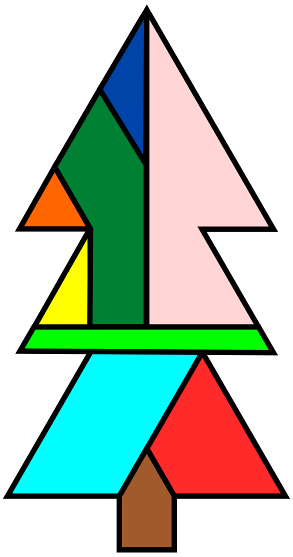
Kategorie mladší

Úloha 1A Krabička Klárka

Chudeře Klárce nelze poradit nic jiného, než ať dílky zkouší převracet, otáčet a skládat k sobě tak dlouho, než se jí povede postavit původní stromeček. Je při tom dobré začít od dílků, jejichž tvar hodně napovídá o jejich umístění (např. velký světle růžový), a k nim poté skládat dílky zbylé.

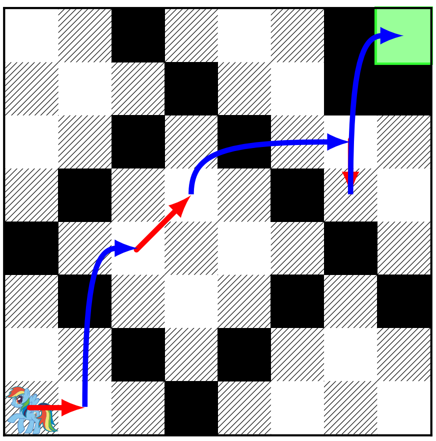
Výsledný stromeček by měl vypadat takto (samozřejmě může být zrcadlově převrácený):



Obrázek 1

Úloha 2A Kulhavý hyperkůň

Hyperkoni stačí k přejití šachovnice 6 skoků, jak je vidět na obrázku. Existuje víc cest stejné délky, ale žádná určitě nemůže být kratší: Počet skoků totiž musí být sudý kvůli jámám kolem cíle a 4 skoky nám nestačí.



Obrázek 2

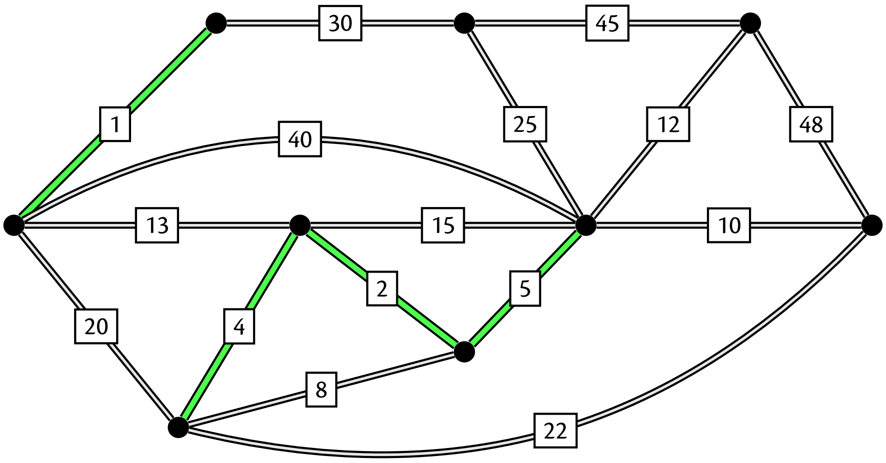
Úloha 3A Kalamita

Před tím, než začne s prohrnováním, by si Borůvka měla uvědomit několik poznatků, které jí její práci rozhodně ulehčí:

- **Je jedno, u kterého brlohu s prohrnováním začneme.** Propojit je prohrnutými cestičkami stejně musíme všechny a přesuny po již prohrnutých cestičkách nám zadání dovoluje zanedbat.

