Kategorie mladší

Úloha 1A Rosťův korálkový problém

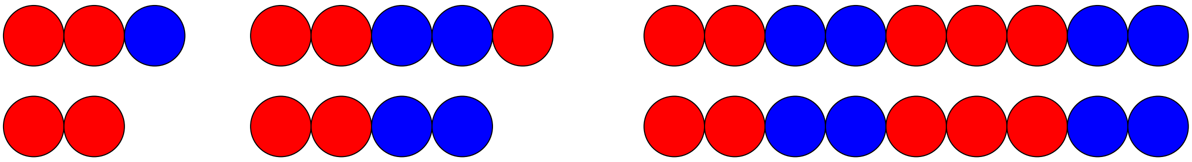
Na první tah moc možností nemáme. Pokud bychom začali prvním nebo druhým případem, hned by nám pořadí barev v druhé řadě nesedělo, tudíž začneme třetí možností (viz obrázek 1a).

Teď, abychom měli obě řady stejné, musíme zahrát takový tah, aby počítač přidal jako první modrý korálek. To udělá jen u druhého případu a korálky nyní budou vypadat jako na obrázku 1b.

Teď máme ovšem dvě možnosti, protože počítač musí zahrát jako první červenou. Buď tedy zahrajeme tah 1, nebo tah 3. Pokud ovšem zahrajeme tah 1, v dalších dvou kolech už nebudeme schopní hrát tak, abychom vyhráli. (Nejprve bychom museli zahrát tak, abychom jako první přidali modrý korálek. To můžeme v případě 1 a 2. V případě 2 bychom ale hned prohráli a v případě 1 bychom neměli co zahrát v následujícím kole.) Musíme tedy zahrát jako v případě 3.

Nyní už je vidět, že pokud zahrajeme jako v případě jedna, vyhrajeme. Výsledný řetízek bude vypadat jako na obrázku 1c.

Naše tahy tedy byly 3, 2, 3, 1.



(a) (b) (c)

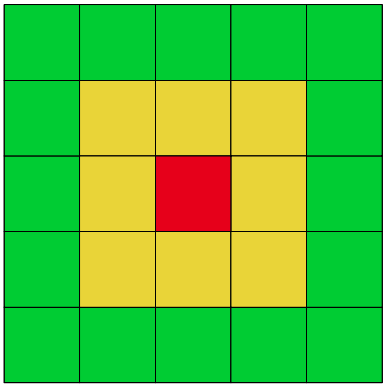
Obrázek 1: Tahy Rosti a počítače

Úloha 2A Šifra štíra Štefana

Tuto úlohu můžeme řešit buď výpočtem, nebo graficky.

Štefan si nejdříve musí uvědomit, kam se která políčka při otáčení přesouvají. Políčka se budou posouvat jakoby po kružnici se středem uprostřed tabulky. Má tedy tři vrstvy. Naše řešení:

1. *Výpočet*
   Tabulku otočíme celkem čtyřikrát, lze si tedy dopočítat kolik políček budeme muset v každé vrstvě vystřihnout. V první, vnější vrstvě máme 16 políček (značena zeleně), tabulka se otočí čtyřikrát, tudíž počet vystřižených políček v této vrstvě bude $16 \div 4 = 4$ políčka. Pro střední vrstvu jsou to políčka dvě a pro poslední jedno políčko (stačila by čtvrtina, ale Štefan vystřihuje políčka celá). Potřebujeme tedy vystřihnout $4 + 2 + 1 = 7$ políček celkem.
2. *Graficky*
   Začněme od středu. Pokud tabulku otočíme o devadesát stupňů tak se nám červené políčko uprostřed, označené číslem 7, nepohne, a tudíž ho, aby bylo na konci vybarvené, musíme vystřihnout. Pokračujme dále na žlutou vrstvu. Pokud vystřihneme políčko označené číslem 5, budou po posledním otočení vybarvená všechna čtyři políčka tvořící středy stran žlutého čtverce. Pořád nám ale zbydou rohy. Naštěstí ale stačí vystřihnout jenom jeden z rohů, označený číslem 6, a máme celou žlutou vrstvu hotovou. Můžeme tedy pokračovat na vrstvu zelenou. Zase začneme vystřižením středu strany (číslo 2). Tím budeme mít vybarvené všechny středy stran zeleného čtverce. Vystřihneme-li i jeden roh (číslo 4), vybarvíme i rohy. Nyní ale musíme vystřihnout ještě dvě políčka, každé na jedné straně od středového (čísla 1 a 3). Tím máme po otáčení vybarvená veškerá políčka a vystřihli jsme jich jen 7.



