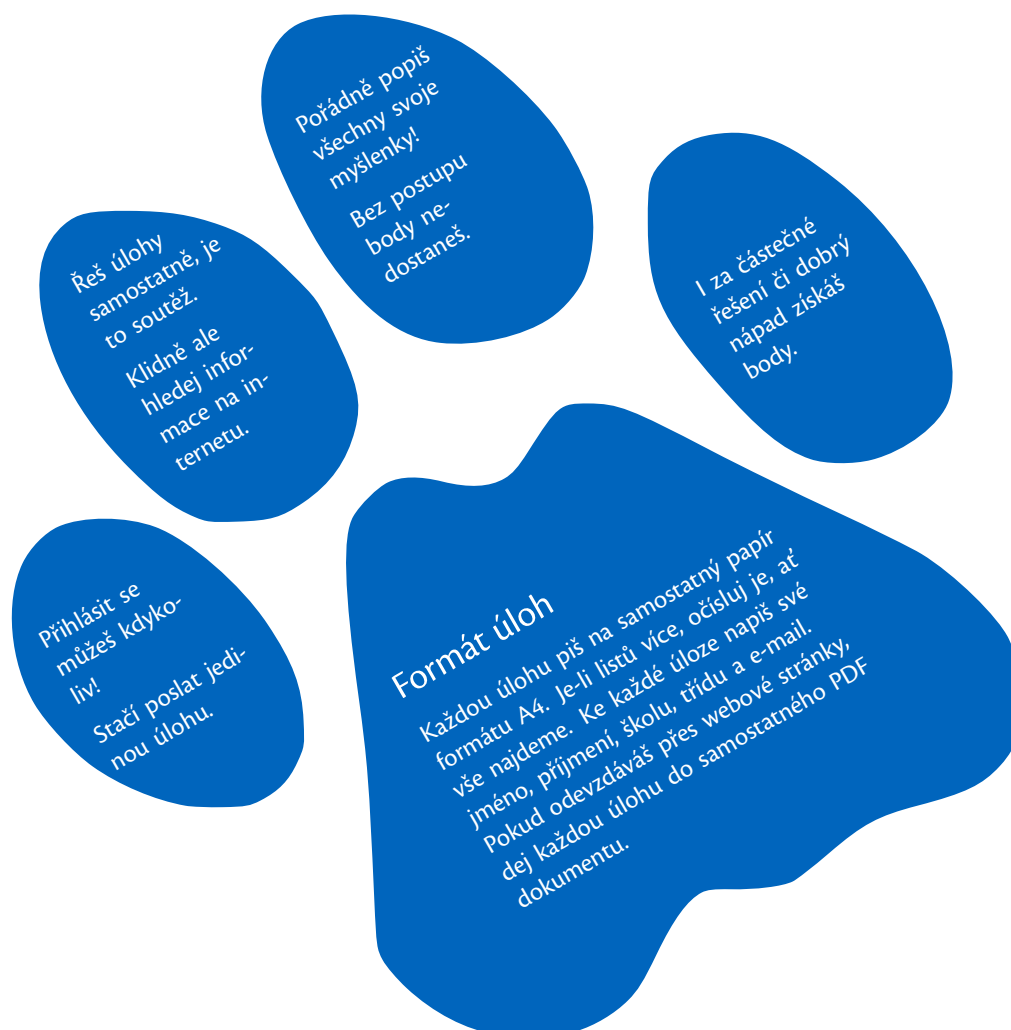


Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již čtrnáctým rokem Českým vysokým učením technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět základních úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama1vova.cz> a dále na Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **23. ledna 2023** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová
Rektorát ČVUT
Jugoslávských partyzánů 3
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přeji

Alenka, Bětko, Honza, Káťa, Kobi, Láďa, Lenka, Lída, Linda, Mája, Martin, Matěj, Rézi, Verča, Zuza a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Daňová

(5 bodů)