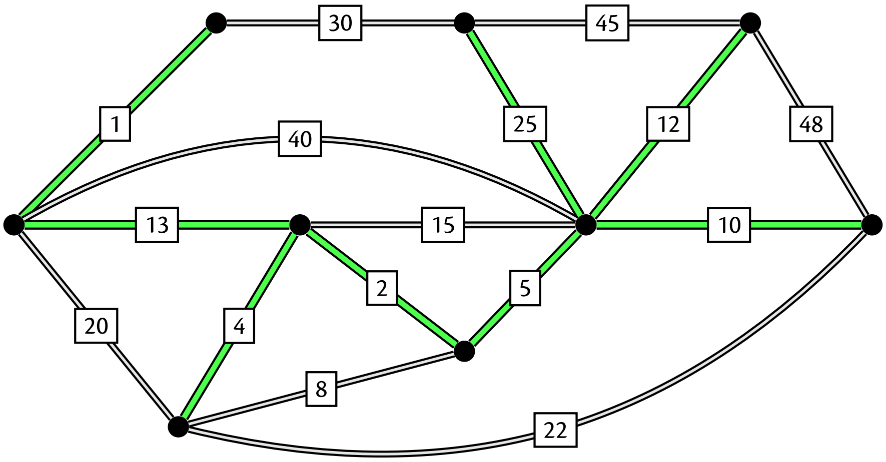
- **Nemá cenu vytvářet prohrnuté „kružnice".** Jinými slovy, pokud se z brlohu $\mathcal{A}$ už lze po prohrnutých cestičkách nějak dostat do brlohu $\mathcal{B}$, pak určitě nemá cenu prohrnovat i přímou cestu z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Medvědům žijícím v příslušných brlozích tím, pravda, zkrátíme cestu pro případ, že by se chtěli vzájemně navštívit, sobě tím ale práci jenom přidáme.
- **Vždy se nám vyplatí prohrnout nejkratší z dosud neprohrnutých cestiček,** s výjimkou těch, jejichž prohrnutí by vytvořilo „kružnici" (viz předchozí bod). Jinými slovy, nemá cenu chodit oklikou.

Jak tedy bude Borůvka postupovat? Na začátku najde nejkratší ze všech cestiček – je to cestička vlevo nahoře, jejíž prohrnutí jí bude trvat jednu minutu. Druhá nejkratší je cestička „délky" dvě minuty, následuje čtyřminutová a pětiminutová. Prohrnuté jsou nyní tyto cestičky:



Obrázek 3

Nejkratší neprohrnutá cestička má nyní délku 8, všimneme si ale, že jejím prohrnutím bychom vytvořili kružnici, a proto postoupíme k další v pořadí, 10. Dále přidáme 12 a 13, a to už nám zbývá připojit jenom poslední brloh, ten nahoře uprostřed. Z cestiček, které k němu vedou, tedy vybereme tu nejkratší, délky 25.



Obrázek 4

Borůvka tedy prohrnováním stráví celkem $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 12 + 13 + 25 = 72$ minut.

Pozn.: Stejně dobře by fungoval také postup, v němž by Borůvka s prohrnováním začala v libovolném vrcholu, a poté si vždy vybrala takovou cestičku, jejíž prohrnutí jí zabere co nejméně času a která propojuje nějaký již dostupný brloh s nějakým novým. Pokud bychom tedy začali např. v brlohu zcela vlevo, byl by postup následující: 1, 13, 2, 4, 5, 10, 12, 25. Výsledek bude stejný, jen se Borůvka asi méně nachodí ☺

Úloha 4A Ořechové hody

Než se Verča vydá na cestu, musí si vše důkladně propočítat. Nejprve zjistí, kolik gramů od každého druhu oříšků potřebuje donést. Béďa nechce žádné kešu oříšky a vlašáků chce dvakrát více než buráků. Jeho 30 gramů tak Verča rozpočítá na 3 díly, z nichž 2 budou vlašáky (těch chce Béďa tedy 20 gramů) a 1 díl buráky (10 gramů). To samé udělá u plcha, nicméně ten bude potřebovat dílů dokonce 6 (to aby se Verče dobře počítalo – dva z nich budou buráky, jeden vlašské oříšky a poslední tři kešu). Kešu tedy potřebuje 15 gramů, buráků 20 gramů a vlašáků 25 gramů. Pro sebe pak chce od každého druhu 10 gramů (tak dostane svoji hezky vyváženou, rovnoměrně rozdělenou směs). Celkem tedy Verča chce 25 gramů kešu, 30 gramů buráků a 35 gramů vlašáků.