(a) Jednotlivé vrstvy

4	1	2	3	4
3	6	5	6	1
2	5	7	5	2
1	6	5	6	3
4	3	2	1	4

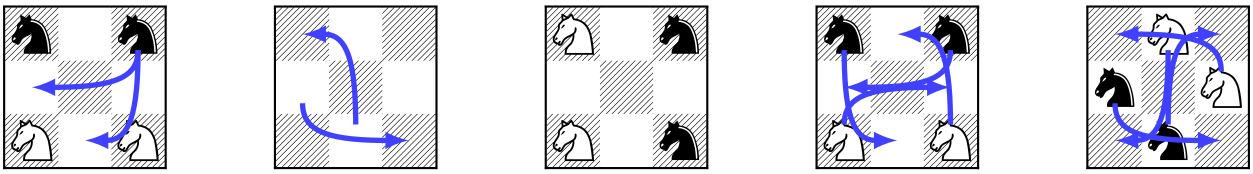
(b) Konečné řešení

Obrázek 2

Úloha 3A Šachová akrobacie

Není divu, že z triku, který jezdci předvádějí, je celé království u vytržení. Vždyť šachovnice je tak maličká, že pokud se jezdci nechtějí pošlapat, téměř nemají kam skočit! Konkrétně z výchozího postavení může každý jezdec skočit jen na dvě různá políčka (viz obrázek 3a, kde jsou tyto dvě možnosti ukázány pro černého jezdce v pravém horním rohu). V dalším skoku se pak z těchto dvou políček může jezdec přesunout buď na políčko, kde původně stál (což by jistě bylo divácky efektní, z hlediska dosažení cíle ovšem zcela neefektivní), anebo na jedno jiné rohové políčko (samozřejmě za předpokladu, že toto políčko bude volné; viz obrázek 3b). Všimni si, že ať už se náš černý jezdec rozhodl v prvním skoku jakkoliv, svým druhým skokem se přesune na rohové políčko, které se nachází na stejné straně šachovnice, jako jeho původní stanoviště (jinými slovy, jezdec se nepřesune do rohového políčka napříč). To nás vede k myšlence, že bychom mohli jezdce nejprve „pootočit" o 90 stupňů (viz obrázek 3c), a potom celou proceduru zopakovat, čímž dosáhneme kýženého výsledku.

Není už těžké si rozmyslet, jak takové pootočení provést. Každý jezdec nejprve skočí na jedno políčko nacházející se uprostřed stran (každý pochopitelně na jiné, např. podle obrázku 3d). Tím se uvolní všechna rohová políčka a jezdci se mohou výše popsaným způsobem přesunout na jiné rohové políčko, než obývali předtím (viz obrázek 3e). Nyní stačí celou proceduru zopakovat ještě jednou a užít si bouřlivý potlesk nadšeného publika.



(a) (b) (c) (d) (e)

Obrázek 3

Úloha 4A Zlatá rybka

Když si aktuální den v týdnu označíme jako n, můžeme si součin dnů, jež jsou od sebe vzdáleny 7 dnů, zapsat jako $(n-7)\cdot n\cdot(n+7)$. Aby byl tento výraz dělitelný 6, musí být dělitelný zároveň 2 a 3. Proto si tuto dělitelnost otestujeme.