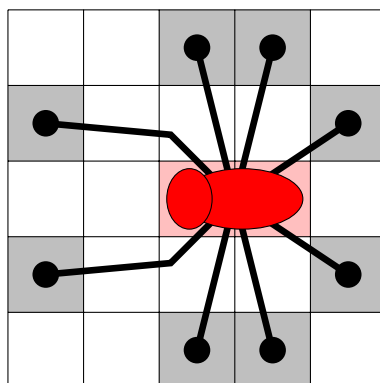
Vydra Věra si konečně našla práci, která ji bude bavit! Vymyslela, že u řeky nakoupí dřevo od firmy Bobr a Bobr za 1000 JC a k tomu firmě zaplatí i částku za tzv. Lví daň, kterou Bobr a Bobr musí uhradit (Lví daň činí 20 % ze zaplacené ceny – plátce daně ji vždy na konci roku musí uhradit králi Lvovi a musí proto počítat, že tato část utržených peněz vlastně není jeho). Dřevo následně vydra splaví k moři a tam jej prodá staviteli lodí mistru Mrožovi za 2000 JC. S Bobrem a Bobrem domluvila vše hladce a podle svého plánu, ale mistr Mrož ji upozornil na nepovolené jednání, kterého by se dopustila, pokud by nezaplatila Lví daň sama za sebe.

Protože Věra o daních nic neví (když je brali ve škole, asi zrovna chyběla), vysvětlil jí mrož, že pokud si plátce daně nakoupí materiál pro svou práci od jiného plátce daně, nemusí být pro kupujícího materiálu daň velkou finanční zátěží. Ze své vlastní daně si totiž může daň, kterou zaplatil druhému plátcí daně za materiál, odečíst. Mrož navrhuje, aby se Věra stala plátcem daně a cenu mu vyměřila na 1950 JC a pak připočetla peníze na Lví daň za tento obchod. Jemu samotnému se to prý vyplatí (tuto daň si bude moci odečíst od vlastní daně) a ujišťuje Věru, že ona na té trošce papírování také notně vydělá oproti svému původnímu návrhu při obdržení platby 2000 JC. Věře jde z toho vysvětlování hlava kolem a i když není moc dobrá počtářka, ráda by si ověřila, že ji Mrož netahá za fousiska. Prozradíš nešťastné vydře Věře, zda na takovém danění opravdu vydělá? A pokud ano, o kolik více získá oproti svému původnímu plánu?

Úloha 2A Pavoučí twister

(6 bodů)

Na pavoučí party se hraje obdoba našeho twisteru. Pavouci při ní mají k dispozici čtvercovou tabulku o velikosti 8×8 a každou nožičku pokládají vždy na jedno z políček. Pavouka v uvolněném stavu ukazuje obrázek 1, přičemž při hře jsou pavouci schopni natáhnout každou nohu o jedno políčko ve vodorovném i svislém směru. Jejich hlavohruďi jsou při hře taktéž vždy orientovány jen vodorovně nebo svisle.



Obrázek 1: Pavouk v uvolněném stavu.

Jejich nožičky se mohou různě zamotávat s nohama ostatních spoluhráčů. Jelikož jsou ale pavouci k sobě navzájem slušní, nepokládají své nohy na políčko, nad kterými má jiný pavouk své tělíčko, ani na políčko, na které má jiný pavouk již položenou svojí nohu.

Jak vypadá twisterová plocha ve chvíli, kdy na ni chceme vměstnat největší možný počet pavouků? A jak naopak vypadá ve chvíli, kdy jich tam chceme mít co nejméně, ale už k nim podle pravidel není možné žádného dalšího přidat?

Úloha 3A Čmeláci čísla

(7 bodů)

Čmeláci se rozhodli postavit si palác po vzoru včel. Vrchní matematik čmelák Čmelda si všiml, že čmeláci architekti často pracují s hodně malými a hodně velkými čísly. Protože vypisovat taková dlouhá čísla je úporné, nabídl jim svůj revoluční úspornější zápis.

Nejprve posune desetinnou čárku čísla tak, aby před ní zůstala právě jedna cifra. Z čísla 123400 se tak stane 1,234. Z čísla 0,0567 se stane 5,67. Dále spočítá, o kolik míst musel čárku posunout dozadu. Výsledek pak přičte k číslu 50. U čísla 123400 si pamatuje $50 + 5 = 55$, u čísla 0,0567 postupoval v opačném směrem, pamatuje si proto $50 - 2 = 48$.

Nakonec sepíše tyto informace dohromady. Nejprve zapíše znaménko, pak poslední dvě cifry z čísla posunu desetinné čárky a nakonec tři cifry původního čísla počínaje první nenulovou cifrou zleva.

Číslo 123400 tak bude zapsáno jako +55 123 a číslo 0,0567 jako +48 567.

Tenhle formát se zdá čmeláčím architektům velmi užitečný. Chtějí od Čmeldy, aby jim ukázal zápis čísel 7, -14, 0,309, 139000000, -0,0000477, -100999999999 a 0,000101895. Jenže Čmeldovi tak úplně nevěří, takže by si rádi nějak zkontrolovali, že jim to Čmelda ukázal správně. Přepíšeš tato čísla do čmeláčího zápisu, aby si je architekti měli podle čeho zkontrolovat?

