Kategorie mladší

Úloha 1A Sázky bobrů

Nejprve si zkusíme přepsat tento podivný graf do nějaké lepší podoby. Začneme tím, že si vytvoříme tabulku A až F kde každý hraje proti každému. Následně, pokud od týmu vede šipka k jinému, zapíšeme to jako výhru tohoto týmu nad druhým (V) a pro druhý tým jako prohru (P).

	A	B	C	D	E	F
A	X		V	V	V	
B		X	V	V		V
C	P	P	X			P
D	P	P		X	P	
E	P			V	X	P
F		P	V		V	X

Tabulka 1: Zapsané vítězství a prohry

Teď už můžeme začít počítat. Nejprve se zaměříme na remízy. Ty nejsou v tabulce zapsané, a tak je nejsme schopni odlišit od neodehraných zápasů. Každopádně jich bude maximálně polovina (protože pravá horní část odpovídá levé spodní) všech prázdných políček. To je maximálně šest možných remíz.

Dále jsou tu výhry. Těch jsme si zapsali 9. (Tím už odpadá tvrzení bobřice Denisy.)

Následují neodehrané zápasy. Jak už jsme zmínili, nejsme schopni určit jejich přesný počet (protože je neumíme odlišit od remíz), ale bude jich maximálně šest.

Tudíž vyhrává bobr Boleslav, protože nejvíce je jednoznačných zápasů.

Úloha 2A Přesazování

K řešení se dalo přistoupit dvěma způsoby – úvahou, či vypsáním všech možností.

Podíváme-li se na úvahu, zjistíme velmi snadno, že dvě květinky nemohou být zasazeny správně, pokud je třetí zasazena špatně. Jsou-li dvě ze tří poloh obsazeny správně a zbývá-li jediná kytka, kterou můžeme umístit, musí být zkrátka vylučovací metodou umístěna správně. Zbývá se tedy zamyslet ještě nad tím, jestli je obecně platné, že jedna květinka bude na závěr zasazena správně. Pokud by bylo možné zasadit květinky špatně, dvě z nich prohodit a obě mít stále na špatných polohách, musela by být správná poloha obou z nich právě na posledním nezměněném místě, což nepřipouštíme. Tímto dospějeme k závěru, že jedna květinka bude na závěr umístěna správně a právě dvě nemohou být zároveň umístěny správně.

Druhá možnost postupu je vypsat všechny možnosti. Označíme si květinky jako A, B a C a jako správnou označíme variantu, kdy je A na pozici 1, B na pozici 2 a C na pozici 3. Další možná pořadí (při tomto řešení „hrubou silou" ale musíme zahrnout opravdu všechny možnosti, nebo nějak vysvětlit, proč zahrneme jenom některé) můžeme roztřídit do tří skupin:

1. všechny rostlinky jsou zasazeny správně: ABC
2. právě jedna rostlinka je zasazena správně: ACB, CBA, BAC
3. všechny rostlinky jsou zasazeny špatně: CAB, BCA

Tedy vycházíme-li ze špatné varianty CAB a prohodíme-li dvě libovolné rostlinky, získáme možnosti CBA, BAC a ACB, což jsou všechno skutečně varianty z druhé skupiny, tedy ty, v nichž je právě jedna rostlinka umístěna správně. Vyjdeme-li ze špatné varianty BCA, dostaneme opět CBA, BAC a ACB, takže jsme si konkrétně ukázali, že na konci bude skutečně právě jedna rostlinka na svém místě.