Začneme **dvojkou**:

Aby byl výraz dělitelný 2, musí být alespoň jeden ze součinitelů beze zbytku dělitelný 2.

Mohou nastat dva různé případy:

1. n je sudé:
   (a) Sudé n je dělitelné 2, v tomto případě jsme tedy hotovi.
2. n je liché:
   (a) Zapíšeme si jej jako $2k+1$ (kde k je výsledek celočíselného dělení čísla n číslem 2).
   (b) Dosadíme do výrazu a získáme $(2k-6)\cdot(2k+1)\cdot(2k+8)$.
   (c) Aby byl výraz dělitelný 2, musí být alespoň jeden součinitel dělitelný beze zbytku 2, což zde splňuje $(2k-6)$ a $(2k+8)$.

A co dělitelnost **třemi**?

Podobně jako v předchozím případě je výraz dělitelný 3 právě tehdy, když alespoň jeden ze součinitelů je dělitelný třemi.

Nyní mohou nastat 3 rozdílné případy:

1. n je dělitelné třemi:
   (a) Pokud je n dělitené třemi, celý výraz je také dělitelný třemi a jsme hotovi.
2. n dává po dělení 3 zbytek 1:
   (a) Zapíšeme si n jako $3k + 1$.
   (b) Dosadíme: $(3k - 6) \cdot (3k + 1) \cdot (3k + 8)$.
   (c) Člen $(3k - 6)$ je dělitelný třemi.
3. n dává po dělení 3 zbytek 2:
   (a) Zapíšeme jako $3k + 2$.
   (b) Dosadíme: $(3k - 5) \cdot (3k + 2) \cdot (3k + 9)$.
   (c) Člen $(3k - 9)$ je dělitelný třemi.

Ať už je tedy datum jakékoliv, vždy platí, že když přečteme z rybčího kalendáře číslo dne nad ním a číslo dne pod ním (datum před týdnem a za týden), bude alespoň jedno z těchto tří čísel dělitelné 2 a alespoň jedno z nich dělitelné 3. Jejich součin tedy bude vždy dělitelný 6, což Klaudii jistě udělá velkou radost.

Úloha 5A Domeček pro mouchu

Nejdříve je nutné si spočítat, jaký objem domeček vlastně má. Rozdělíme si ho na jednotlivá patra, aby se nám lépe počítalo.

Víme, že první patro má půdorys tvaru čtverce o hraně 5 dm. Takže můžeme lehce pomocí vzorečku $S = a \cdot a$ dopočítat jeho obsah. Ten je $25\,\mathrm{dm}^2$. Objem dopočítáme tak, že obsah vynásobíme třetím rozměrem naší krychle, což je 1 dm. Objem prvního patra tedy činí $25\,\mathrm{dm}^3$.

Takto budeme pokračovat i u zbylých pater. Druhé má objem $9\,\mathrm{dm}^3$ a třetí $1\,\mathrm{dm}^3$. Dohromady má domeček objem $35\,\mathrm{dm}^3$.

Jestliže máme 5 much a každá moucha spotřebuje $0{,}5\,\mathrm{dm}^3$ vzduchu za den, tak všechny mouchy spotřebují za jeden den dohromady $2{,}5\,\mathrm{dm}^3$ vzduchu.

Pokud tedy má domeček objem $35\,\mathrm{dm}^3$ vzduchu, vydrží v něm mouchy bez větrání $35 \div 2{,}5 = 14$ dní.

Objem domečku bychom mohli určit také tak, že spočítáme, z kolika krychlí je tvořený. Je to 25 krychlí v prvním patře, 9 ve druhém a 1 ve třetím, dohromady tedy 35. Zadání praví, že objem jedné krychle je $1\,\mathrm{dm}^3$, takže objem domečku je $35 \cdot 1\,\mathrm{dm}^3 = 35\,\mathrm{dm}^3$.