Čmeláci dlouhým pozorováním nového zápisu čísel zjistili, že má sice bezesporu mnoho výhod, ale bohužel se zdá, že má i nevýhody. Uveď co nejvíce výhod i nevýhod a k nim i příklady situací, kdy nastanou – tj. kdy budou výhody v řešení situace nápomocné, nebo naopak, kdy budou nevýhody při řešení situace překážkou. Čmeláci také přišli na číslo, které často používají, ale ve Čmeldově zápise pro něj zatím neexistuje zápis. Jaké to je číslo a jak by mohlo být dodefinováno co nejvíce v souladu se současným zápisem?

Úloha 4A Šipkové bludiště

(9 bodů)

Úhoř Ulrich se zabývá úřednickou prací v oboru proudění vody. Celé dny pracuje s tabulkami o různých rozměrech se šípkami mezi políčky (vždy jen ve směru doprava, dolů, nebo diagonálně doprava dolů z políčka, šipek může být více). Tyto šípky ukazují povolené přechody, tedy to, ze kterého políčka se dá dostat na jiné sousední. Vždy je zaručeno, že existuje právě jeden průchod skrz tabulku. A právě tyhle průchody Ulrich celé dny hledá. Nedávno si na tuto práci pořídil robotického pomocníka. Jeho robotický pomocník zvládá následující:

Rozumí následujícím pojmům:

- aktuální políčko (ij) (i je číslo sloupce, j je číslo řádku, číslování začíná od jedničky)
- předchozí políčko (políčko, které naposledy opustil, na začátku je hodnota předchozího políčka nastavena na $(0,0)$, kteréžto políčko v tabulce neexistuje, ale kdyby ano, tak by leželo vlevo nahoře, takže na počáteční políčko tabulky $(1,1)$ jsme před začátkem hledání přišli zleva shora)
- řada je posloupnost políček zařazených za sebou, každá řada má své jméno (označení) – můžeme mít třeba řadu cesta = $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,3)$; $(3,4)$)

Umí plnit následující pokyny:

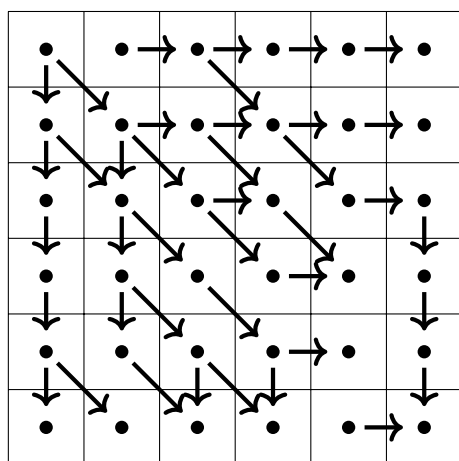
- Přesuň se na políčko ve směru (dolů/vpravo/vpravo dolů)
- Pokud je odpověď na otázku ano/ne, potom (...), jinak udělej (...)
- Opakuj, dokud je odpověď na otázku ano/ne: (...)
- Zapamatuj si aktuální políčko a ulož ho do řady
- Přejdi na poslední zapamatované políčko v řadě
- Smaž poslední pozici z řady

Za (...) lze dosadit libovolný blok dalších pokynů.

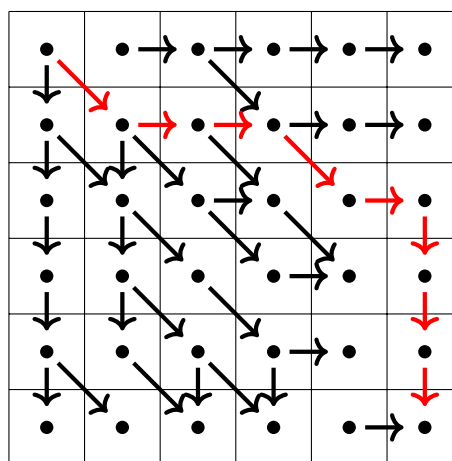
Dokáže si odpovědět na následující otázky:

- Vede z aktuálního políčka šípka ve směru (dolů/vpravo/vpravo dolů)?
- Je od aktuálního políčka předchozí políčko v některém ze směrů (libovolné směry včetně nahoru, dolů atd.)?
- Jsem v cíli?

