Kategorie mladší

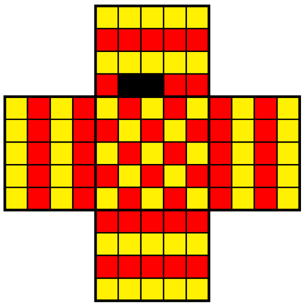
Úloha 1A Račice obkládá

Víme, že na třech obvodových stěnách bude stejně dlaždic obou barev. V jedné stěně je $4 \cdot 5 = 20$ dlaždic, polovina červená, polovina žlutá. Na tři stěny tedy spotřebujeme 30 dlaždic od každé barvy, zbývá nám 20 červených a 23 žlutých.

Ve stěně s dveřmi ovšem v nejspodnějším pruhu chybí dvě dlaždice, potřebujeme tedy 10 dlaždic jedné a 8 druhé barvy.

Abychom měli na podlaze příčné pruhy, budeme dlaždice pokládat jako na šachovnici. Protože je lichý počet dlaždic v řadě, stačí pokládat dlaždice postupně za sebou a střídat barvy. Při lichém počtu řad dlaždic ($5 \cdot 5 = 25$), bude o jednu více dlaždic té barvy, kterou jsme začali, potřebujeme tak 13 první a 12 druhé barvy. (Případně si můžeme rozložení podlahy nakreslit a spočítat dlaždice každé barvy.)

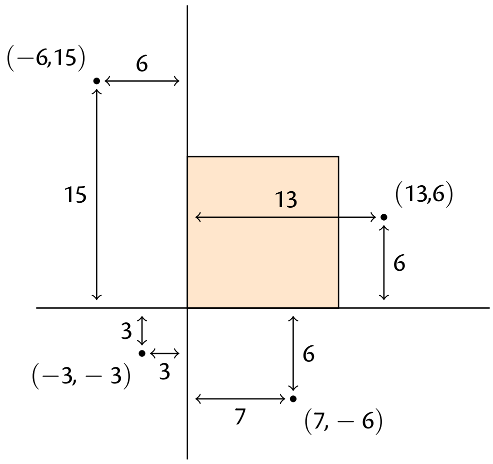
Nyní je snadné si domyslet, že ze zbývajících 20 červených dlaždic použijeme 8 na poslední stěnu a 12 na podlahu, a z 23 žlutých 10 na stěnu a 13 na podlahu. Koupelna tedy bude vypadat takto:



Obrázek 1: Rozložení dlaždic

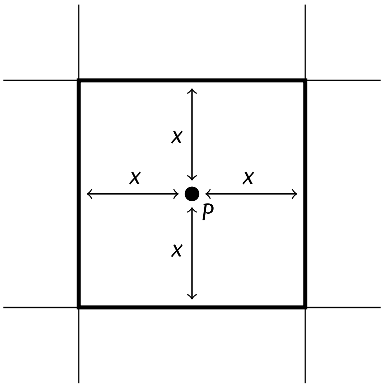
Úloha 2A Poznávací zájezd

Rozšiřme nejprve chápání zeměpisných souřadnic i mimo hranice města. Šířkou libovolného bodu P ležícího y km od jižní strany města (představujme si ji prodlouženou na přímku) nechť je y, pokud P leží na sever od této strany, a $-y$, pokud leží na jih. Obdobně pokud P leží x km od západní strany (prodloužené na přímku), nechť je jeho zeměpisnou délkou x, leží-li na východ od západní strany města, a $-x$, leží-li na východ (viz obrázek 2).