Zbývá naplánovat, jak taková množství oříšků získá. Protože Verča najednou unese 5 gramů a oříšky jednoho druhu vždy tvoří polovinu tohoto množství, přinese si při každé výpravě 2,5 gramu jednoho druhu oříšků a 2,5 gramu druhého druhu. Pro 25 gramů kešu tak bude muset ujít 10 cest, pro 30 gramů buráků 12 cest a pro 35 gramů vlašáků 14 cest (protože ale zároveň přinese i jednu dávku oříšků jiného druhu, bude skutečný počet vykonaných výprav poloviční). Pokud si nyní označí počet výprav k houštinám jako H, k potoku jako P a k mýtině jako M, musí platit následující:

$$\begin{aligned} 10 &= M + H \\ 12 &= M + P \\ 14 &= P + H \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že veverka asi na takové počítání není moc zvyklá, ukážeme jí postup pro řešení takovýchto rovnic, který jí nedá takovou práci jako pokoušet se jen tak odhadnout výsledek.

Nejprve si z první rovnice vyjádříme hodnotu M jako $10 - H$. To samé uděláme ve třetí rovnici pro P, tedy $P = 14 - H$. Pro M a P jsme tak získali výrazy, které je mohou v druhé rovnici zastoupit – pokud to uděláme (tedy je dosadíme), získáme $12 = 10 - H + 14 - H$.

Když nyní na pravé straně sečteme čísla 10 a 14 a obě písmenka H, dostaneme $12 = 24 - 2 \cdot H$, a po převedení výrazu $2H$ nalevo a čísla 12 napravo získáme $2 \cdot H = 12$. Nyní už je jednoduché zjistit, že H bude 6. A toto H už teď jen dosadíme do předpisů, které máme pro M a P, tedy $M = 10 - H = 4$ a $P = 14 - H = 8$.

Veverka se tak musí vypravit čtyřikrát na mýtinu, šestkrát do houštin a osmkrát k potoku, čímž získá správné množství všech druhů oříšků a ona i její přátelé budou spokojení.

Úloha 5A Vojáci v želvě

Nejprve spočítáme počet vojáků v jednotlivých částech těla želvy.

Hlava: Ze zadání jsme zjistili, že hlava se skládá ze 4 řad. Jestliže v 1. a 4. řadě jsou 2 vojáci a v 2. a 3. má být o jednoho více, bude v hlavě celkem

$$2 + 3 + 3 + 2 = 10 \text{ vojáků.}$$

Trup: Zde máme 20 řad. V první a poslední řadě je 25 vojáků, v dalších řadách přibývají 3 vojáci, přičemž v prostřední části – v desáté a jedenácté řadě – je vojáků stejně. Trup je tedy osově souměrný, a tak stačí vypočítat pouze prvních 10 řad a následně vynásobit dvěma

$$(25 + 28 + 31 + 34 + 37 + 40 + 43 + 46 + 49 + 52) \cdot 2 = 770 \text{ vojáků.}$$

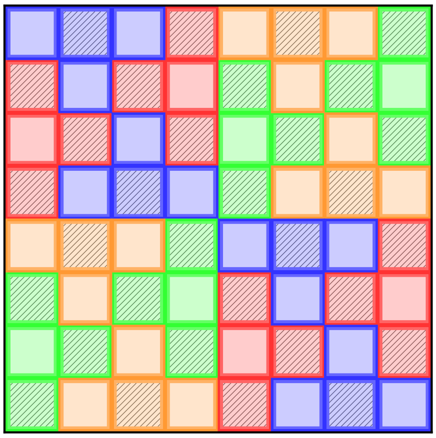
Končetiny a ocas: Zde jsou počty jednoduché, všechny končetiny a ocas tvoří 3 vojáci, takže celkem potřebujeme 15 vojáků.