Dokážeš Ulrichovi říct, jak pomocí zadaných pokynů určit postup pro robota, jak procházet skrze tabulky se šípkami tak, aby vždycky našel tu správnou cestu z prvního políčka $(1,1)$ k poslednímu (n,n) ?



(a) Příklad tabulky.



(b) Jediná cesta do pravého dolního rohu.

Obrázek 2

Úloha 5A Koláče

(5 bodů)

Kamarádi lachtan Lukáš a hroch Honzík se rozhodli pomoci slonici Sáře s výrobou povídkových koláčů. Za dobu, kdy Sára vyrobí pět koláčů, vytvoří Lukáš tři a Honzík dva. Celkem se zvládlo připravit dvanáct plných táč koláčů. Lukáš se Sárou vyráběli po celou dobu. Honzík mimo vyrábění také rovnal koláče po dvanácti na tácy a odnášel do spíže vždy, když se tác naplnil. Všichni tři ve stejnou dobu začali i skončili. Kolik koláčů vyrobil Honzík a jak dlouho by jim celá práce trvala, když Sára vyrobí jeden koláč za půl minuty?

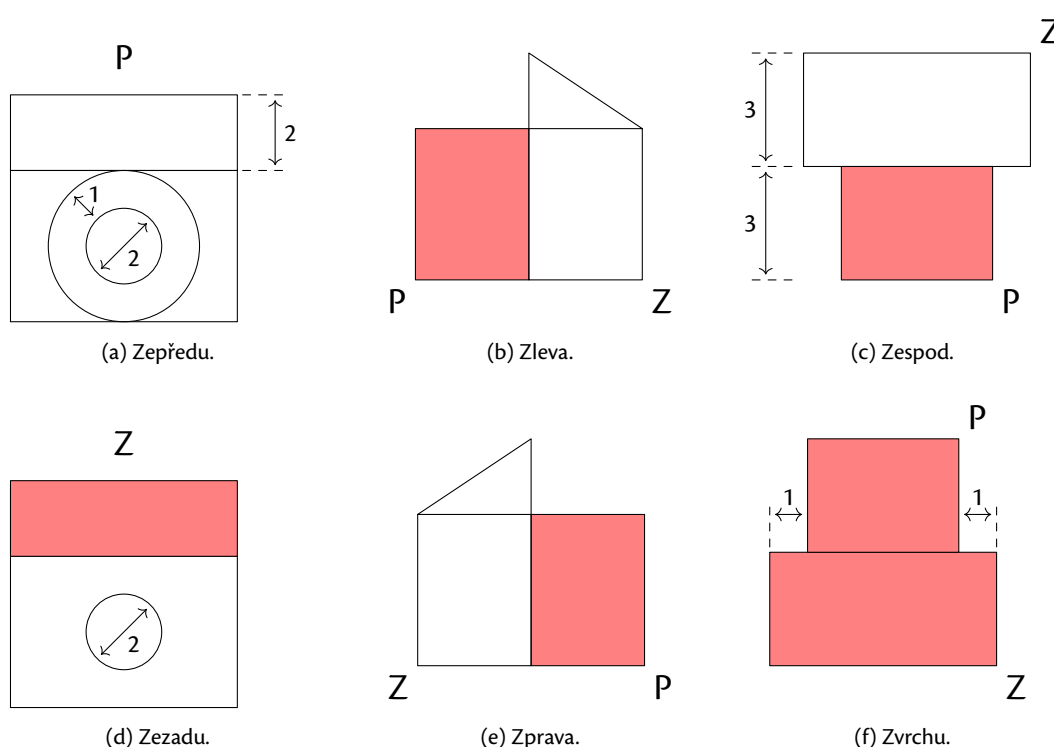
Kategorie starší

Úloha 1B Nákresová

(5 bodů)

Tarbík Tim je nadšený vynálezce, který má v hlavě pořád samá kolečka, šroubky a součástky. Jedna taková součástka se mu z hlubin jeho představ vynořila zrovna při ranní koupeli. Nadšený tarbík rychle načmáral tenhle geniální objev na kus papíru. Zachytil pohled zvrchu, zespod, zleva, zprava, zepředu i zezadu. Doplnil také rozměry, které by se mu pro jeho vynález hodily. A protože chtěl usnadnit práci svému asistentovi, vyznačil mu všude písmeny P a Z, kde je přední a kde zadní část. Navíc červeně vybarvil stěny, které mají nějaký sklon nebo zakřivení, které z daného úhlu pohledu nemusí být patrné. Přidal pak ještě rychlou poznámku, že kromě tunelu s kruhovým průřezem je vnitřek tohoto objektu zaplněný materiálem, ze kterého bude výrobek vyroben.