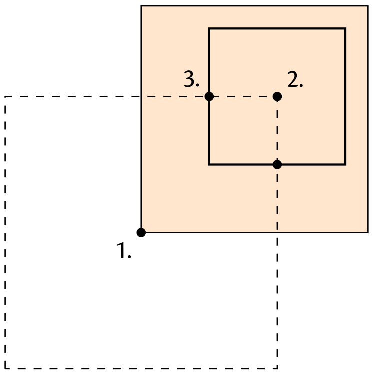
Obrázek 2: Zobecnění souřadnic

Položme si jednoduchou otázku: pakliže se Mustafa v nějakém bodě P zeptá na vzdálenost galerie a obdrží odpověď d, co to vypovídá o možnostech polohy galerie? Jinak řečeno, které body mají od P (Čebyšanskou) vzdálenost x? Vzdálenost je podle Čebyšanů ten větší z rozdílů zeměpisných šířek a zeměpisných délek dvou bodů, takže každý bod G, který má od P vzdálenost x, musí buďto svou zeměpisnou šířku o x vyšší či o x menší než P, nebo svou zeměpisnou délku o x vyšší či menší než P (nebo dokonce obojí). To znamená, že musí ležet jedné ze dvou rovnoběžek s jižní stranou města, které jsou od P vzdáleny přesně x, nebo na jedné z obdobných rovnoběžek se západní stranou (nebo v jednom ze čtyř vznikajících průsečíků). Vzdálenost ale musí být tím *větším* z rozdílů šířek a délek, takže takový bod G musí dokonce ležet na obvodu čtverce, který zmíněné čtyři rovnoběžky vytínají (viz obrázek 3).



Obrázek 3: Kružnice podle Čebyšanské vzdálenosti

Víme-li již toto všechno, snadno vymyslíme, jak si vystačit se třemi dotazy. Mustafa se nejprve zeptá na vzdálenost galerie v jednom z rohů města (např. v jihozápadním). Dostane nějakou odpověď – jak jsme si rozmysleli, body, v nichž se v souladu s takovou odpovědí může galerie nacházet, odpovídají nějakému čtverci (resp. jeho obvodu) – další dotaz nechť Mustafa položí v tom rohu tohoto čtverce, který se nachází uvnitř města (takový je jen jeden). Nyní má Mustafa dvě odpovědi, tj. dva čtverce, na obvodu obou z nichž musí galerie ležet. Dvě Čebyšanské kružnice, tj. dva obvody čtverů, mají ale vždy nanejvýš dva průsečíky (viz obrázek 4) – stačí se tedy ještě potřetí dotázat v jednom z nich. Pokud Mustafa obdrží odpověď 0, nalezl právě galerii, zatímco v opačném případě se galerie musí nacházet v druhém z průsečíků prvních dvou odpovědí. (Existují samozřejmě i další postupy, ale myšlenka je vždy obdobná.)



Obrázek 4: Jeden z možných postupů

Úloha 3A Měnící se měna

Na začátek si všimněme, že pokud už umíme poskládat nějakou částku, pak už určitě umíme složit i částku o 7 JC vyšší – prostě přidáme jednu minci. Z toho už si dovedeme rozmyslet, že zvolená sada bankovek spolu s mincí umožní poskládat každou částku vyšší než 59 JC, právě pokud s ní dovedeme složit prvních sedm takových částek, tj. 60, 61, 62, 63, 64, 65 a 66 JC.

Jedna z těchto hodnot, 63, už je násobkem sedmi, pročež lze poskládat pouze s použitím mincí. Zbylé částky dávají po dělení sedmi zbytky 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Zvolenými hodnotami bankovek se tedy pouze potřebujeme trefit do správných zbytků, pokud však tyto hodnoty nebudou příliš vysoké – mince nesmíme odečítat, tj. pokud dovedeme z bankovek vytvořit částku 71, vůbec nám to nepomůže v poskládání částky 64 (ač dávají stejný zbytek po dělení sedmi). Potřebujeme tedy tyto hodnoty – nazvěme je třeba a,b,c – navolit tak, abychom mezi čísly $a,b,c,a+b,b+c,c+a$ apod. stále obdrželi šest různých zbytků po dělení sedmi (jeden, v podobě částky 63, jsme už vyřešili) ve správném rozsahu (menší nebo rovné 66).