Kategorie starší

Úloha 1B Vynuluj tabulku!

Zamysleme se nejprve spolu se Sašou, jakým způsobem je možné nějaké políčko vynulovat. Provedením první operace (tedy vynásobením dvěma) se nám to povede jenom v případě, že už v tomto políčku číslo 0 bylo předtím. Tato operace nám tedy nepomůže, a my víme, že políčka budeme nulovat pomocí druhé operace, tedy odčítání jedničky. To zároveň znamená, že se potřebujeme dostat do situace, kdy máme ve všech políčkách daného sloupečku stejná čísla – potom už můžeme jenom provést příslušný počet odečtení 1 a budeme mít celý sloupeček vynulovaný. Jakmile se to stane, budeme, co se tohoto konkrétního sloupečku týče, za vodou: násobení 2, které provádíme v řádcích, nám nulu nezkazí, a odčítat od vynulovaného sloupečku 1 nemá žádný význam, a proto to taky nebudeme dělat.

Zároveň si všimneme, že v tabulce rozhodně nechceme dostat záporná čísla – vynásobením záporného čísla 2 dostaneme opět číslo záporné, odečtením 1 rovněž, což znamená, že jakmile se nám jednou v tabulce objeví záporné číslo, nemá už cenu pokračovat, řešení neexistuje.

Podívejme se nyní na naši konkrétní tabulku. Na první pohled je vidět, že vynásobíme-li první a třetí řádek 2, budou všechna políčka v prvním a třetím sloupečku vyplněná číslem 2 (viz obrázek 4a). Nyní můžeme od těchto dvou sloupečků dvakrát odečíst jedničku, a hurá, máme hned dva sloupečky vynulované (viz obrázek 4b). Co nyní provedeme s prostředním sloupečkem? Násobení dvěma nám nepomůže, protože číslo 4 není násobek 3, zatímco číslo 3 je, a ať už je tedy vynásobíme libovolným počtem dvojek, na stejné číslo se nikdy nedostaneme (zkrátka proto, že jedno bude určitě dělitelné 3, zatímco to druhé určitě ne). Nezbývá tedy než odečíst jedničku. Tím se dostaneme do podobné situace (v prostředním sloupečku máme čísla 2 a 3), takže odečteme jedničku ještě jednou (viz obrázek 4c). Nyní už je řešení nasnadě. Prostřední řádek vynásobíme dvěma, ve všech políčkách prostředního sloupečku tedy máme číslo 2, dvakrát odečteme jedničku, a jsme hotovi.

2	4	2
2	3	2
2	4	2

(a)

0	4	0
0	3	0
0	4	0

(b)

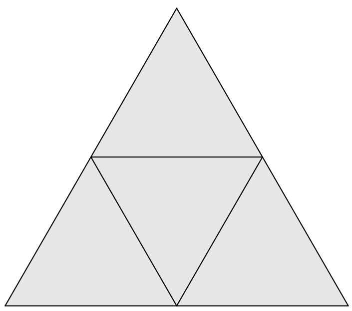
0	2	0
0	1	0
0	2	0

(c)

Obrázek 4

Úloha 2B Střelba

Terč si můžeme středními příčkami rozdělit na čtyři stejné rovnostranné trojúhelníčky, jež mají stranu dlouhou 5 cm (viz obrázek **??**. Pro každý z těchto trojúhelníčků platí, že vzdálenost každých dvou bodů v něm je nejvýše 5 cm. A jelikož Tonda střílel pětkrát a my máme jenom čtyři trojúhelníčky, určitě alespoň dvě střely musí být v jednom trojúhelníčku, a tudíž nemohou být od sebe dále než 5 cm.