Celý nadšený rychle strčil náčrtek do ruky svému pomocníkovi psounu Pyškovi, aby mu součástku vyrobil, zatímco on bude absolvovat svůj denní program plný přednášek a pokusů. Pyško je ale z celého nákresu trochu nešťastný. Zejména nedokáže zjistit, jaký objem bude celá taková konstrukce mít a kolik speciálního plastu na ni spotřebuje. Dovedeš mu poradit? A dokážeš popsat nebo načrtnout, jak tedy daný objekt vypadá?



Obrázek 3: Součástka z různých pohledů.

Úloha 2B Řada čísel

(6 bodů)

Velbloud Vít rád vytváří číselné řady. Obvykle mu jejich tvorba nezabere mnoho času. Při poslední řadě, kterou si dal za úkol vymyslet, se mu však stále nedaří přijít na správné pořadí číslic. Tato řada se skládá z 27 čísel, tři od každého z výběru 1 až 9. Celá řada musí splňovat jedinou podmínku. Dvě čísla stejné hodnoty musejí mít mezi sebou vždy přesně tolik čísel, jako je jejich hodnota. Vít tedy ví, že v řazení budou někde i následující části:

 $1?1?1, 2??2??2, 3???3???3, \text{atd.}$

Dokážeš Vítovi poradit, jak by mohla vypadat celá řada všech 27 čísel?

Úloha 3B Medová

(7 bodů)

Medvěd Milan si chce udělat dostatečné zásoby medu na zimu. Našel si proto dvě včelstva, která prodávají jeho vytouženou laskominu. Bližší z nich nabízí kilogram medu za 28 JČ, vzdálenější nabízí kilogram pouze za 16 JČ. Jenže ze vzdálenějšího obchodu si medvěd nedokáže med odnést sám a doprava by ho stála dalších 304 JČ bez ohledu na množství. V bližším obchodě navíc mají akci, díky které dostane za každých 20 kg koupeného medu 2 kg zdarma. Mlsný medvěd nyní dumá, kde se mu více vyplatí nakupovat. Dokážeš mu poradit, jak velké množství medu pro něj bude výhodnější nakoupit v bližším obchodě, a jak velké množství naopak ve vzdálenějším z nich? A při kolika kilogramech kupovaného medu vyjde koupě medu v obou obchodech stejně?

Při promyšlení nákupu by Milanovi moc pomohlo vidět graf závislosti množství získaného medu na ceně. Potřeboval by, aby se v něm promítla cena dopravy ze vzdálenějšího včelstva i akce, kterou má bližší včelstvo. Zvládneš mu takový graf nakreslit?