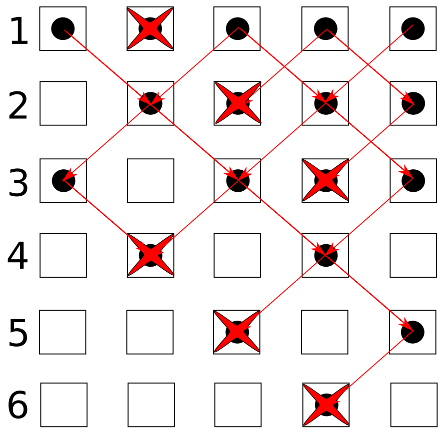
S trochou zkoušení nakonec dospějeme k tomu, že nejvyšší možnou hodnotou nejmenší bankovky je 32 JC. Např. lze zavést bankovky v hodnotách 32, 33 a 34 JC – potřebné částky pak poskládáme následovně:

$$60 = 32 + 4 \cdot 7, \qquad 61 = 33 + 4 \cdot 7,$$
$$62 = 34 + 4 \cdot 7, \qquad 63 = 9 \cdot 7,$$
$$64 = 2 \cdot 32, \qquad 65 = 32 + 33,$$
$$66 = 2 \cdot 33.$$

Jak si být jisti, že nelze zvolit ještě vyšší hodnoty? Pokud by nejmenší bankovka měla hodnotu $a \geq 33$ JC, pak druhá nejmenší musí mít hodnotu $b \geq 34$ JC a poslední $c \geq 35$ JC. Pak by ale z čísel $a, b, c, 2a, 2b, 2c, a+b, b+c, c+a$ apod. nanejvýš čtyři ($a,b,c, 2a$) byla ve správném rozsahu (menší nebo rovná 66), takže bychom svedli vyrobit nanejvýš pět různých zbytků po dělení sedmi (jak již bylo řečeno, částka 63 JC je snadno vyřešena). Nejvyšší možnou hodnotou nejmenší bankovky je tedy 32 JC.

Úloha 4A Mravenci a milkshake

Na začátku nevíme, kde se milkshake nachází, ale víme, že každou noc změní svou polohu ze sudého do lichého trezoru nebo naopak. Pomocí této úvahy můžeme zkusit omezit místa, kde by se mohl nacházet další noci. Vzhledem k tomu, že máme pět trezorů, budeme se muset dvě noci po sobě kouknout do trezorů se stejnou sudolichostí. Pojďme si ukázat proč náš postup 2-3-4-2-3-4 funguje.

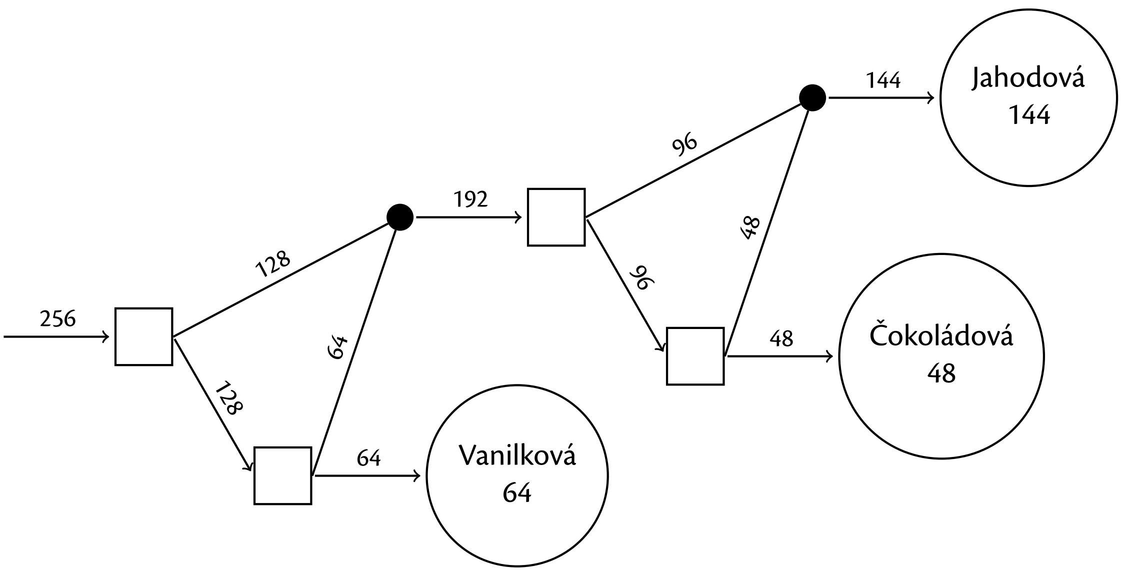


Obrázek 5: Proč řešení funguje.

