ale např. postupně zeptat na „Baví ho/ji fyzika?“, „Našel/našla si nové kamarády?“ a „Umí programovat?“. Výsledný rozhodovací strom bude vypadat tak, jak je zobrazeno na obrázku 3b.

Na nejvíce otázek, a to čtyři, musí odpovědět Kobi a Daniela, tento rozhodovací strom tedy splňuje Láďovy požadavky.

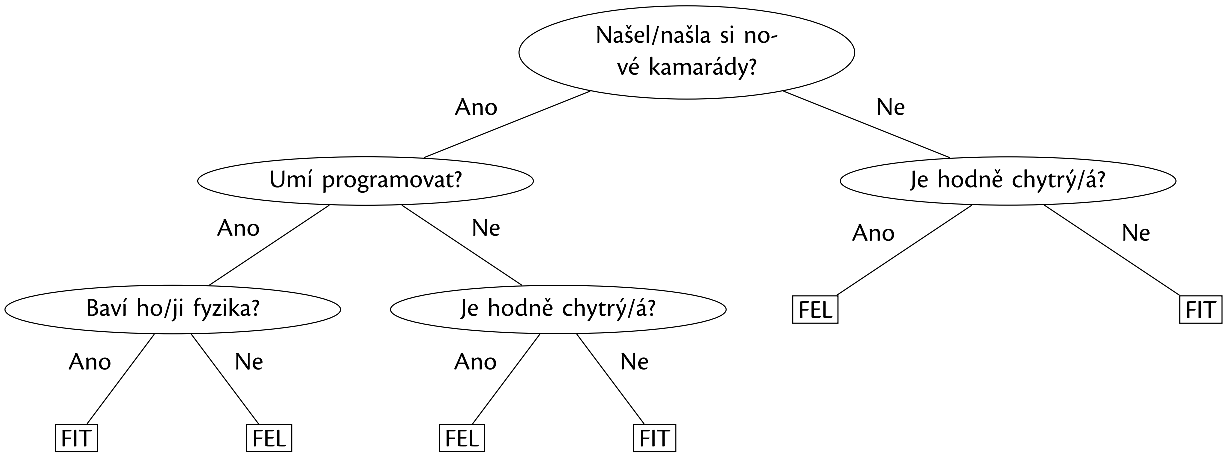
Toto řešení samozřejmě není jediné možné. Kdybychom např. hned za první otázku zvolili „Našel/našla si nové kamarády?“, mohli bychom dokonce získat strom, s nímž vždy položíme nanejvýš tři otázky (viz obrázek 4).



(a) Levá větev stromu

(b) Možné řešení

Obrázek 3



Obrázek 4: Jiné možné řešení

Úloha 3B Obálkovací

V době, kdy budou na obálkování přítomná všechna tři zvířátka, se určitě vyplatí, aby Zuzka zadání překládala a Alenka a Václav je vkládali do obálek: Zuzce trvá přeložení zadání 15 s, zatímco vložení do obálky trvá Alence 40 s a Václavovi 35 s; Zuzka tedy produkuje přeložená zadání dostatečně rychle na to, aby zaměstnala oba dva kamarády. Zároveň platí, že Zuzka je ze všech zvířátek nejrychlejší v překládání, ale zato nejpomalejší ve vkládání do obálek, a zvířátka by si tedy určitě nepolepšila, kdyby Zuzku při překládání někdo nahradil.

Zuzka ale může dorazit na akci až hodinu po začátku, do té doby budou Alenka a Václav pracovat sami. Z faktu, že Zuzka je rychlá při překládání a Alence a Václavovi zase jde vkládání do obálek, vyplývá, že optimální strategií je, pokud Alenka s Václavem za první hodinu přeloží jen tolik zadání, aby byli zaměstnáni, dokud nepřijde Zuzka, a potom nechají překládání na ní. Protože Alenka překládá rychleji než Václav a Václav je zase rychlejší při vkládání do obálek, přeloží potřebný počet zadání Alenka, a pak se přidá k Václavovi při vkládání do obálek.