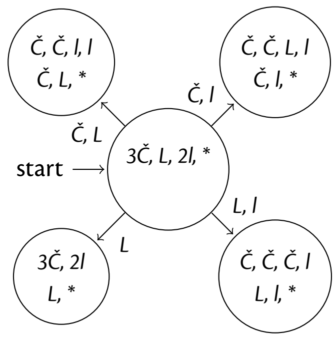
Úloha 3A Čmelák a nektar

Nejprve musíme zjistit, kolik nektaru Čestmír nasbírá ve višňovém sadu za stejnou dobu, za kterou by doletěl na louku, sbíral nektar tam a doletěl zpátky. Výprava na louku Čestmírovi trvá $12 + 10 + 12 = 34$ minut, a za tuto dobu Čestmír v sadě nasbírá $34\,\text{min} \cdot 20\,\text{květů/min} \cdot 0{,}15\,\text{mg/květ} = 102\,\text{mg}$ nektaru. Při výpravě na louku tedy musí nasbírat více než 102 mg a navíc musí ještě nasbírat nektar, který sní po cestě tam a zpátky. Nektar, který spotřebuje za $12 + 12 = 24$ minut letu je $\frac{1}{8}\,\text{mg/min} \cdot 24\,\text{min} = 3\,\text{mg}$. Za 10 minut sbírání nektaru na louce musí Česmír sebrat $102 + 3 = 105\,\text{mg}$ nektaru. Za 10 minut obletí $20\,\text{květů/min} \cdot 10\,\text{min} = 200$ květů, takže na každý květ vychází alespoň $105\,\text{mg} : 200\,\text{květů} = 0{,}525\,\text{mg/květ}$. Na louce tedy musí být v jednom květu průměrně více než 0,525 mg nektaru.

Úloha 4A Čuníci a lvi

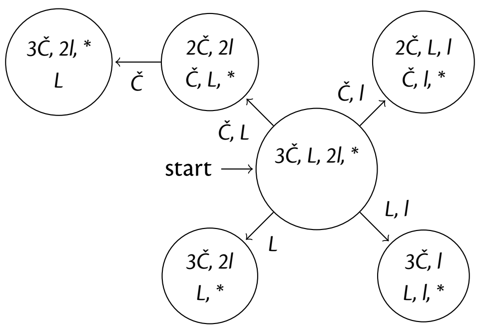
Protože situace u řeky je poměrně spletitá, budeme si kreslit schéma, jak se mohou čuníci a lvi přepravovat. Každou situaci budeme znázorňovat kolečkem s dvěma řádkami textu uvnitř: horní řádka říká, která zvířátka jsou na prvním břehu, spodní říká, která zvířátka jsou na opačném břehu. Polohu loďky značíme hvězdičkou, čuníky písmenkem *Č*, lvici *L* a lvíčata *l*. Šipky vedou mezi situacemi, mezi kterými se zvířátka jednou přeplaví loďkou, a u šipky je naznačeno, která zvířátka se zrovna přeplavují. Pro přehlednost nebudeme do schématu vyznačovat zpětné šipky (tedy situaci, kdy se jedna a tatáž zvířátka budou přes řeku plavit tam a hned zase zpátky), protože je jasné, že to nám k vyřešení problému nepomůže.

Na začátku mají zvířátka čtyři možnosti, koho přes řeku poslat: Buď může odplout samotná lvice, nebo jeden čuník a lvice, nebo jeden čuník a lvíče, nebo lvice a jedno lvíče (viz obrázek 1).



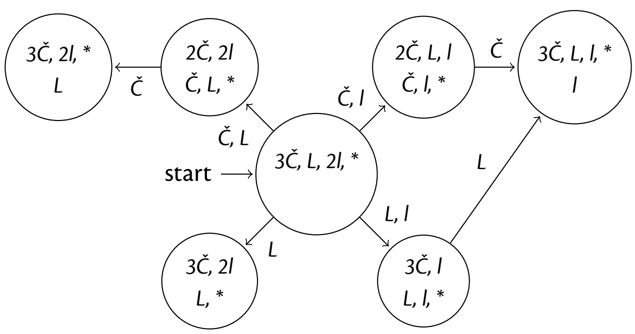
Obrázek 1

Brzy ale zjistíme, že první dvě možnosti nikam nevedou: Samotná lvice se může leda tak vrátit zpátky na druhou stranu, pokud odplul čuník a lvice, může se ještě čuník vrátit sám zpátky, ale dál už cesta také nevede (viz obrázek 2).