Jak je vidět, na začátku může být milkshake kdekoliv. Začínáme na druhém trezoru, tím si ošetříme jedno políčko, kde se milkshake nebude moci příští kolo vyskytnout vůbec. A takhle pokračujeme a snažíme se nechat si všechny milkshaky jen v lichých pozicích. To se nám třetí noc povede. Poté už není problém milkshake dohledat, neboť víme, jestli příští noc bude vždy v lichém nebo sudém trezoru.

Úloha 5A Výrobní linka

Cílový poměr je na první pohled složitý. Všimněme si ale, že poměr $(3+9):4$ lze zkrátit na $3:1$. Můžeme tedy nejprve dřívka rozdělit v poměru na čtvrtinu a tři čtvrtiny, které následně rozdělíme opět v poměru $1:3$ (to je totéž, jako $3:9$). Nejlepší řešení tedy může vypadat např. tak jako na obrázku 6.



Obrázek 6: Nejlepší řešení

Kategorie starší

Úloha 1B Mozaika

Číslo v nějakém poli mozaiky určitě svedeme dopočítat ve dvou případech. Zaprvé, pokud známe čísla ve všech sousedních polích, stačí je sečíst a vzít zbytek po dělení čtyřmi. Takto např. dopočteme číslo v levém horním rohu mozaiky:

3	1	?	?
2	3	?	?
?	?	?	0
?	?	?	?

Zadruhé, pokud známe číslo v jednom poli mozaiky a známe i čísla ve všech polích sousedních, s výjimkou jediného, získáme toto chybějící číslo následovně: sečteme čísla ve všech ostatních sousedních polích, odečteme číslo z pole prostředního a vezmeme zbytek po dělení čtyřmi. Takto snadno dopočteme další dvě čísla v mozaice:

3	1	3	?
2	3	?	?
0	?	?	0
?	?	?	?

Nyní ani jedním z těchto dvou způsobů nedovedeme dopočíst číslo v žádném dalším poli mozaiky. Jak tedy postupovat dál? Vyberme si jedno pole, jehož číslo ještě neznáme – třeba to v pravém horním rohu – a zkusme do něj vždy doplnit jedno z čísel 0, 1, 2, 3 a následně pokračovat, dokud pro některé z těchto možností nedospějeme do stavu, kdy nějaké pole nelze vyplnit žádným číslem (každá volba čísla nějak poruší pravidlo, podle něhož má mozaika fungovat):

3	1	3	0
2	3	?	?
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	1
2	3	?	?
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	2
2	3	?	?
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	3
2	3	?	?
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	0
2	3	2	1
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	1
2	3	1	2
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	2
2	3	0	3
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	3
2	3	3	0
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	0
2	3	2	1
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	1
2	3	1	2
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	2
2	3	0	3
0	?	?	0
?	?	?	?

3	1	3	3
2	3	3	0
0	?	?	0
?	?	?	?

Obrázek 7: Pokusy o vyplnění mozaiky podle volby čísla v pravém horním rohu

Tři ze čtyř možností vedly k rozporu, takže se budeme držet té poslední. V té už jsme ale vyplnili dost čísel na to, abychom opakovaným používáním dvou vytyčených doplňovacích pravidel zaplnili mozaiku celou:

3	1	3	1
2	3	1	2
0	3	1	0
?	?	?	?