Alence ale bude přeložení prvního zadání trvat 20 s. Bude výhodnější, když Václav počká a vkládat do obálek začne až po 20 s, nebo bude lepší, když na začátku přeloží jedno zadání, místo aby jen tak nečinně neseděl, a pak teprv se pustí do vkládání do obálek? Odpověď není na první pohled zřejmá, proto spočítáme obě varianty.

- Označme si počet zadání potřebných na první hodinu práce x. V prvním případě jejich překládání zabere Alence $20 \cdot x$ s. Zbylý čas, než přijde Zuzka, tedy $3600 - 20x$ s, stráví vkládáním do obálek, a za tu dobu vloží do obálek $(3600 - 20x)/40$ zadání. Václav bude celou dobu vkládat do obálek; s prací může začít až tehdy, když mu Alenka vyrobí první přeložené zadání, celkem tedy bude vkládat po dobu 3580 s a za tu dobu zpracuje 3580/35 zadání. Aby byla obě zvířátka celou dobu zaměstnána, chceme, aby platilo:

$$\begin{aligned} x &\geq (3600 - 20x)/40 + 3580/35 \\ 40 \cdot 35 \cdot x &\geq 35 \cdot (3600 - 20x) + 40 \cdot 3580 \\ 1400x &\geq 126000 - 700x + 143200 \\ 2100x &\geq 269200 \\ x &\geq 128{,}19 \end{aligned}$$

V prvním případě tedy Alenka přeloží 129 zadání, což jí zabere $129 \cdot 20$ s = 2580 s. Za zbylých 1020 s vloží do obálek $1020/40 = 25{,}5$ zadání. Václav vloží do obálek $3580/35 \doteq 102{,}3$ zadání, dohromady tedy bude 127 zadání kompletně hotovo a na dalších dvou se bude pracovat.

- Ve druhém případě Václav na začátku přeloží jedno zadání předtím, než se pustí do vkládání do obálek. Celkový počet zadání je opět x a podobnou úvahou jako výše se dostaneme k nerovnici:

$$\begin{aligned} x &\geq (3600 - 20(x-1))/40 + 3575/35 \\ 40 \cdot 35 \cdot x &\geq 35 \cdot (3600 - 20x + 20) + 40 \cdot 3575 \\ 1400x &\geq 126700 - 700x + 143000 \\ 2100x &\geq 269700 \\ x &\geq 128{,}43 \end{aligned}$$

Opět je tedy potřeba 129 zadání. Do doby, než přijde Zuzka, vloží Alenka do obálek $(3600 - 2560)/40 = 26$ zadání a Václav $3575/35 \doteq 102.14$ zadání. Rozdíl je sice minimální, ale prozatím se zdá, že druhá varianta by mohla výt výhodnější. Ale chyba lávky! Václav potřebuje odejít tři hodiny po začátku. Za dobu své přítomnosti by tedy stihl, v případě druhé varianty, přeložit jedno zadání a za zbylých $3 \cdot 3600 - 25$ s = 10 775 s vložil do obálek $10775/35 \doteq 307{,}86$ zadání. Nestihl by Václav dokončit i své 308. zadání, pokud by na začátku neztratil 5 s překládáním? Stihl, neboť $10780/35 = 308$! Nakonec tedy přece jen bude výhodnější první varianta (tedy Václav počká 20 s, než mu Alenka přeloží první zadání).

Všimni si také, že tak, jak jsme problém nyní vyřešili, bude buď Václav, nebo Alenka chvíli čekat na své první přeložené zadání od Zuzky: Alenka dokončí vkládání posledního zadání, které sama přeložila, v čase $2580 + 26 \cdot 40$ s = 3620 s, tedy 20 s po Zuzčině příchodu. Václav dokončí své 103. zadání v čase $20 + 103 \cdot 35$ s = 3625 s, tedy 25 s po Zuzčině příchodu. Zuzka ale bude mít první zadání hotové 15 s a druhé až 30 s po svém příchodu. Buď tedy může Alenka 10 s počkat (Václava nechat čekat nechceme, stihl by potom do svého odchodu vložit do obálek jen 307 zadání), nebo na začátku přeloží o jedno zadání více. V tom případě by Alenka strávila na začátku 2600 s překládáním zadání (vyrobila by jich 130) a poté by se pustila do vkládání do obálek. Opět není zřejmé, která varianta je výhodnější, a tak zkusíme spočítat obě dvě:

- V první variantě na Zuzku ve chvíli, kdy přijde, stále čeká $800 - 129 = 671$ zadání. Zuzka je všechna přeloží za $671 \cdot 15$ s = 10 065 s = 167,75 min, celkově tedy v čase $3600 + 10065$ s = 13 665 s, tj. necelé čtyři hodiny od začátku schůzky.
  Václav za dobu své přítomnosti vloží do obálek 308 zadání, zbylých 492 čeká na Alenku a Zuzku. Označme t čas, který Zuzka stráví vkládáním do obálek poté, co v čase 13 665 s přeloží poslední zadání. Alenka potom do obálek vloží celkem $(13665 - 2580 - 10 + t)/40$ zadání (neboť na začátku Alenka 2580 s překládala a pak 10 s čeká) a Zuzka $t/45$ zadání, neboli:

$$\begin{aligned} 492 &= \frac{13665 - 2580 - 10 + t}{40} + \frac{t}{45} \\ 40 \cdot 45 \cdot 492 &= 45 \cdot (11075 + t) + 40t \\ 885600 - 45 \cdot 11075 &= 85t \\ 387225 &= 85t \\ t &\doteq 4556 \end{aligned}$$

  Alenka tedy vloží do obálek celkem $\frac{13655-2580-10+4556}{40} = 390{,}525 \approx 390$ zadání a skončí v čase $390 \cdot 40 + 2580 + 10 =$18 190 s. Zuzka vloží do obálek $\frac{4556}{45} \doteq 101{,}24 \approx 101$ zadání a skončí v čase $13665 + 101 \cdot 45$ s = 18 210 s. Zbývá vložit do obálky poslední, osmisté zadání, což udělá za dalších 40 s Alenka, a obálkování definitivně skončí 18 230 s = 5 h 3 min 50 s po začátku.
- Ve druhé variantě na Zuzku zbylo k přeložení 670 zadání. Zuzka je všechna přeloží za $670 \cdot 15$ s = 10 050 s, tedy $3600 + 10050$s = 13 650 s od začátku akce.
  Opět označíme t čas, který Zuzka stráví vkládáním do obálek poté, co v čase 13 650 s přeloží poslední zadání. V tomto případě Alenka vloží do obálek celkem $(13650 - 2600 + t)/40$ zadání (tentokrát Alenka na začátku přeložila o jedno zadání víc, což jí

zabralo dalších 20 s) a Zuzka $t/45$ zadání, neboli:

$$\begin{aligned}
492 &= \frac{13650 - 2600 + t}{40} + \frac{t}{45} \\
40 \cdot 45 \cdot 492 &= 45 \cdot (11050 + t) + 40t \\
885600 - 45 \cdot 11050 &= 85t \\
388350 &= 85t \\
t &\doteq 4569
\end{aligned}$$

Alenka tedy vloží do obálek celkem $\frac{13650-2600+4569}{40} = 390{,}475 \approx 390$ zadání a skončí v čase $390 \cdot 40 + 2600 =$18 200 s. Zuzka vloží do obálek $\frac{4569}{45} \doteq 101{,}53 \approx 101$ zadání a skončí v čase $13650 + 101 \cdot 45$ s = 18 195 s. Poslední, osmisté zadání vloží do obálky za dalších 40 s Alenka, a obálkování v tomto případě definitivně skončí 18 240 s = 5 h 4 min po začátku. O 10 s se tedy vyplatí první varianta.

Shrňme nakonec ještě jednou, jakou taktiku zvířátka zvolí: Na začátku bude Alenka 2580 s překládat, přeloží 129 zadání. Poté 10 s počká a pak začne vkládat do obálek a vkládá až do konce. Václav počká 20 s, než mu Alenka předá první přeložené zadání, a potom až do svého odchodu vkládá do obálek. Zuzka nejprve přeloží všechna zbylá (tedy 671) zadání, a poté až do konce pomáhá Alence s vkládáním do obálek.

