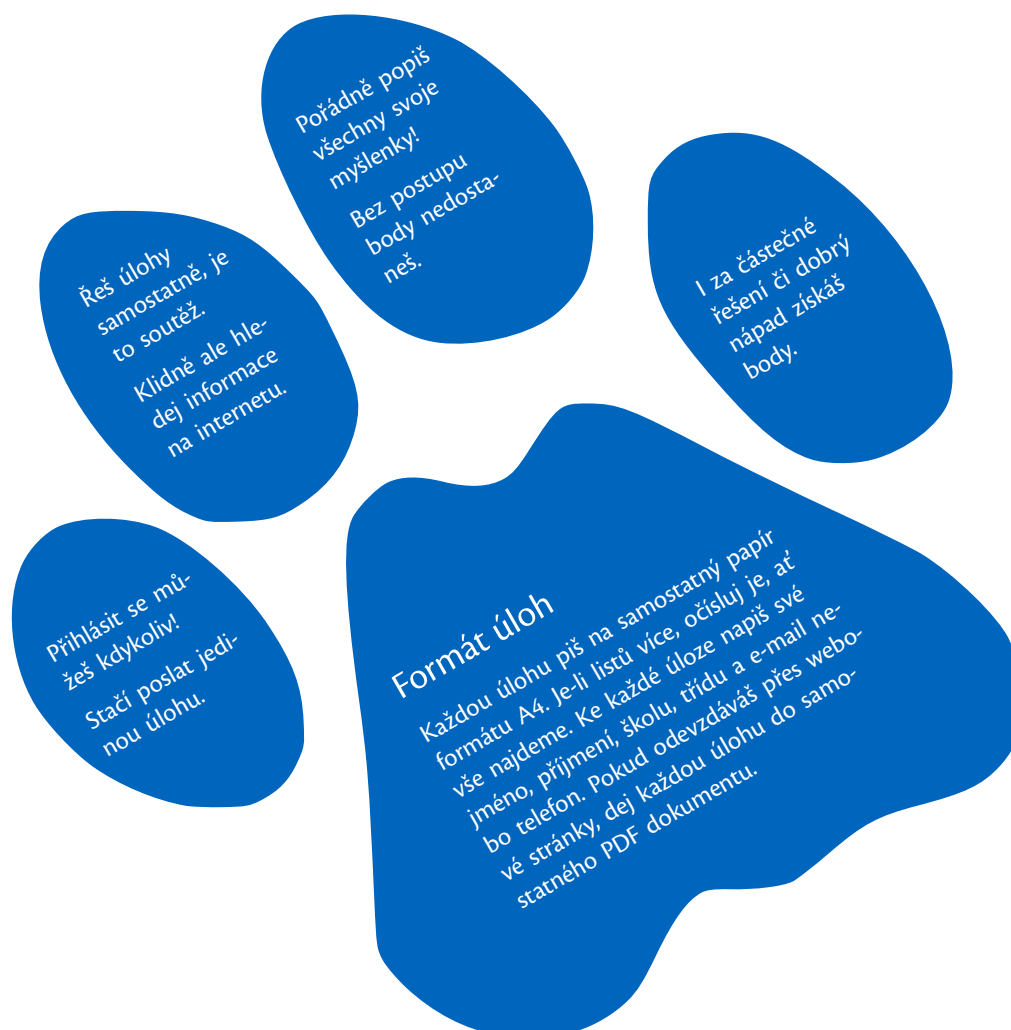


## Ahoj!

Vítej v Jámě Lvové! Jsme korespondenční soutěž na pomezí matematiky a informatiky pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií pořádaná již desátým rokem Českým vysokým učení technickým v Praze.

Soutěž je rozdělena na dvě kategorie, Mladší (6. a 7. třída) a Starší (8. a 9. třída). Skládá se ze tří kol, v každém na Tebe čeká pět základních úloh. Na léto je pro soutěžící přichystán jedinečný letní tábor. Kapacita je 24 účastníků a přednost dostanou ti s lepším umístěním. Než se vrhneš do řešení, mrkni na pravidla.