Obrázek 5: Terč rozdělený středními příčkami

Úloha 3B Stříkačky 2

Z minulého kola víme, že objem válcového soudku či stříkačky můžeme vypočítat vzorcem $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Známe výšku h, chybí nám však hodnota poloměru r. Filip naštěstí změřil obvod a z něho můžeme chybějící délku dopočítat. Pro obvod totiž platí vzorec $o = 2 \cdot \pi \cdot r$ a z něj můžeme poloměr vyjádřit jako $r = \frac{o}{2 \cdot \pi}$. Ten můžeme dosadit do vzorce pro výpočet objemu a ten následně upravit.

$$V = \pi \cdot \left(\frac{o}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{o^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot h = \frac{o^2 \cdot h}{4 \cdot \pi}$$

A teď už můžeme postupovat stejně jako v minulém kole. Objem soudku vydělíme objemem stříkačky, čímž zjistíme, kolik stříkaček by bylo potřeba na naplnění sudu.

$$\frac{V_{sud}}{V_s} = \frac{\frac{90^2 \cdot 12}{4 \cdot \pi}}{\frac{3^2 \cdot 8}{4 \cdot \pi}} = \frac{90^2 \cdot 12}{3^2 \cdot 8} = 1350$$

Toto číslo podělíme počtem stříkaček $1350 : 25 = 54$, a získáme výsledek. Felix a jeho sourozenci tedy budou muset ke studni 54krát.

Úloha se dá řešit také tak, že nejdříve vypočítáme poloměry a objemy a výsledná čísla podělíme. Výše uvedené řešení je však přesnější, protože u něj nic nezaokrouhlujeme.

Úloha 4B Nekonečná tancovačka

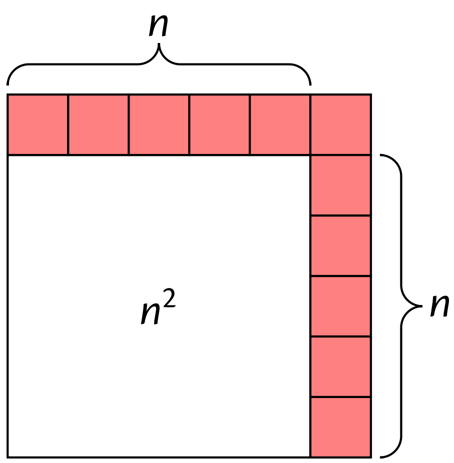
Desky, z nichž jsou parkety složeny, jsou všechny identické, takže nám půjde jenom o jejich počty. Čtverec (parket), jenž má délku strany a desek, musí být složen z a^2 desek – zvířátka tedy začala s parketem o n^2 deskách, přidala k němu x^2 desek (x musí být přirozené číslo) z nějakého jiného parketu (čtverce) a dostala parket s $(n+1)^2$ deskami. To můžeme vyjádřit rovnicí:

$$n^2 + x^2 = (n+1)^2$$

Závorku na pravé straně můžeme roznásobit dle $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, čímž dostaneme:

$$n^2 + x^2 = n^2 + 2n + 1$$

Namísto roznásobení bychom si taky mohli pomoci představou, že ke čtverci o straně n desek přidáme n desek podél jedné strany, dalších n podél druhé a jednu desku do rohu (dohromady tedy $2n + 1$ desek), čímž dostaneme čtverec o straně $n + 1$ (viz obrázek 6).