Úloha 4B Lví tanec

Protože není jednoduché o jednom vybraném políčku rozhodonut, jestli při hře z tohoto pole vyhraje Anička či Bedřich – není jednoduché vyzkoušet všechny možnosti – rozmysleme si nejprve, co to vlastně znamená, že pokud hra začne z nějakého pole, vyhraje vždy Anička (anebo vždy Bedřich). Výherní políčko je takové, z kterého se dá lev povoleným tahem přesunout na políčko, ze kterého se nedá vyhrát (Anička se snaží docílit toho, aby se Bedřich ocitl na políčku, ze kterého nejde vyhrát, tím pádem vyhraje ona) – při hře z takového políčka tedy vyhraje Anička, neboť začíná. Naopak políčko, ze kterého nejde vyhrát (prohern í políčko), je takové políčko, ze kterého se lev povoleným tahem může dostat jen na výherní políčka (Anička by lvem musela táhnout na pole, ze kterých Bedřich dokáže vyhrát, takže by prohrála) – při hře z takového políčka vyhraje Bedřich.

To vypadá skoro jako definice kruhem – výherní políčko je definované pomocí nevýherního a naopak. My však o jednom políčku na šachovnici víme, že výherní není – když se jeden z hráčů dostane na políčko v levém dolním rohu, nemá kam táhnout a prohrál (ten druhý tedy vyhrál). Když víme, jak hra dopadne při začátku z tohoto políčka, můžeme říci i jak hra dopadne při začátku na políčcích o jedno nebo dvě pole vzdálených ve směru nahoru a doprava – z těchto políček může Anička táhnout na políčko, které výherní není, tím pádem Bedřich nebude mít kam táhnout a Anička vyhraje. O druhém políčku zprava, ve druhé řadě od spoda teď víme, že se z něj dá táhnout jen na výherní políčka, tím pádem toto políčko výherní nebude. Od tohoto políčka můžeme zase označit dvě pole směrem nahoru a dvě pole směrem doprava jako výherní, neboť z nich se dá na nevýherní pole táhnout. Podle těchto pravidel (definic výherního a nevýherního políčka) lze o každém políčku na šachovnici postupně rozhodnout, jestli bude výherní, či nikoliv. Vyplněná šachovnice je vidět na obrázku 5 – A značí, že při začátku na tomto poli vyhraje Anička, B že Bedřich.

A	B	A	A	B	A	A	B
B	A	A	B	A	A	B	A
A	A	B	A	A	B	A	A
A	B	A	A	B	A	A	B
B	A	A	B	A	A	B	A
A	A	B	A	A	B	A	A
A	B	A	A	B	A	A	B
B	A	A	B	A	A	B	A

Obrázek 5: Výherní políčka pro Aničku (A) a Bedřicha (B)

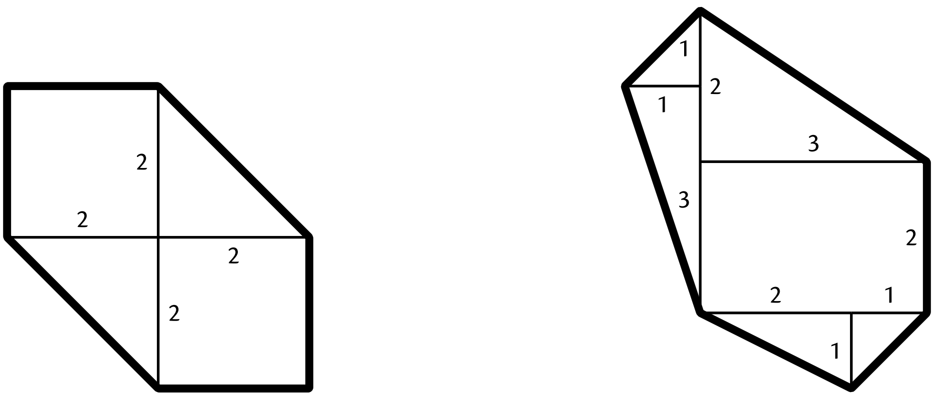
Podívejme se ještě na chvilku na vzor, který nám vznikl na šachovnici. Vyšlo nám, že Bedřich vyhraje, pokud hra začne na nějakém políčku hlavní diagonály jdoucí z levého dolního do pravého horního rohu; stejně tak i pokud hra začne z políčka každé třetí vedlejší diagonály (posunuté oproti předchozí o tři políčka doprava či nahoru). Ze všech ostatních polí vyhraje Anička. Docílit toho může třeba takto:

pokud začala z políčka mimo prohrávající diagonály, může vždy na některou z těchto diagonál táhnout. Potom ale Bedřich určitě táhne někam mimo tuto diagonálu (jsou od sebe vzdáleny tři pole, ale každý tah posune lva nanejvýš o dvě pole), takže Anička zase může táhnout zpátky do ní (případně na jinou prohrávající diagonálu). Anička si tímto vlastně zajišťuje, že když Bedřich najde nějaký platný tah, najde jej potom i ona. Figurka se takto dříve či později dostane do levého holního rohu šachovnice a Bedřich určitě prohraje. Naopak, pokud hra začne na prohrávajícím políčku, musí Anička v prvním tahu táhnout na nějaké vyhrávající políčko, a Bedřich tak může použít stejnou strategii jako prve Anička.

Úloha 5B Obsáhlá

Packa má poměrně komplikovaný tvar, takže není jednoduché její obsah spočítat přímo. Můžeme ji ale rozkouskovat na menší útvary, jejichž obsahy už spočítat dovedeme – např. na obdélníky a pravoúhlé trojúhelníky. Obsah obdélníku s délkami stran a, b je jednoduše $a \cdot b$, zatímco obsah pravoúhlého trojúhelníku s délkami odvěsen a, b je roven $\frac{a \cdot b}{2}$. Všechny obsahy můžeme prozatím počítat v čtverečcích, na závěr výsledek vynásobíme obsahem jednoho čtverečku, a tak obdržíme obsah v centimetrech čtverečních.

Začněme prsty packy. Označme S_1 obsah toho prstu, který je nejvíce vlevo, a S_2 toho přímo napravo od něj. Ty můžeme na obdélníky a trojúhelníky rozdělit např. podle obrázku 6.



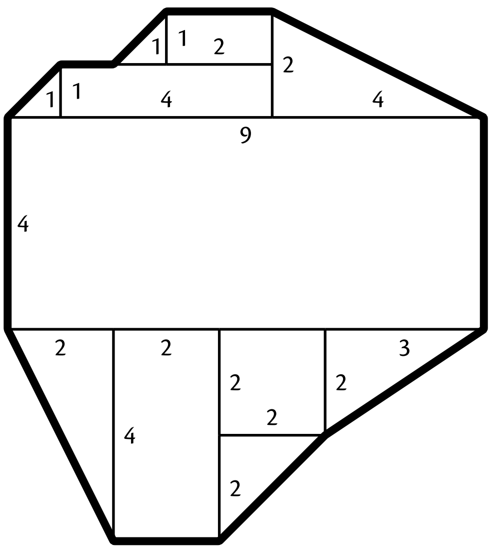
Obrázek 6: Výpočet obsahů prstů

Z tohoto rozdělení pak už plynou obsahy

$$S_1 = 2 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} + 2 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 4 + 2 + 4 + 2 = 12,$$

$$S_2 = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + 2 \cdot 3 + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} = 0{,}5 + 3 + 6 + 0{,}5 + 1 + 1{,}5 = 12{,}5.$$

Nyní zbývá spočítat obsah dlaně tlapy – označme ho S_3. Použijeme stejný postup jako u prstů – viz např. rozdělení podle obrázku 7.



Obrázek 7: Výpočet obsahu dlaně

Toto rozdělení nám už dá obsah

$$S_3 = \frac{1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 4}{2} + 4 \cdot 9 + \frac{2 \cdot 3}{2} + 2 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} + 4 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 4 =$$
$$= 0{,}5 + 2 + 4 + 36 + 3 + 4 + 2 + 8 + 4 + 0{,}5 + 4 = 68.$$

Nyní stačí sečíst obsahy čtyř prstů jedné dlani do celkového obsahu

$$S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + S_3 = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 12{,}5 + 68 = 24 + 25 + 68 = 117.$$

Na závěr už jen uvažme, že jeden čtvereček Marcelova čtverečkovaného papíru má hranu dlouhou 3 cm, a tedy obsah 9 cm^2. Skutečný obsah celé packy je tedy $117 \cdot 9\,\mathrm{cm}^2 = 1053\,\mathrm{cm}^2$.