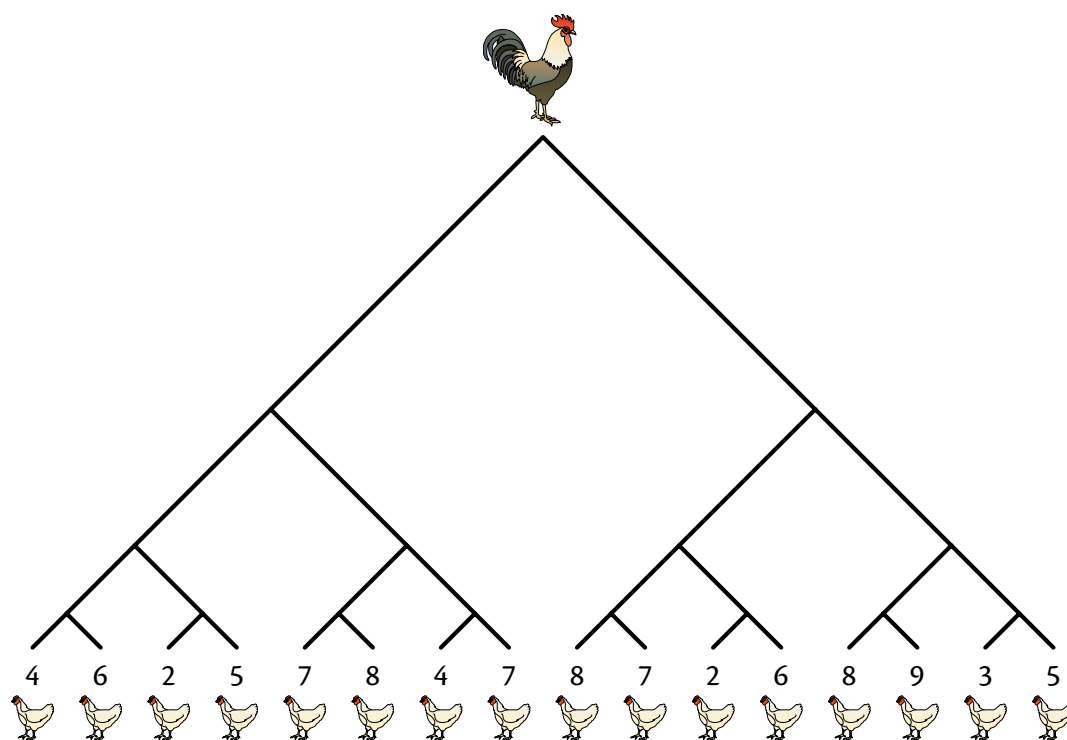
Úloha 4B Slepice

(9 bodů)

Vychytralá kuna Mína potkala zatoulaného kohouta Maxe daleko od kurníků. Místo toho aby ho rovnou sežrala, rozhodla se s ním uzavřít dohodu, která ji může pomoci získat ještě více slepic. Kuna půjde napřed ke slepicím a rozmístí si je do šestnácti kurníků. Poté se vrátí za Maxem. Cestou ke kurníkům budou střídavě vybírat cestu (buď mírně doleva nebo mírně doprava). První vybírá Max, podruhé Mína, potřetí Max a na čtvrtém, posledním rozcestí vybírá opět Mína. Každá z kombinací cest vede k jinému kurníku. Pokud dorazí ke kurníku, kde je alespoň 6 slepic, pak Mína bez protestů odejde. Pokud dorazí ke kurníku s méně než 6 slepicemi, pak je Mína všechny sežere.

Max má štěstí – na stromě zrovna sedí moudivláček Moula, který viděl, jak Mína slepice rozdělila. Není ale příliš důvtipný, a Max z něj tak musí postupně vytáhnout tolik informací, kolik jen může – ale na vše se musí přímo doptat sám, Moudivláček mu sám od sebe není schopen pomoci. Má čas ale na to pípnout jen 10 otázek a na ně dostat příslušných 10 odpovědí, než začnou s Minou vybírat své směry. Aby se do počtů moudivláček nezamotal, nechce se Max ptát napřeskáčku. Bude se proto ptát zleva doprava, např. „Kolik slepic je ve třetím kurníku zleva?“ Moudivláček odpoví číslem. Pak se Max zamyslí, zeptá se např. na čtvrtý nebo sedmý kurník zleva, ale nikoliv už na první kurník, protože jedna je menší než čtyři a tedy první kurník je nalevo od čtvrtého.

Moudivláček vidí, že v jednotlivých kurnících je po řadě tolik slepic: 4 6 2 5 7 8 4 7 8 7 2 6 8 9 3 5.



Obrázek 4: Cesty ke kurníkům.

Max si také může být jistý, že Mína půjde vždy tak, aby i v pro ni nejhorším případě došli k co nejméně slepicím (a na rozdíl od něj Mína zná rozložení slepic ve všech kurnících velmi dobře – sama je tam umisťovala).

Pomůžeš Maxovi vymyslet, jak se má postupně zeptat Moudivláčka na počty slepic v nejvýše deseti kurnících, aby si byl zcela jistý, že bezpečně dovede kunu do kurníku s dostatečným množstvím slepic na to, aby se milé slípky dožily rána? (Mína tedy nesmí mít šanci dovést ho na cestu, na níž by vyhrála.)

Úloha 5B Kolečka orloje

(5 bodů)

Sova Sofie ve starých kronikách vyčetla, že když se ve správný okamžik prosvítí kolečka místního orloje, vytvoří stíny na protější stěně určitý obraz. Prý by se mělo jednat o tajemný vzkaz z minulosti. Aby k tomu došlo, musí být všechna kolečka správně natočena. Sofie je zvědavá, ale ví, že pozorováním orloje nejspíš stráví hodně času. A tak se rozhodla mezitím spočítat, jak dlouho trvá, než se kolečka dostanou z nějaké výchozí pozice zpátky do téže pozice.

Největší kolo má 180 zubů, menší 84 a nejmenší 48 zubů. Dále si Sofie všimla, že se každou sekundu všechna kolečka pootočí o jeden zub. Jak dlouho bude Sofie muset maximálně čekat, než uvidí tajemný vzkaz z minulosti?