Pro jednu formaci potřebujeme $10 + 770 + 15 + 1 = 796$ vojáků (včetně velitele). Celkem tedy $796 \cdot 3 = 2388$ vojáků.

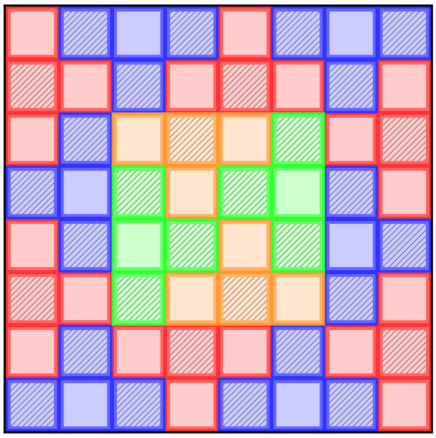
Kategorie starší

Úloha 1B Parníky

Parníky buď můžeme spojit vždy po čtyřech do jednoho kompaktního čtverce (viz obrázek 5), nebo je lze střídavě skládat k okraji komínem a základnou a doprostřed vložit jeden čtyřparníkový čtverec, popřípadě jakákoliv kombinace předešlých postupů, jejímž výsledkem je kompaktní čtverec 8×8.



(a)

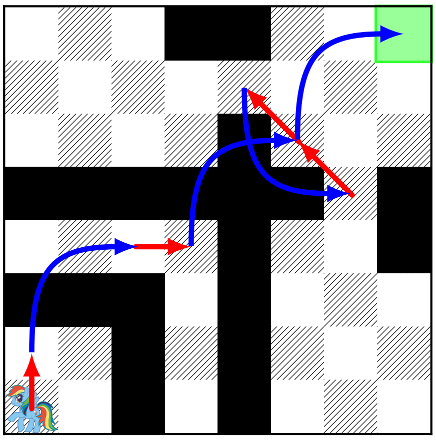


(b)

Obrázek 5

Úloha 2B Kulhavý hyperkůň

Jak je vidět na obrázku, nejkratší cesta má 8 skoků. Vzhledem k omezeným možnostem skoku hyperkoně jsou další cesty velmi podobné. Žádná z nich ale není kratší.



Obrázek 6

Úloha 3B Marticové počty 2

V případě, kdy se nás zadání úlohy ptá, zda existuje nějaký objekt mající dané vlastnosti (v našem případě zda existují dvě martice M, N takové, že $M \cdot N = N \cdot M$), máme pouze dvě možnosti: Buď nějaký takový objekt nalezneme, nebo dokážeme, že existovat nemůže. Ideální samozřejmě je zvolit tu možnost, která je pravdivá. ☺

Nyní již k samotné úloze: Zadání nám dává naprostou volnost v tom, jak budou martice M, N vypadat, dokonce ani neříká, že musí být různé – k vyřešení úlohy tedy vlastně stačí udělat malý podvod a říci, že výraz $M \cdot N = N \cdot M$ platí pro všechny martice M, N takové, že $M = N$. Podobný „podvod“ můžeme udělat i jiným způsobem: Pokud si pořádně přečteme zadání úlohy 4A z předchozího kola, zjistíme, že martice mohou být libovolně velké – mohou tedy klidně mít i rozměry 1×1! Taková martice o rozměrech 1×1 je vlastně dočista obyčejné číslo, a pro čísla je násobení samozřejmě komutativní. Stačí tedy za M, N zvolit libovolná dvě čísla (přirozená, celá, reálná). Mohli bychom také za M nebo N zvolit martici vyplněnou samými 0, ta nám po vynásobení s libovolnou jinou marticí vhodných rozměrů (v libovolném pořadí) opět dá nulovou martici. A ještě jeden „podvod“ – ti, kteří vyřešili úlohu 4A z předchozího kola nebo si přečetli vzorové řešení, už určitě vědí, že pro marticovou jedničku J platí $M \cdot J = J \cdot M = M$ pro každou martici M. Stačí tedy zvolit $N = J$ a M libovolně (obě martice samozřejmě musí mít vhodné rozměry), a rovnost $M \cdot N = N \cdot M$ bude opět platit.