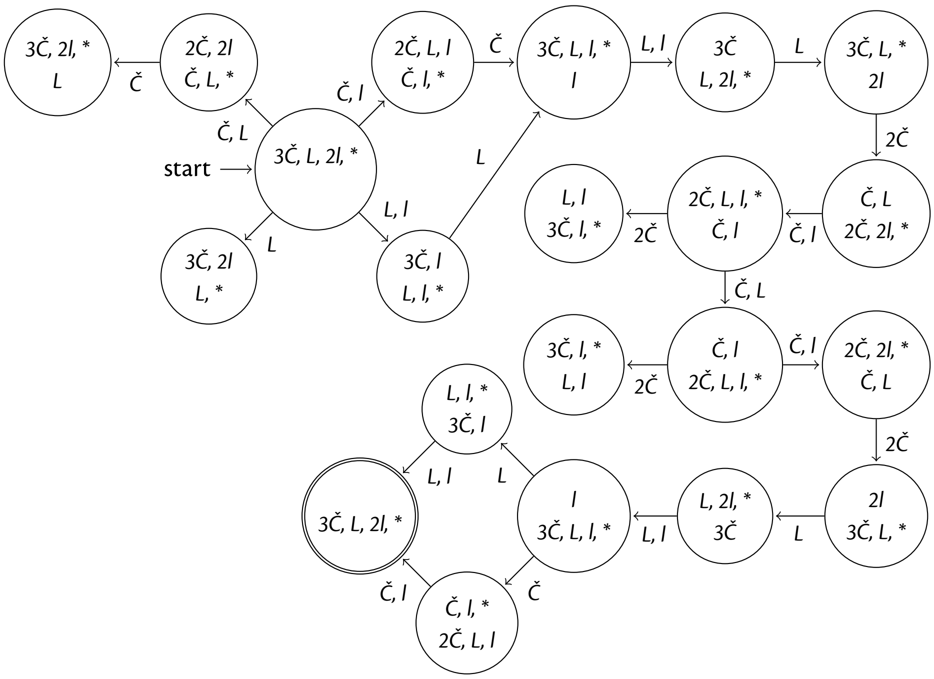
Obrázek 2

Zaměříme se tedy na zbylé dvě situace. Pokud v prvním kroku odplul čuník a lvíče, jedinou možností je, že se nyní vrátí samotný čuník, pokud jako první odplula lvice a lvíče, musí se vrátit sama lvice. V obou případech se dostaneme do stejné situace: Na prvním břehu jsou tři čuníci, lvice a jedno lvíče (a loďka), na druhém břehu je samotné lvíče (viz obrázek 3).



Obrázek 3

Ač se to zatím nezdá, máme už nyní vyhráno. Odteď už totiž většinou budeme mít jen jednu možnost, která zvířátka poslat přes řeku (viz obrázek 4) – dvě výjimky se naštěstí velice záhy ukážou býti slepou uličkou, a na závěr už se jenom musíme dle vlastního vkusu rozhodnout, zda poslední lvíče převeze přes řeku jeho máma, nebo nějaký obětavý čuník.



Obrázek 4

Nejkratší možný postup, kterým se zvířátka mohou bezpečně dostat přes řeku, tedy bude zahrnovat 13 cest loďkou.

Úloha 5A V salóně

Z Andělčina popisu není na první pohled zřejmé, který den k ní přišlo nejvíc zákazníků, není ale těžké to dopočítat. Vyjádříme si počty zákazníků, kteří dorazili v jednotlivé dny, relativně vzhledem k počtu zákazníků, kteří přišli v pondělí: V úterý přišlo o jednoho zákazníka víc, tedy $+1$, ve středu o čtyři méně než v úterý, oproti pondělku tedy -3, atd., až nakonec dostaneme tuto posloupnost:

$$0, +1, -3, -1, +3, +2$$

(číslo 0 značí pondělek). Odtud už vidíme, že nejvíc zákazníků přišlo v pátek a nejméně ve středu, a taky to, že rozdíl mezi pátkem a středou je šest. Pokud tedy k Andělce každý den přišel alespoň jeden zákazník a zároveň jich nikdy nepřišlo víc než sedm, je jasné, že ve středu přišel jeden zákazník a v pátek sedm zákazníků. Teď už není těžké dopočítat, kolik zákazníků přišlo v ostatní dny:

$$4, 5, 1, 3, 7, 6$$

Jediné číslo mezi 1 a 7, které nám chybí, je 2, a v neděli tak Andělka obsloužila 2 zákazníky.