3	1	3	1
2	3	1	2
0	3	1	0
3	3	1	1

Obrázek 8: Doplnění zbylých čísel mozaiky

Úloha 2B Rozhádané figurky

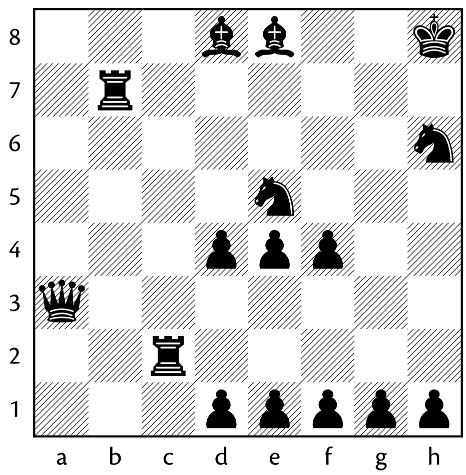
Jednoduchý postup, jakým by král mohl žádané umístění figurek najít, neexistuje. Nezbývá mu než zkoušet různé konfigurace. Rozhodně ale existuje několik pravidel, která mohou nalezení řešení usnadnit:

Rozumné určitě bude začít s rozmisťováním takových figurek, které jsou prostorově náročné, tedy ohrožují hodně políček. Tak třeba taková dáma nesnese, aby někdy obýval stejnou řadu, sloupec, dokonce ani diagonálu jako ona! Kam ji umístit, aby nám zbylo co nejvíce políček použitelných pro další figurky? Snadno si rozmyslíme, že když dámu usídlíme kamkoli na kraj šachovnice, zabereme tím 22 políček (jedno, na kterém královna stojí, 7 zbylých v téže řadě, 7 zbylých v témže sloupci a 7 po diagonále), zatímco když ji umístíme někam doprostřed šachovnice, třeba na políčko d4, zabereme tím 28 políček (jedno, na kterém královna stojí, 7 zbylých v téže řadě, 7 zbylých v témže sloupci a 13 po diagonále). Určitě je tedy výhodné umístit dámu někam na okraj.

Naopak věže, ty zaberou políček vždy stejně – kromě jednoho, na kterém stojí, ještě zbytek řady (7 políček) a zbytek sloupce (také 7 políček). Už jenom tím, že umístíme dámu a obě věže, tedy zabereme tři celé řady a tři celé sloupce!

Věže ani dáma vedle sebe nikoho nesnesou. Některým figurkám ale tohle vůbec nevadí! Tak třeba takových pěšců může být vedle sebe (v řadě či sloupci, nikoliv po diagonále), kolik se nám jenom zachce. Totéž platí i o střelcích a jezdcích, i ty můžeme umístit těsně vedle sebe (a také je samozřejmě můžeme umístit vedle pěšců).

Jedno z možných řešení vypadá např. takto:



(Černé figurky táhnou, jako obvykle, shora dolů, takže pěšci na polích d4 a f4 neohrožují jezdce na poli e5, ani neohrožuje pěšec na poli d1 věž na c2.)

Úloha 3B Zlomek

To, že je nějaký zlomek *v základním tvaru*, tj. že z jeho čitatele a jmenovatele nelze nic zkrátit, znamená, že největší společný dělitel zmíněného čitatele a jmenovatele je roven jedné, neboli že jsou tato dvě čísla *nesoudělná*. Snažíme se tedy ukázat

$$\mathrm{NSD}\big((7n+5)\cdot(8n+5), 3n+2\big) = 1.$$

Nejprve ukažme $\mathrm{NSD}(7n+5, 3n+2) = 1$ a $\mathrm{NSD}(8n+5, 3n+2) = 1$. K tomu užijeme Euklidův algoritmus. To, že nepracujeme s konkrétními čísly, ale s výrazy v proměnné n ničemu nevadí – základní myšlenkou algoritmu je, že pokud nějaké (přirozené) číslo d dělí obě přirozená čísla a, b (tedy pokud je jejich společným dělitelem), tak dělí i číslo $a - x \cdot b$ pro libovolné celé číslo x. To, že neznáme *konkrétní* hodnoty a, b na tom nic nezmění. Vypočtěme tedy pomocí Euklidova algoritmu $\mathrm{NSD}(7n+5, 3n+2)$ a $\mathrm{NSD}(8n+5, 3n+2)$:

$$
\begin{aligned}
a &= 7n+5 \\
b &= 3n+2 \\
(7n+5) - 2 \cdot (3n+2) &= n+1 \\
(3n+2) - 2 \cdot (n+1) &= n \\
(n+1) - 1 \cdot n &= 1 \\
n - n \cdot 1 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
a &= 8n+5 \\
b &= 3n+2 \\
(8n+5) - 2 \cdot (3n+2) &= 2n+1 \\
(3n+2) - 1 \cdot (2n+1) &= n+1 \\
(2n+1) - 1 \cdot (n+1) &= n \\
(n+1) - 1 \cdot n &= 1 \\
n - n \cdot 1 &= 0
\end{aligned}
$$

