Ahoj!

Vítej v VII. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, z nichž v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro nejlepší soutěžící je připraven **letní tábor**. Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísluj.
- Pokud úlohu odevzdáváš přes naše webové stránky, stačí, když bude každá úloha v samostatném PDF dokumentu.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 34 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě ten bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže: `http://www.jamalvova.cz`.

Své řešení nám pošli do **1. dubna** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

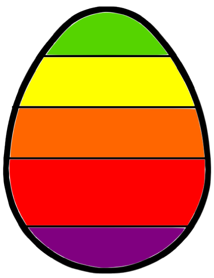
Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Béňa, Čenda, Hanka, Honza, Honza, Klárka, Kobi, Petr, Terka, Tomáš, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Velikonoční vajíčka (5 bodů)



Obrázek 1

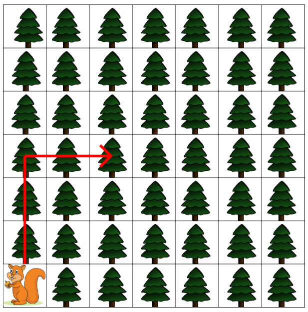
I u zvířátek se o Velikonocích barví vajíčka. Jednobarevná vajíčka má ale každý, a proto se myška Hanka rozhodla, že si letos udělá vajíčka pruhovaná. V drogerii si koupila tři různé barvy: červenou, modrou a žlutou, jejich smícháním navíc může získat i zelenou (modrá + žlutá), oranžovou (červená + žlutá) a fialovou (červená + modrá). Při smíchání všech tří barev vznikne odpudivě hnědá, která se Hance vůbec nelíbí, a proto ji nikde na vajíčkách mít nechce. Hanka vajíčka barví tím způsobem, že je vždy celé, nebo zčásti ponoří do kalíšku s barvou. Zatím ale tímto způsobem dokázala vyrobit jenom vajíčka dvoubarevná, z čehož je poněkud zklamaná. Hančiným snem je pro svého milého vyrobit vajíčko v barvách duhy – viz obrázek 1. Dokážeš jí poradit, jak má postupovat?

Úloha 2A Lyžaři na vleku (6 bodů)

Na svahu, kde lemuřice Lucie lyžuje, jezdí dva vleky. Ten první (poma) jede rychlostí 3 m/s a čeká u něj 15 zvířátek. Druhý vlek (kotva) má rychlost pouze 2 m/s, zato má dvojnásobnou kapacitu – nahoru se jezdí po dvou. Fronta je u něj ale větší: 20 sjezduchtivých zvířátek. U obou vleků je potřeba dodržovat bezpečnostní rozestupy 5 m. Oba vleky vedou až na vrchol sjezdovky a jsou dlouhé 600 m. Který vlek má Lucie zvolit, aby byla nahoře co nejrychleji?

Úloha 3A Veverčí skok (8 bodů)

Veverčák Pavel moc rád mlsá borovicové šišky. Zrovna teď Pavel objevil borovic celou plantáž: je tvořena 7×7 stromy umístěnými v pravoúhlé síti (viz obrázek 2), a Pavel by pochopitelně chtěl šišky ze všech stromů posbírat a odnést si je do své spižírny. Veverky ale jak známo nechodí, nýbrž skáčou, a Pavel dokáže skákat jenom tím způsobem, že se vždy posune o 3 stromy jedním směrem a o 2 stromy směrem druhým (na obrázku vyznačeno červenou šipkou). Pavel sedí na stromě v levém dolním rohu plantáže. Dokáže z tohoto výchozího místa navštívit všechny borovice na plantáži (na jednou navštívené stromy se může libovolně vracet)? A který strom je od Pavla v jednotkách veverčích skoků nejvzdálenější?