Kategorie starší

Úloha 1B Diář

Nejprve si spočítáme o kolik dní se nám posune kalendář za jeden normální nepřestupný rok. Rok má 365 dní rozdělených do týdnů po 7, $\frac{365}{7} = 52\frac{1}{7}$, tudíž každý normální nepřestupný rok se nám kalendář posune o jeden den dopředu (tzn. datum, které předchozí rok připadlo na pondělí, teď bude v úterý, apod.). Co ale přestupné roky? Přestupný rok má dní 366, a tudíž se jednou za čtyři roky posune kalendář o dny dva.

- Rok 2018 je nepřestupný, má tudíž 365 dní a začíná pondělím. Musíme si tedy spočítat za jak dlouho se nám kalendář posune o 7 dní zpět na pondělí. Přestupný rok je každé 4 roky a naposledy byl roku 2016, tudíž příští čtyři budou 2020, 2024, 2028 a 2032. Budeme se pohybovat po jednotlivých rocích.
- 2019 znamená +1 den v pořadí na začátku roku a není přestupný.
- 2020 znamená +2 dny v pořadí na začátku roku a je přestupný.
- 2021 znamená +4 dny v pořadí na začátku roku (protože 2020 byl přestupný) a není přestupný.
- …
- …
- 2024 znamená +7 dní v pořadí na začátku roku tudíž začíná pondělím stejně jako 2018 ale je přestupný, tudíž po 28. únoru by nám přestala sedět data a dny. Musíme tedy pokračovat dál.
- …
- …
- 2029 znamená +14 dní v pořadí na začátku roku (což je prakticky to samé co +7) a není přestupný. Tento rok tedy může Hanička použít svůj diář znovu. ☺

Úloha 2B Továrna na výrobu medu

Když první den chybělo 10 % dělníků a zároveň vyrobili 225 sklenic, znamená to, že 100 % dělníků by vyrobilo $\frac{225}{0,9} = 250$ sklenic medu.

Druhý den bylo přítomných 80 % pracovníků, a v tomto počtu by normálně vyrobili $250 \cdot 0,8 = 200$ sklenic. Ale vzhledem k tomu, že každý vyrobil o 16 % medu více než normálně, bylo vyrobeno 116 % sklenic z 200, což je 232.

Nyní už stačí vynásobit počet sklenic objemem 0,25 l a získáme celkové množství medu: $232 \cdot 0,25 = 58$ litrů.

Úloha 3B Hudebníci

Podívejme se na 3 odlišná postavení první místnosti:

→ Pokud umístíme jednu zkušebnu do rohu, druhou nemůžeme umístit na 3 sousední políčka ani na samotné pole, kde se nachází tato zkušebna. To odpovídá $64 - 4 = 60$ možnostem. Rohy jsou celkem čtyři, takže pokud umístíme jednu zkušebnu do rohu, celkem lze obě rozestavit $60 \cdot 4 = 240$ způsoby.

→ Další možností je umístit první místnost do postranních políček (kromě těch rohových). Těch je celkem 24. Způsobů, jak umístit druhou místnost, je 58, neboť tato políčka sousedí s pěti dalšími a ještě musíme odečíst políčko, na němž se nachází místnost. Celkem tedy $58 \cdot 24 = 1392$ způsobů.

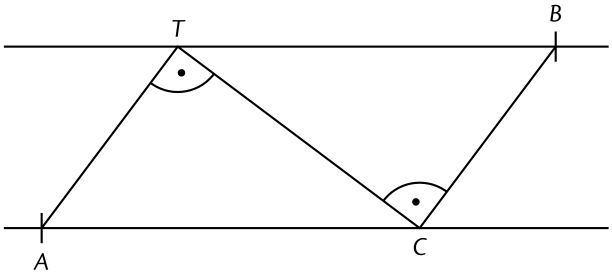
→ Poslední možností je umístit první zkušebnu do některého z prostředních polí (tedy tam, kam jsme ještě neumisťovali). Těch je celkem $64 - (4 + 24) = 36$. Tato pole sousedí s osmi dalšími, proto druhou místnost můžeme umístit na $64 - 8 - 1 = 55$ polí. Dohromady $55 \cdot 46 = 1980$ způsobů.