V obou případech jsme ještě před nulou obdrželi 1, pročež opravdu platí $\mathrm{NSD}(7n+5, 3n+2) = 1$ i $\mathrm{NSD}(8n+5, 3n+2) = 1$. Z toho víme, že žádný společný dělitel nelze zkrátit mezi $7n+5$ a $3n+2$ ani mezi $8n+5$ a $3n+2$, určitě tedy žádný nepůjde zkrátit ani mezi $(7n+5)\cdot(8n+5)$ a $3n+2$. Uvažovaný zlomek je tedy určitě v základním tvaru.

Úloha 4B Hodina létání

Označme si nejprve přehledně veličiny a jejich hodnoty převeďme na základní jednotky:

- hmotnost Tučňáka: $m_T = 70\,\mathrm{g} = 0{,}07\,\mathrm{kg}$
- průměr Tučňáka: $d_T = 6\,\mathrm{cm} = 0{,}06\,\mathrm{m}$
- výšky Tučňáka: $h_T = 16\,\mathrm{cm} = 0{,}16\,\mathrm{m}$
- průměr jednoho balónku: $d_b = 25\,\mathrm{cm} = 0{,}25\,\mathrm{m}$
- hustota vzduchu: $\rho_v = 1{,}2047\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
- hustota hélia: $\rho_{He} = 0{,}1762\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
- tíhové zrychlení: $g = 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Aby se Tučňák vznesl do oblak, musí vztlaková síla převýšit sílu tíhovou. Na vyjádření těchto dvou sil ale nejprve potřebujeme znát objem Tučňáka i objem a hmotnost jednoho balónku. Tučňákův objem V_T spočteme bez problému, stačí využít vzorec pro výpočet objemu válce $V = \frac{\pi}{4}d^2h$ (kde d je průměr).

$$V_T = \frac{\pi}{4} \cdot d_T^2 \cdot h_T = \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}06^2 \cdot 0{,}16\,\mathrm{m}^3 \doteq 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$$

Pro objem V_b jednoho balónku využijeme zase vzorec pro objem koule $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ (kde d je opět průměr).

$$V_b = \frac{1}{6}\pi d_b^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot 0{,}25^3\,\mathrm{m}^3 \doteq 8{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

Balónek je naplněn héliem a hmotnost balónku samotného zanedbáváme. Jeho hmotnost tedy bude rovna:

$$m_b = \rho_{He} \cdot V_b = \frac{1}{6}\pi\rho_{He}d_b^3 \doteq 0{,}1762 \cdot 8{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \doteq 1{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

Nyní si představme, že k Tučňákovi přivážeme n balónků (n zatím neznáme). Potom bude tíhová síla celé soustavy rovna

$$F_G = (m_T + n \cdot m_b) \cdot g,$$

protože Tučňák dohromady s balónky má hmotnost $m_T + n \cdot m_b$. Podobně mají dohromady objem $V_T + n \cdot V_b$, pročež bude (dle Archimédova zákona) jejich vztlaková síla rovna:

$$F_{vz} = \rho_v \cdot (V_T + n \cdot V_b) \cdot g$$

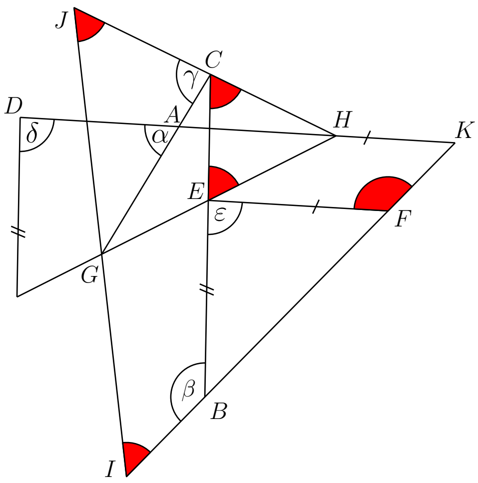
Nyní můžeme sestavit rovnici, z níž nalezneme takové n, pro něž by tyto dvě síly byly přesně stejně velké, neboli by se Tučňák octl v naprosté rovnováze (ani by nepadal, ani nestoupal). Nejspíš nám nevyjde celočíselné n, takže poté zaokrouhlíme nahoru.

$$
\begin{aligned}
F_{vz} &= F_G \\
\rho_v \cdot (V_T + n \cdot V_b) \cdot g &= (m_T + n \cdot m_b) \cdot g \\
\rho_v \cdot (V_T + n \cdot V_b) &= m_T + n \cdot m_b \\
\rho_v V_T + n \cdot \rho_v V_b &= m_T + n \cdot m_b \\
n \cdot \rho_v V_b - n \cdot m_b &= m_T - \rho_v V_T \\
n \cdot (\rho_v V_b - \rho_{He} V_b) &= m_T - \rho_v V_T \\
n \cdot V_b \cdot (\rho_v - \rho_{He}) &= m_T - \rho_v V_T \\
n &= \frac{m_T - \rho_v V_T}{V_b \cdot (\rho_v - \rho_{He})} = \frac{0{,}07 - 1{,}2047 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-4}}{8{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot (1{,}2047 - 0{,}1762)} \doteq 8{,}3
\end{aligned}
$$

Po zaokrouhlení nahoru dostaneme $n = 9$. Aby tedy Hanička naučila Tučňáka létat, bude potřebovat alespoň devět balónků (s osmi by ještě stál na zemi).

Úloha 5B Úhelníček

Pro snazší vyjadřování pojmenujme některé vrcholy:



Obrázek 9: Úhelníčkův náčrtek

Nejdřív si doplňme všechny úhly, jejichž velikost se dá dopočítat ze zadaných. Ze součtu úhlů v trojúhelníků dopočítáme velikost úhlu $\sphericalangle$*JHG*, při jeho znalosti dopočítáme i velikost úhlu $\sphericalangle$*HGJ*. Úhel $\sphericalangle$*GEB* ve čtyřúhelníku *BEGI* je vrcholový se známým, takže je také známý. Z trojúhelníku *JGH* lze dopočítat velikost úhlu $\sphericalangle$*JGH*, z kteréhož lze dopočítat velikost úhlu $\sphericalangle$*HGI*. Ve čtyřúhelníku *BEGI* známe tedy velikosti všech úhlů kromě velikosti úhlu β, kterou však z ostatních můžeme dopočítat. Když známe velikost úhlu β, tak známe i velikost úhlu $\sphericalangle$*EBF* a protože známe velikost úhlu $\sphericalangle$*EFK*, tak známe i velikost úhlu $\sphericalangle$*EFB*, takže ze součtu velikostí úhlů v trojúhelníku dopočítáme velikost úhlu ε. Velikost úhlu δ je stejná jako velikost úhlu ε, protože jsou souhlasné (přiléhají ke dvojici rovnoběžek).

Nyní si rozmysleme, že velikost úhlů α a γ dopočíst nelze. Ty totiž záleží na orientaci úsečky *CG*. Představme si, že bod *E* posuneme podél úsečky *GH*, přičemž zachováme orientaci úseček *BC*, *EF*, tj. posuneme i body *B*, *C*, *F* po jejich příslušných úsečkách tak, aby nové úsečky *BC*, *EF* byly rovnoběžné s těmi původními. Pokud toto učiníme, velikost žádného z červených úhlů ani žádného z β, δ, ε se nezmění, zatímco velikosti úhlů α a γ ano. Nemohou tedy být vypočitatelné z červených úhlů, protože jimi nejsou jednoznačně určeny.