Obrázek 2

Úloha 4A Počítání u pětinožců (10 bodů)

Pětinožci módní (*Quinquepedis modularis*) mají sice pět nohou, zato rozumu moc nepobrali. Naučit se počítat s normálními čísly pro ně byl nadlidský úkol, a tak si zavedli zvláštní, pětinožskou matematiku. V té existuje všehovšudy jenom pět čísel: 0, 1, 2, 3 a 4, a ta se opakují stále dokola (pětinožci tedy počítají 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, …). Pětinožci se také naučili čísla sčítat a násobit (odčítání a dělení už je ale nad jejich síly). Sčítání a násobení po pětinožsku si lze nejjednodušeji představit tak, že čísla sečteme (vynásobíme) tak, jak jsme zvyklí, a výsledek poté nahradíme jeho zbytkem po dělení 5, čímž získáme některé z pětinožci používaných čísel. Platí tedy např.: $1 + 2 = 3$, $2 + 4 = 1$ (zbytek při dělení $6 : 5$), $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 4 = 3$ (zbytek při dělení $8 : 5$), apod. Stejně jako v naší matematice platí, že $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$ a $0 \cdot x = 0$ (x je libovolné celé číslo).

Jeden z pětinožců, Censeus, je tak nadaný, že se dokonce v pětinožské matematice pokouší řešit jednoduché rovnice! Moc si s nimi ale neví rady, a tak má teď chudák všech pět nohou plných práce, aby zjistil, čemu se rovná x v rovnici $2x - 4 = 3x + 2$. Zvládneš ji vypočítat dřív než Censeus?

Úloha 5A Stěhování (5 bodů)

V Království zvířat bydlí mnoho různých tvorů: někteří ve vodě, někteří na souši, někteří v lese a někteří na poušti, všichni bez výjimky ale mají moc pěkné domečky. Buvol Michal, zajíc Jakub, chobotnice Květa, žirafa Róza, papoušek Oskar a slon Tonda ale zjistili, že se jim jejich domečky už nelíbí a víc se jim zamlouvá bydlení jejich kamarádů: Michal by se chtěl nastěhovat ke Kubovi, Kuba by rád bydlel v Květině bytě, Květě se zamlouvá bydlení Rózino, Róza sní o domečku Oskarově, Oskarovi se líbí u Tondy a Tonda by úplně nejraději žil v Michalově domečku. Zvířátka se tedy dohodla, že si byty vzájemně vymění. Každý, kdo se už někdy stěhoval, ale ví, že to není nic jednoduchého, a co teprv takové stěhování šestinásobné! Zvířátka se tedy umluvila, že stěhování bude probíhat jenom formou podvojných výměn, tedy tak, že si v ten a ten den dvě zvířátka své byty vymění. (Např. se tedy Michal nastěhuje ke Kubovi a současně Kuba k Michalovi.) Je pochopitelné, že jedno zvířátko se může stěhovat maximálně jednou denně. (Kdo z vás se už někdy stěhoval, ví, že dvojí stěhování za jeden den zvládnout opravdu nejde.) V jeden den ale může probíhat více různých výměn. Dokážete zvířátkům poradit, jak mají stěhování naplánovat, aby co nejdříve všechna bydlela ve svém vysněném domově?

Ahoj!

Vítej v VII. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, z nichž v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro nejlepší soutěžící je připraven **letní tábor**. Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísluj.
- Pokud úlohu odevzdáváš přes naše webové stránky, stačí, když bude každá úloha v samostatném PDF dokumentu.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 34 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě ten bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže: `http://www.jamalvova.cz`.

Své řešení nám pošli do **1. dubna** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor PR a marketingu – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Béňa, Čenda, Hanka, Honza, Honza, Klárka, Kobi, Petr, Terka, Tomáš, Zuzka a Zuzka

Kategorie starší

Úloha 1B Maják (5 bodů)

Velryba Vladimíra si pluje v mořích na Planetě zvířat, která je dokonalá koule s poloměrem 9801 m. Zrovna teď se nachází v nebezpečných vodách a jedinou její záchranou před nárazem na útes je výstražný maják výšky 198 m. Pro Vladimíru je tedy nesmírně důležité vědět, v jaké vzdálenosti od něj se jí poprvé může podařit jej zahlédnout, aby se mohla podle toho přizpůsobit situaci. (Vzdáleností se myslí délka úsečky ohraničené vrcholem majáku a samotnou velrybou.) Vladimíra má vynikající zrak a maják spatří v první možné chvíli, zároveň ale není bystrozraká, a nejníže nad horizont vidí po přímce, která je kolmá na její spojnici se středem planety. V jaké vzdálenosti tedy poprvé maják uvidí?