Nyní stačí jen jednotlivé možnosti sečíst a máme výsledek: $240 + 1980 + 1392 = 3612$.

(Pozn. Místnosti jsou rozlišitelné, takže není potřeba dělit dvěma. Zároveň je potřeba si uvědomit, že ani součet nenásobíme, neboť v možnostech jsou započteny oba symetrické případy, kdy se pozice Regininy i Zdeňkovy zkušebny jenom prohodí.)

Úloha 4B Cestování

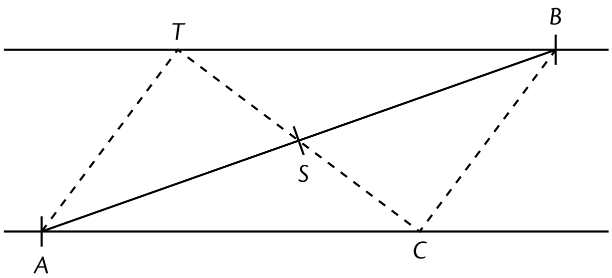
Představme si, že jsme už nějaký bod T požadovaných vlastností nalezli, a odvoďme nějaké jeho vlastnosti, podle kterých jej budeme moci skutečně sestrojit. Bod druhé změny směru (na jižním břehu řeky) označme C.



Obrázek 5: Hledaná cesta

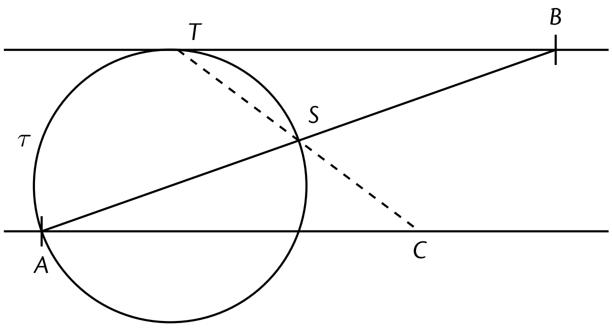
Dle zadaných pravidel Tháletova cestování musí být oba úhly $\sphericalangle ATC$, $\sphericalangle TCB$ pravé. Jedná se tedy o dvojici střídavých úhlů – jsou stejně velké – takže musí přímky AT a CB být rovnoběžné. Rovnoběžnost břehů řeky, neboli přímek AC a TB, je dokonce zadaná, takže $ACBT$ musí být rovnoběžník.

Označme průsečík úhlopříček tohoto rovnoběžníku S. Je známo, že v rovnoběžníku se úhlopříčky navzájem dělí na poloviny, takže S je středem úsečky AB. Z toho plyne, že jej umíme sestrojit, aniž bychom znali body T, C – sestrojíme dva oblouky o stejném poloměru se středy v A a B tak, aby se protly ve dvou bodech, a tyto body spojíme, načež S bude průsečíkem této spojnice s AB.



Obrázek 6: Průsečík úhlopříček

Máme tedy bod S – jak jej ale využít? S musí ležet na úsečce TC, takže i úhel $\sphericalangle ATS$ je stejně jako $\sphericalangle ATC$ pravý. Zadání nám říká, že k tomu, aby toto bylo splněno, stačí, aby bod T ležel na kružnici τ takové, že AS je jejím průměrem. Takovou kružnici ale dokážeme snadno sestrojit – prostě najdeme střed úsečky AS (to umíme) a sestrojíme z něj kružnici s poloměrem rovným polovině délky úsečky AS. Bod T už pak snadno nalezneme jako nějaký průsečík (podle polohy bodu B mohou existovat až dva) kružnice τ se severním břehem. Kdybychom posléze chtěli zkonstruovat i bod C, stačí vzít průsečík přímky TS s jižním břehem.