Více informací o nás najdeš na <https://jama.lvova.cz> a dále na Google+ či Facebooku.



Svá řešení nám pošli do **12. listopadu 2018** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma Lvová  
Rektorát ČVUT  
Jugoslávských partyzánů 3  
160 00 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

*Alenka, Čenda, Hanka, Honza, Kobi, Lenka, Láďa, Matěj, Terka a Terka, Vilda, Zuzka a Zuzka a další*



## Kategorie mladší

### Úloha 0A Byrokratická

**(2 body)**

Úředního šimla Honzika i jeho kolegy velmi unavuje neustálé třídění a přebírání úloh. Poslední dobou musí dokonce dělat přesčasy a zůstat v kanceláři přes noc. Rozhodli se tedy, že budou vyžadovat, aby měly všechny úlohy opravdu správný formát. Pomoz Honzíkovi tak, že Tvé úlohy budou splňovat požadavky uvedené v úvodním textu. (Tedy každá bude na samostatném listu papíru A4, nadepsaná jménem, příjmením, třídou a názvem školy.)

Chceš-li si ulehčit práci s nadepisováním hlavičky a odesíláním obálek, můžeš svá řešení po přihlášení nahrát na stránky Jámy lvové [jama.lvova.cz](http://jama.lvova.cz). Ale pozor! Pouze ve formátu PDF! Pokud bys měl jakékoli problémy, napiš nám na fórum ([forum.jama.lvova.cz](http://forum.jama.lvova.cz)) nebo na e-mail ([jama.lvova@jama.lvova.cz](mailto:jama.lvova@jama.lvova.cz)).

### Úloha 1A Račice obkládá

**(5 bodů)**

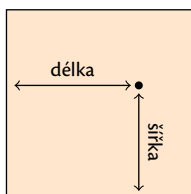
Račice Káťa navštívila žabku Terku a moc se jí zalíbily dlaždice v Terčině koupelně. Rozhodla se tedy i svou vlastní koupelnu hezky obložit. Na podlaze by chtěla mít úhlopříčné pruhy tak, že se dlaždice téže barvy dotýkají vždy rohem, a na stěnách po celém obvodu pruhy vodorovné o šířce jedné dlaždice. Podlaha má rozměry  $5 \times 5$  dlaždic a stěny jsou vysoké 4 dlaždice. V jedné ze stran se nachází dveře široké 2 dlaždice a vysoké 1 dlaždici. Poradíš Kátě, jak má barevné pruhy uspořádat, pakliže má 50 červených a 53 žlutých dlaždic?



### Úloha 2A Poznávací zájezd

**(6 bodů)**

Kozel Mustafa se po letech opět vydal na cesty. Tentokrát navštívil město Čebyš, které má tvar čtverce, jehož strany mají délku 10 km a vedou přesně severojižním nebo západovýchodním směrem, a je osídleno tak hustě, že v každém jeho bodě (včetně stran a vrcholů) někdo bydlí. Čebyšané označují každý bod města pomocí dvou zeměpisných souřadnic – šířky, neboli vzdálenosti od jižní strany města v kilometrech, a délky, neboli vzdálenosti od západní strany města v kilometrech (viz obrázek 1). Navíc mají podivné chápání vzdálenosti – chtějí-li určit, jak daleko od sebe se dva body ve městě nachází, vezmou rozdíl zeměpisných šířek a zeměpisných délek obou bodů a za jejich vzdálenost označí větší z obou rozdílů.



Obrázek 1: Město Čebyš a souřadnice v něm

Mustafa by rád navštívil galerii středověkých tapisérií, ale jelikož svou mapu i kapesního průvodce při průzkumu města někde vytrousil, rozhodl se na cestu poptat místních. Každý Čebyšan dokonale zná každý bod svého města a je Mustafovi schopen přesně říci, v jaké (čebyšanské) vzdálenosti od něj se galerie nachází, nepoví mu však jakým směrem.

Porad' Mustafovi postup, kterým přesně určí polohu galerie a přitom se (i v nejhorším případě) poptá na co nejméně místech.