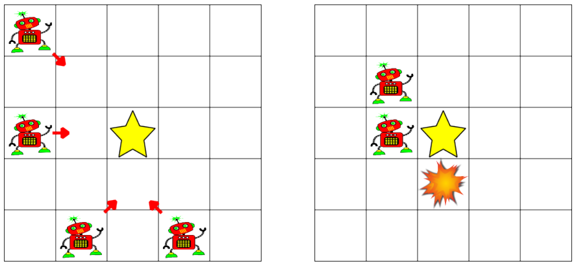
Úloha 2B Šaliny 2 (6 bodů)

Žabka Terka vyrazila na výlet ke své kamarádce myšce Hance do Prahy. V Praze jak známo nejezdí šaliny, ale tramvaje, a především tam jezdí metro. Hanka s Terkou nasedly do metra v době ranní dopravní špičky, kdy soupravy metra jezdí s časovými rozestupy 2 minut (počítáno od odjezdu první soupravy ze stanice do odjezdu následující soupravy z té stejné stanice). Cesta mezi jednotlivými stanicemi trvá 1,5 minuty a ve stanici se vlak typicky zdrží 15 sekund. Přesně v okamžiku, kdy Hanka s Terkou odjížděly ze své výchozí stanice, odjížděl z této stanice i vlak opačným směrem. Kolik souprav kamarádky cestou uvidí, pokud vystupují na sedmé stanici (tzn. šesti stanicemi projedou a na sedmé vystoupí)? Protijedoucí vlak samozřejmě mohou spatřit jenom tehdy, pokud se s ním potkají ve stanici, v tunelech spojujících jednotlivé stanice jej vidět nemohou. Dobu nutnou k rozjíždění a brzdění zanedbejte.

Úloha 3B Kouzlení s roboty (8 bodů)

Eskamotér Oskar rád baví zvířátka různými atraktivními kouzly. Jedním z jeho nejoblíbenejších triků je ten, v němž Oskar jen o vlásek unikne nebezpečným robotům: Odehrává se na hracím poli ve tvaru čtvercové sítě, na němž je umístěno několik robotů. (Počáteční rozmístění robotů si Oskar volí sám.) Oskar a roboti se střídají v tazích (začínají roboti). Oskar se vždy může posunout o jedno políčko libovolným směrem (vodorovně, svisle i diagonálně), roboti se posouvají všichni najednou o jedno políčko směrem k Oskarovi – pokud se nachází ve stejné řadě či sloupci jako Oskar, posunou se v dané řadě/sloupci o jedno políčko směrem k němu, jinak se posunou směrem k němu diagonálně. Pokud vkročí dva roboti na stejné políčko, vybouchnou a ze hry zmizí. Pokud naopak vkročí nějaký robot na políčko, na němž se nachází i Oskar, vybouchne i s Oskarem. (Anebo taky ne, v každém případě ale Oskar přijde o svou slovutnou pověst.) Například v situaci na obrázku 3a (hvězdičkou je označena Oskarova poloha) se robot v levém horním rohu posune šikmo dolů doprava, robot vlevo uprostřed se posune o jedno políčko doprava a roboti v dolní řadě se posunou šikmo nahoru doleva, resp. doprava, vstoupí na stejné políčko a vybuchnou. Po tahu robotů tedy budou hráči rozestavěni jako na obrázku 3b. Hra končí buď ve chvíli, kdy nějaký robot vstoupí na políčko, na kterém aktuálně stojí i Oskar, nebo ve chvíli, kdy všichni zbylí roboti vybuchnou a Oskar zůstane na hracím poli sám.