Obrázek 7: Konstrukce bodu T

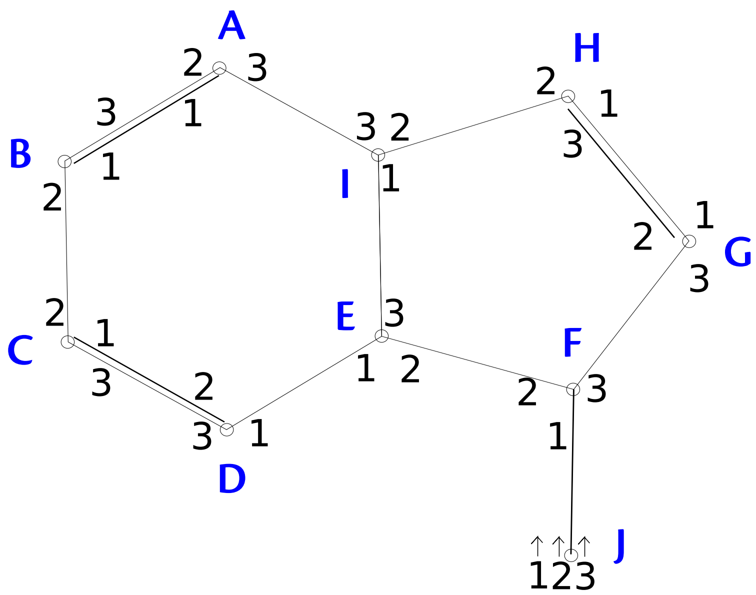
Nutno podotknout, že takový průsečík T nemusí vůbec existovat, to když budou body A a B příliš blízko u sebe. To potom značí, že Tháletova cesta není s dvěma změnami směru proveditelná.

Shrňme tedy:

1. Sestrojíme bod S jako střed úsečky AB.
2. Nakreslíme kružnici τ nad průměrem AS.
3. Průsečík τ se severním břehem označíme T (pokud nějaký existuje).

Úloha 5B Elektronová

Abychom se mohli přehledně vyjadřovat, označme nejprve atomy purinu písmeny A až J (mějme ale na paměti, že J nepotřebujeme projít).



Obrázek 8: Purin

Ukážeme, že zadání vyhoví sekvence opakující dokola čísla 1, 2, 3. Snadno vidíme, že začíná-li elektron v A, D nebo G, bude tato posloupnost fungovat okamžitě – elektron postupně obejde bez opakování místnosti A až I (ne nutně v tomto pořadí) a vrátí se tam, kde započal. Takováto okružní cesta vypadá následovně:

$$\ldots A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} D \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} F \xrightarrow{3} G \xrightarrow{1} H \xrightarrow{2} I \xrightarrow{3} A \ldots$$

Teď stačí ukázat, že začne-li atom v jiné místnosti, pak se na tuto okružní cestu napojí, tj. vydá se v některé místnosti stejnou chodbou, jako v předešlém výčtu. Ověřme to postupně:

B $\xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{1} \ldots$
C $\xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} \ldots$
E $\xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} \ldots$
F $\xrightarrow{1} J \xrightarrow{2} F \xrightarrow{3} \ldots$
H $\xrightarrow{1} G \xrightarrow{2} H \xrightarrow{3} G \xrightarrow{1} \ldots$
I $\xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} \ldots$
J $\xrightarrow{1} F \xrightarrow{2} E \xrightarrow{3} I \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} \ldots$

Elektronu tedy vskutku stačí opakovat čísla 1,2,3. Zároveň vidíme, že k napojení do okružní cesty stačí v nejhorším případě (začne-li v J) projít čtyři chodby. K projití cesty (počínaje z libovolného bodu) pak stačí projít osm chodeb (devátou se elektronek již vrací do počátečního atomu), dohromady se tak v nejhorším případě jedná o projití dvanácti chodeb. Elektronku tak určitě vystačí posloupnost

1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3.