### Úloha 3A Měníci se měna

**(7 bodů)**

Zvířátka se rozhodla provést měnovou reformu. Libovolnou částku větší než 59 JC (jámacoinů) musí být možné přesně poskládat v hotovosti. Nikomu se ale nelíbí drobné, a proto bude vytvořena jen jediná mince, která bude mít hodnotu 7 JC. Nyní je třeba natisknout bankovky o třech různých, co možná největších hodnotách. Jaké hodnoty bankovek mají zvířátka zvolit, aby ta nejmenší z nich měla co největší hodnotu?

### Úloha 4A Mravenečník

**(9 bodů)**

Mravenečník Miloš si na noc schovává před mravenci svůj milkshake. Má na to pět trezorů, kterým každý den mění heslo a neustále je opravuje. Navíc svůj milkshake pro větší bezpečnost nikdy nenechává dvě noci po sobě v téže trezoru. Trezory však leží v jedné dlouhé řadě daleko od sebe, a jak je Miloš čím dál tím starší, přenáší milkshake vždy už jen o jeden trezor doleva nebo doprava od toho, v němž se milkshake nacházel předešlé noci.

Mravenci jsou však, jak je dobře známo, výbornými kasaři a za noc se dokáží s klidem do jednoho trezoru prolomit – jenže bohužel nevědí, ve kterém z trezorů milkshake je. Jsou to ale zvířátka trpělivá, a tak se budou prolamovat do trezorů třeba celý měsíc. Porad' jim,

do kterého trezoru se mají tu kterou noc vloupat, aby měli jistotu, že dříve či později Milošův milkshake získají. Nezapomeň popsat svůj postup a hlavně to, proč funguje.

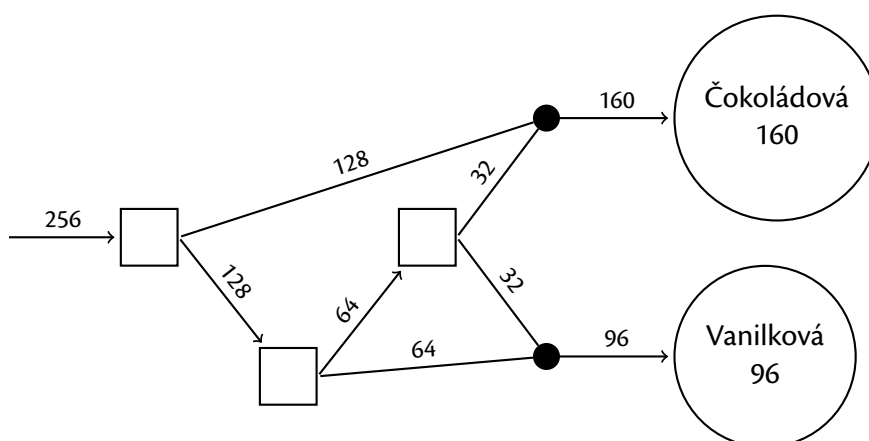
(Mravenci neví, ve kterém trezoru se milkshake nachází nyní.)

### Úloha 5A Výrobní linka

(5 bodů)

V továrně na nanuky předělávají linku. Na lince vyrobí za hodinu 256 nanuků. Jejimi stěžejními součástmi jsou tzv. *rozdělovače* a *spojovače*. Do každého rozdělovače přijíždějí po jednom pásu dřívka, která z něj následně vyjíždějí rovnoměrně rozdělena mezi dva pásy, zatímco do spojovače naopak vstupují dřívka dvěma pásy a vyjíždí na jediném.

Původně v továrně vyráběli pouze dvě příchutě nanuků – čokoládové a vanilkové. Čokoládové se prodávaly více, a proto linka dělila dřívka mezi příchutě v poměru 5 : 3 (viz obrázek 2).