Dost už bylo podvodů (i když k plnému bodovému zisku vedly také), zkusme najít nějaké „opravdové“ řešení. Pracovat budeme třeba s marticemi o rozměrech 2×2 – samozřejmě bychom si mohli zvolit i jiné (větší) rozměry, ale jenom bychom si tím přidělávali práci. Martice M je potom ve tvaru $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$, N ve tvaru $\begin{array}{c|c} e & f \\ \hline g & h \end{array}$. Čísla a, b, c, d, e, f, g, h neznáme. Musí platit:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} e & f \\ \hline g & h \end{array} = \begin{array}{c|c} e & f \\ \hline g & h \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}.$$

Když si oba součiny rozepíšeme podle definice marticového násobení a uvědomíme si, že výsledná martice je v obou případech stejná, získáme rovnice:

$$\begin{aligned} a \cdot e + b \cdot g &= a \cdot e + c \cdot f \\ a \cdot f + b \cdot h &= b \cdot e + d \cdot f \\ c \cdot e + d \cdot g &= a \cdot g + c \cdot h \\ c \cdot f + d \cdot h &= b \cdot g + d \cdot h \end{aligned}$$

První a čtvrtá rovnice nám vlastně říkají jenom to, že $c \cdot f = b \cdot g$, druhou a třetí můžeme upravit na:

$$\begin{aligned} a \cdot f - d \cdot f &= b \cdot e - b \cdot h \\ c \cdot e - c \cdot h &= a \cdot g - d \cdot g \end{aligned}$$

Z čehož po vytknutí f (resp. b, c a g) získáme:

$$\begin{aligned} f \cdot (a - d) &= b \cdot (e - h) \\ c \cdot (e - h) &= g \cdot (a - d) \end{aligned}$$

Obě výsledné rovnice můžeme sečíst a dostaneme:

$$(a - d) \cdot (f - g) = (e - h) \cdot (b - c)$$

S tím už toho moc nenaděláme, můžeme už ale zkusit najít nějaká čísla, která tuto rovnici a rovnici $c \cdot f = b \cdot g$ (tu jsme získali hned na začátku) splňují. Zkusme dosadit třeba $a = f = 2$ a $d = g = 1$:

$$\begin{gathered} 2 \cdot c = 1 \cdot b \\ (2 - 1) \cdot (2 - 1) = 1 = (e - h) \cdot (b - c) \end{gathered}$$

Nejjednodušším řešením první rovnice je $c = 1$, $b = 2$, zkusíme dosadit do druhé rovnice:

$$1 = (e - h) \cdot (2 - 1) = e - h$$

Zbývá nám tedy za e a h dosadit libovolná dvě čísla lišící se o jedničku. Kdybychom dosadili ověřené 1 a 2, tedy $e = 2$, $h = 1$, zjistili bychom, že obě martice M a N jsou nyní stejné, zvolíme tedy nějaká jiná čísla, třeba $e = 3$ a $h = 2$. Martice nyní vypadají následovně:

$$M = \begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}, \quad N = \begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}.$$

Ověříme ještě vynásobením, že skutečně platí $M \cdot N = N \cdot M$:

$$M \cdot N = \begin{array}{c|c} 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\ \hline 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \end{array} = \begin{array}{c|c} 8 & 8 \\ \hline 4 & 4 \end{array}$$