Obrázek 6: Znázornění $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ pro $n = 5$

Tak či onak nyní můžeme člen n^2 z obou stran odečíst, čímž dostaneme:

$$x^2 = 2n + 1$$

Odtud se nabízí několik (více či méně náročných) způsobů jak pokračovat:

1. *Rozklad*
   Na pravé straně osamostatníme n:
   $$x^2 - 1 = 2n$$
   Výraz na levé straně nyní rozložíme na součin dle $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$:
   $$(x+1)\cdot(x-1) = 2n$$
   Teď uvažujme: na pravé straně je sudé číslo (pracujeme pořád s přirozenými čísly, takže $2n$ je určitě dělitelné dvěma), tudíž musí i na levé straně být sudé číslo (poněvadž se mají rovnat). Nyní si uvědomme, že $x+1$ je sudé tehdy a pouze tehdy, pokud je sudé $x-1$ (protože se liší o $(x+1)-(x-1)=2$, tedy sudé číslo). V matematice se pro „sudost nebo lichost“ používá termín *parita* (zde bychom tedy mohli prostě říci, že $x+1$ a $x-1$ mají stejnou paritu). Z toho ale plyne, že obě čísla $x+1$, $x-1$ nemohou být lichá (pak by na levé straně bylo liché číslo), pročež musí být obě sudá. Když tedy vyjádříme
   $$n = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{2} = \frac{x+1}{2}\cdot(x-1),$$
   plyne z toho, že n je součin sudého čísla $x-1$ a nějakého celého čísla $\frac{x+1}{2}$ (každé sudé číslo je dělitelné dvěma). Potom už ale musí n být samo sudé, čímž je úloha vyřešena.
2. *Dosazení*
   Na pravé straně máme liché číslo, pročež je i výraz na levé straně (x^2) lichý. Potom i x musí být liché (kdyby bylo sudé, tak by x^2 byl násobek sudého čísla a tedy sudé číslo). Potom tedy ale určitě existuje nějaké přirozené číslo y, které splňuje $x = 2y - 1$ (v matematice se takovému nahrazení jedné neznámé či proměnné jinou říká *substituce*). To, že takové y existuje, zjistíme jednoduše vyjádřením $y = \frac{x+1}{2}$, což je díky lichosti x jistě celé a tedy i přirozené číslo. Když ale $x = 2y - 1$ dosadíme do předchozí rovnosti, dostaneme:
   $$(2y-1)^2 - 1 = 2n$$
   Když teď na levé straně roznásobíme závorku dle $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, máme:
   $$\begin{aligned}(2y)^2 - 2\cdot 2y\cdot 1 + 1 - 1 &= 2n\\ 2^2\cdot y^2 - 4y &= 2n\\ 4y^2 - 4y &= 2n\end{aligned}$$
   Když nyní vydělíme obě strany dvěma, máme:
   $$n = 2y^2 - 2y = 2y\cdot(y-1)$$
   n je tedy dvojnásobek nějakého celočíselného výrazu, pročež je sudé a jsme hotovi. Za povšimnutí stojí, že jsme vlastně dokázali něco ještě lepšího – jedno z čísel y a $y-1$ je určitě sudé, takže n musí být dokonce násobek čtyř. Tohle jsme mohli zřít i v předchozím důkazu rozkladem, ale zde je to vidět mnohem lépe.
3. *Kvadratické zbytky*
   Pokud Ti předchozí dvě slova vůbec nic neříkají, neděs se. V latinském slovníku bychom se mohli dočíst, že *quadratus* znamená „čtverec“ – když tedy v matematice označíme něco za kvadratické, míníme tím, že to nějak souvisí se čtverci, potažmo s druhými mocninami (možná víš, že existuje kvadratická rovnice, kvadratická funkce atp.). Kvadratickými zbytky tedy myslíme ty zbytky, které mohou po dělení nějakým číslem dát druhé mocniny celých čísel. Kupříkladu, zajímají-li nás kvadratické zbytky po dělení čtyřkou, zjistíme si, že to jsou:
   $$\begin{aligned}0^2 &= 0 \rightarrow \text{zb.: } \mathbf{0}\\ 1^2 &= 1 \rightarrow \text{zb.: } \mathbf{1}\\ 2^2 &= 4 \rightarrow \text{zb.: } \mathbf{0}\\ 3^2 &= 9 \rightarrow \text{zb.: } \mathbf{1}\end{aligned}$$
   Druhé mocniny dalších čísel už teď nemusíme kontrolovat, protože když dvě čísla dávají stejný zbytek, tak dávají stejný zbytek i jejich druhé mocniny. Kvadratické zbytky se nám hodí, kdykoliv řešíme rovnici s celými čísly a vystupují v ní druhé mocniny – obzvláště když chceme dokázat, že něco není možné: jsme-li kupříkladu z nějaké rovnice schopni ukázat, že nějaká druhá mocnina dává nějaký chybný („zakázaný“) zbytek – po dělení čtyřmi třeba 2 – tak už si můžeme být jisti, že tato rovnice vyřešit nepůjde. Konkrétně kvadratické zbytky po dělení čtyřkou lze využít i zde: dejme tomu, že n je liché a naše rovnice
   $$x^2 = 2n + 1$$