Obrázek 2: Původní uspořádání výrobní linky; rozdělovače jsou značeny prázdnými čtverci, spojovače plnými kolečky

Teď ale v továrně chtějí začít vyrábět i jahodovou zmrzlinu, a tak je potřeba výrobní linku přestavět. Dřívka je potřeba rozdělovat mezi tři příchutě v poměru 3 : 4 : 9. Spojovačů je k dispozici dostatek, a lze jich tedy použít libovolný počet, ale rozdělovačů je třeba použít co nejméně – kolik jich bude stačit?

## Kategorie starší

### Úloha 0B Byrokratická

**(2 body)**


Úředního šimla Honzíka i jeho kolegy velmi unavuje neustálé třídění a přebírání úloh. Poslední dobou musí dokonce dělat přesčasy a zůstat v kanceláři přes noc. Rozhodli se tedy, že budou vyžadovat, aby měly všechny úlohy opravdu správný formát. Pomoz Honzíkově tak, že Tvé úlohy budou splňovat požadavky uvedené v úvodním textu. (Tedy každá bude na samostatném listu papíru A4, nadepsaná jménem, příjmením, třídou a názvem školy.)

Chceš-li si ulehčit práci s nadepisováním hlavičky a odesíláním obálek, můžeš svá řešení po přihlášení nahrát na stránky Jámy lvové [jama.lvova.cz](http://jama.lvova.cz). Ale pozor! Pouze ve formátu PDF! Pokud bys měl jakékoli problémy, napiš nám na fórum ([forum.jama.lvova.cz](http://forum.jama.lvova.cz)) nebo na e-mail ([jama.lvova@jama.lvova.cz](mailto:jama.lvova@jama.lvova.cz)).

### Úloha 1B Mozaika

**(5 bodů)**

Zvířecí archeoložka červenka Lucie objevila zbytky starodávné mozaiky. Z dobových písemných pramenů ví, že se původně skládala ze čtverce  $4 \times 4$  vyplněného pouze čísly 0, 1, 2, 3 a že číslo v každém poli můžeme získat tak, že sečteme čísla ve všech polích, která s ním sousedí stranou (tedy políčka nahore, dole, vpravo a vlevo) a vypočítáme, jaký zbytek dostaneme, když výsledek vydělíme čtyřmi.

Zub času ale mozaiku hldal tak dlouho, že už z šestnácti čísel zbyla pouze čtyři. Porad' Lucii, jakými čísly byla mozaika původně vyplněna.

?	1	?	?
2	3	?	?
?	?	?	0
?	?	?	?

Obrázek 3: Zbytky mozaiky

### Úloha 2B Rozhádané figurky

**(6 bodů)**

Šachová partie je taková malá válka. Nikdo si už nepamatuje, proč vznikla, ale povídá se, že černý král pokukoval po bílé dámě a že bílí pěšci nechávali v černé věži odpadky. Nic to ale nemění na tom, že figurky musí držet pohromadě a svoje spory řešit s chladnou hlavou. Jsou přece jedna parta.

Co se ale jednoho dne nestalo. Černá armáda se vzbudila a zjistila, že protivník odtáhl. Zkrátka zmizel. Figurky začaly oslavovat a veselit se. Takto se ale nedá žít věčně, a tak se po třech dnech a třech nocích začal život vracet do starých kolejí. A jak to už bývá, všechny staré křivdy začaly zase bublat na povrch. Každý se hádal s každým a nikdo už nechtěl svoje sousedy ani vidět.

Král se tedy rozhodl, že se některé figurky budou muset přestěhovat. Je přece mír, a tak mají celou šachovnici  $8 \times 8$  jen pro sebe. Poradíš mu, jak rozestavit figurky po šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly? Podaří se přestěhovat všechny figurky, anebo se budou muset nějaké odstěhovat za hranice šachovnice?

(V černé armádě nikdo nechýbí, tj. slouží v ní jeden král a jedna dáma, po dvou od věží, jezdců a střelců a osm pěšců.)