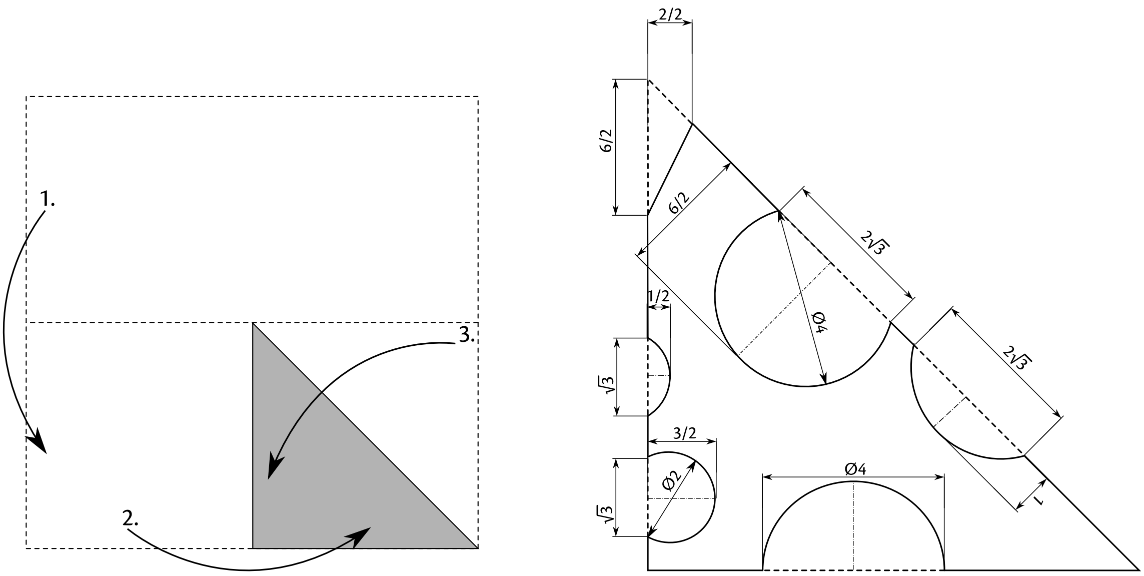
$$N \cdot M = \begin{array}{c|c} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ \hline 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{array} = \begin{array}{c|c} 8 & 8 \\ \hline 4 & 4 \end{array}$$

Ano, existují dvě martice M, N, pro které platí $M \cdot N = N \cdot M$, a je jich dokonce spousta.

Úloha 4B Vánoce z ementálu

Aby Hanka vypočítala hmotnost vloček, potřebuje nejprve znát jejich objem. Objem jedné vločky lze vypočítat jako součin „plochy“ vločky (tedy obsah děrovaného čtverce na obrázku v zadání; budeme ho pro jednoduchost nazývat *ementaloid*) a její tloušťky, kterou známe ze zadání. Stačí tedy určit plochu našeho ementaloidu a budeme téměř hotovi.

Plochu ementaloidu můžeme vypočítat různými způsoby, jedním z nejjednodušších ale je vzpomenout si na to, jakým způsobem o Vánocích vyrábíme z papíru vystřihované papírové vločky: Čtverec papíru přeložíme naznačeným způsobem (obr. 7a) na osminy, vystříháme požadovaný vzor a po rozložení nám vznikne krásná vločka. A její plocha? To je přece osmkrát plocha popřekládaného a vystříhaného papíru. Teď už si stačí jen všimnout, že Hančiny vločky mohly vzniknout přesně stejným způsobem – jedna osmina vzoru vypadá jako na obrázku 7b.



(a) (b)

Obrázek 7

Stačí tedy určit plochu trojúhelníku (bez děr) na obrázku a po vynásobení osmi budeme znát plochu celého ementaloidu.

Celková plocha trojúhelníku (před vystříháním, resp. vytvořením děr) je $\frac{a \cdot b}{2}$, v našem případě tedy $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50\,\mathrm{cm}^2$. Nyní potřebujeme určit obsah jednotlivých děr.