je pro nějaké x splněna. Jelikož n je liché, tak určitě existuje nějaké celé číslo y, které splňuje $n = 2y + 1$ (takové y získáme jednoduše jako $y = \frac{n-1}{2}$, což je díky lichosti n určitě celé číslo). Když tohle dosadíme, dostaneme:

$$x^2 = 2 \cdot (2y + 1) + 1 = 4y + 2 + 1 = 4y + 3$$

Z toho ale plyne, že x^2 dává po dělení čtyřmi zbytek 3. Trojka ale přitom není kvadratický zbytek po dělení čtyřmi, takže naše rovnice určitě nemá řešení, v němž by n bylo liché. (Pro pořádek, když totéž provedeme se sudým n, dostaneme, že x^2 dává zbytek 1 – to je v naprostém pořádku a jenom nám to říká, že x musí být liché, což jsme už odvodili i v důkazu dosazením.)

Úloha 5B Vážení

Nechť je m hmotnost bonbónů, které Karla vlastní, v kilogramech. Ukážeme, že určitě platí $m \leq 3$. Představme si nějaké rozdělení bonbónů na dvě hromádky o hmotnostech (v kilogramech) x a y, přičemž musí platit $x + y = m$. Aby byly splněny podmínky zadání, musí alespoň jedno z čísel x, y být nejvýše 1 (jinak by obě hromádky byly těžší než jeden kilogram) – nechť je to y (žádná z hromádek není ničím zvláštnější než ta druhá, pročež bychom jejich označení mohli klidně prohodit). Pokud $x \leq 2$, potom platí

$$m = x + y \leq 2 + 1 = 3,$$

což přesně chceme. Pokud platí $x > 2$, představme si, že budeme bonbóny z těžší hromádky (o hmotnosti x) jeden po druhém v libovolném pořadí odebírat a přesouvat do lehčí hromádky. Potom bude hmotnost této hromádky, z níž odebíráme, v kilogramech dříve či později menší nebo rovna dvěma, ale stále větší než jedna – odebíráním bonbónů o hmotnosti nejvýše jeden kilogram nemůžeme interval $(1, 2\rangle$ „přeskočit“. V tomto stavu pak bude tato hromádka (její novou hmotnost označme x') stále tou těžší (jinak by obě hromádky musely mít hmotnost větší než jeden kilogram, což by odporovalo zadání) – lehčí hromádka tedy bude mít stále hmotnost (označme ji y') nejvýše jeden kilogram. Potom tedy ale bude platit

$$m = x' + y' \leq 2 + 1 = 3,$$

tedy přesně to, co jsme chtěli ukázat.

Teď už stačí ukázat, že $m = 3$ je skutečně možné. Této celkové hmotnosti lze docílit např. tehdy, bude-li Karla mít tři bonbóny každý o hmotnosti přesně jeden kilogram – pak v každém rozdělení na dvě hromádky bude jedna z nich obsahovat nejvýše jeden bonbón, a tedy mít hmotnost nejvýše jeden kilogram, čímž budou splněny podmínky zadání.