### Úloha 3B Zlomek

**(8 bodů)**

Delfin Euklid, náruživý matematik, objevil algoritmus pro spočtení největšího společného dělitele (NSD) libovolných dvou přirozených čísel  $a, b$ . Uvědomil si, že kterýkoliv společný dělitel  $a, b$  musí dělit i každé přirozené číslo tvaru  $a - x \cdot b$  pro přirozené číslo  $x$ . Největší společný dělitel čísel  $b, a - x \cdot b$  tak musí být stejný jako největší společný dělitel čísel  $a, b$ . Euklid pak může stejný krok opakovat a psát si všechna čísla, která postupně obdrží, do sloupce pod sebe – jakmile dostane nulu, ví, že poslední přirozené číslo před ní muselo být největším společným dělitelem výchozích  $a, b$ . Aby celý výpočet zabral co nejméně kroků, je v Euklidově zájmu volit  $x$  vždy tak, aby  $a - x \cdot b$  bylo co nejmenší (ale stále nezáporné). Celý průběh algoritmu může vypadat nějak takto:

$$\begin{aligned}
 a &= 84 \\
 b &= 30 \\
 84 - 2 \cdot 30 &= 24 \\
 30 - 1 \cdot 24 &= 6 \\
 24 - 4 \cdot 6 &= 0
 \end{aligned}$$

(V tomto případě je tedy  $\text{NSD}(84, 30) = 6$ .)

Euklid také již nějakou dobu zkoumá zlomky tvaru

$$\frac{(7n + 5) \cdot (8n + 5)}{3n + 2}$$

pro přirozené číslo  $n$ . Dokaž, že každý takový zlomek je v základním tvaru, tj. že z jeho čitatele a jmenovatele nelze nic zkrátit.

### Úloha 4B Hodina létání

(8 bodů)

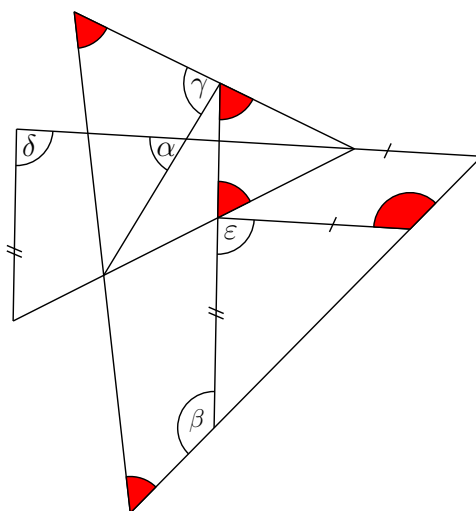
Hanička by chtěla naučit svého plyšového Tučňáka létat. Tučňáci jsou ale, jak známo, ptáci nelétaví (a ti plyšoví už tuplem), a tak se chudáku Tučňákovi moc nedaří. Hanička se proto rozhodla, že mu trošku pomůže – přiváže mu na křídýlka balónek naplněné héliem, a ty budou Tučňáka nadnášet. Potřebovala by ale vědět, kolik balónků bude potřebovat. Tučňák má hmotnost 70 g a má přibližně tvar válce o průměru 6 cm a výšce 16 cm, balónek má přibližně tvar koule o průměru 25 cm. Hustota hélia je  $0,1762 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota vzduchu  $1,2047 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Poradíš Haničce, kolik balónků bude stačit, aby se Tučňák vznesl do oblak? Hmotnost a objem balónků a provázků, kterými jsou přivázané, zanedbej, stejně tak i vztakovou sílu působící na balónek a provázek samotné.



### Úloha 5B Úhelniček

(5 bodů)

Sýkorka Úhelniček si narýsoval krásný tvar. Jenže co se nestalo, když odešel, tak začalo pršet a smyly se mu velikosti některých úhlů. Červené (viz obrázek 4) však zůstaly a stejně tak i označení rovnoběžných úseček (označených jednou nebo dvěma čárkami). Úhelniček si ale nepamatuje, které další úhly měly v náčrtku napsanou velikost. Pomůžeš Úhelničkově i bez znalosti konkrétních velikostí červených úhlů zjistit, které z hodnot úhlů  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  dokáže zpětně dopočítat?



Obrázek 4: Úhelničkův náčrtek po dešti