Začneme u trojúhelníku nahoře (u středu vločky). Jeho svislá strana měří 3 cm, výška na tuto stranu 1 cm (oba dva rozměry snadno vyčteme z obrázku v zadání), jeho obsah je tedy $\frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Nyní se podíváme na dvě kruhové úseče vpravo, u šikmé strany trojúhelníka. Není těžké si všimnout, že tyto dvě úseče dohromady tvoří celý kruh o poloměru 2 cm, jejich obsah tedy dohromady bude $\pi r^2 = \pi \cdot 2^2 \approx 12{,}6\,\mathrm{cm}^2$.

S kruhovými úsečemi u levé svislé strany trojúhelníka je to to samé v bledě modrém, jen poloměr výsledného kruhu je tentokrát 1 cm. Celkový obsah obou úsečí tak bude $\pi \cdot 1^2 \approx 3{,}1\,\mathrm{cm}^2$.

Zbývá nám už jen polovina kruhu u dolní strany trojúhelníka. Jeho poloměr je 2 cm, jeho obsah tedy bude $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \approx 6{,}3\,\mathrm{cm}^2$.

Zbývá všechny hodnoty odečíst od celkové plochy trojúhelníka:

$$50 - 1{,}5 - 12{,}6 - 3{,}1 - 6{,}3 = 26{,}5\,\mathrm{cm}^2$$

a výsledek vynásobit osmi:

$$26{,}5 \cdot 8 = 212\,\mathrm{cm}^2.$$

Celková plocha jednoho ementaloidu je tedy přibližně 212 cm^2.

Jaký bude celkový objem všech vloček? Pokud jich na sebe naskládáme 50, získáme „hranol" o výšce $50 \cdot 2\,\mathrm{mm} = 10\,\mathrm{cm}$ s podstavou ve tvaru ementaloidu. Plochu podstavy už jsme si vypočítali, celkový objem všech vloček je tedy $212 \cdot 10 = 2120\,\mathrm{cm}^3$.

Jeden cm^3 sýra váží 1 gram, takže myška by si v obchodě měla poručit přibližně 2120 g sýrových ozdob.

(Protože myšky mají ale, jak známo, sýr (stejně jako piškotky a jiné dobrůtky) moc rády, měla by si možná Hanka koupit ozdob raději o něco více, aby si je do Vánoc všechny nesnědla. ☺)

Úloha 5B Rovnoramenné váhy

Abychom odhalili bonbón bez náplně, zkusíme si všech 9 dodekahedronů rozdělit do stejných skupin. Poněvadž 9 rozložíme jako 3^2, rozdělíme si je na 3 skupiny po 3 bonbónech.

Vrhneme se tedy do vážení. Na jednu misku dáme jednu skupinu 3 bonbónů, na druhou další skupinu o stejném počtu bonbónů. V tomto momentu mohou nastat 2 situace:

1. Ramena váhy jsou v rovnováze

   Váha může být v rovnováze pouze v případě, že mezi bonbóny se neobjevuje bonbón bez náplně. Proto bonbóny na váze můžeme vrátit zpátky do krabičky a následně si otestujeme na misky jeden a jeden bonbón ze zbylé trojice, mezi kterými je určitě jeden „parazit". Opět mohou nastat dvě situace.

   (a) Ramena váhy jsou v rovnováze
   Vybrali jsme si dvojici, ve které není bonbón bez náplně. Bonbón, který jsme nevážili, neobsahuje náplň.
   (b) Ramena váhy jsou vychýlená
   V tomto případě je bonbón bez náplně ten lehčí.

2. Ramena váhy jsou vychýlená

   V tomto případě vezmeme trojici, která je lehčí a provedeme na ní stejný postup, jako v prvním bodě.

   (a) Ramena váhy jsou v rovnováze
   Vybrali jsme si dvojici, ve které není bonbón bez náplně. Bonbón, který jsme nevážili, neobsahuje náplň.
   (b) Ramena váhy jsou vychýlená
   V tomto případě je bonbón bez náplně ten lehčí.

Závěr tedy zní, že na odhalení vadného bonbónu nám stačí 2 vážení.