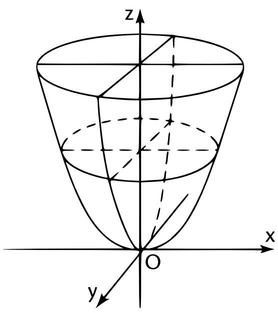
Oskar se postupem času stal v této hře skutečným přeborníkem a předvádí divákům čím dál tím nebezpečnější kousky. Teď si usmyslel, že na svém příštím turné bude tuto hru hrát na poli velkém 2001×2001 políček, a rozmístí na ně tolik robotů, že volných zůstane maximálně 2016 políček (včetně toho, na kterém bude stát on sám), ideálně samozřejmě ještě méně. Dokážete Oskarovi poradit, jak má roboty na hrací plán na začátku rozmístit, kam si má stoupnout on a jak se má poté pohybovat, aby určitě přežil?



(a) (b)

Obrázek 3

Úloha 4B Zavlažovací (10 bodů)



Obrázek 4

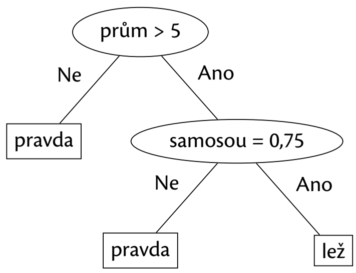
V království Mashaland žijí ryby v rybníku Golemci (1. pád Golemec). Do Golemce se vlévá řeka Varda, odtok ale rybník žádný nemá a vodu ztrácí jen díky odparu. Za současného přítoku se výška hladiny rybníku nemění. Výše proti proudu řeky Vardy by si hroši rádi vybudovali bahniště, k čemuž potřebují odebírat z řeky velké množství vody, a to samozřejmě způsobí pokles hladiny v Golemci. To se zase nelíbí rybám, které nechtějí připustit, aby maximální výška hladiny nad bodem O klesla pod 99 metrů. Hroši tedy povolali inženýra D. J. Hrocha, aby jim vypočítal, kolik vody mohou z řeky odebírat, aby tuto podmínku dodrželi. „Dno Golemce má tvar rotačního paraboloidu jako na obrázku 4," řekl po obhlídce terénu D. J. Hroch, „a hladina má tvar kruhu. V takovém rybníku platí, že plaveme-li na hladině, je hloubka vody pod námi rovna $h = h_O - \frac{l^2}{12}$ metrů, kde h_O je hloubka nad bodem O a l je horizontální vzdálenost k bodu na hladině nad bodem O." D. J. Hroch také změřil, že za 1 sekundu se z Golemce odpaří $\frac{S}{3\pi}$ litrů vody, kde S je obsah hladiny v m^2 a že současná hloubka Golemce je rovna 120 m. Kolik litrů za sekundu mohou hroši z řeky odebírat jim už ale neporadil. Dokážeš hrochům poradit Ty? A jestliže vyjádříme rychlost odparu v litrech za sekundu jako $v = o \cdot S$, jaký rozměr (jakou jednotku) má konstanta o?

Úloha 5B Rozhodovací strom (5 bodů)

Medvěd Kosťa má mezi zvířátky rozporuplnou pověst. Na jednu stranu jej uznávají jako odborníka na umělou inteligenci, avšak Kosťa je někdy nevyzpytatelný a zvířátka si nemohou být jista, kdy mluví vážně a kdy si z nich jen dělá legraci. Přes velké obtíže se jim však pro několik málo výroků podařilo prokázat, zda byly míněny vážně či nikoli:

- Pí se rovná přesně třem: **ne**
- Neuronová síť je univerzální aproximátor: **ano**
- Entropie mého pokoje neustále roste: **ano**
- Minimalizace nekonvexních funkcí je hračka: **ne**
- Vůbec nikdo mě nemá rád: **ne**
- Puštíci rozumí moderní vědě: **ne**
- Gibbsův sampler pomalu mixuje: **ano**
- Když nemůžeš derivovat, zkus subgradient: **ano**
- Rád vzpomínám na stáž v Zürichu: **ne**
- Histogram gradientů je deskriptor klíčových bodů v obraze: **ano**
- Submodularita je diskrétní ekvivalent konvexity: **ano**
- Nedostatek trénovacích dat způsobuje přeučení: **ano**
- Konvoluční neuronové sítě jsou rotačně invariantní: **ne**
- Sto neuronů musí stačit všem: **ne**

Zvířátka by ráda z těchto příkladů odvodila obecnější pravidla, podle kterých by se mohla v budoucnu řídit. Jako nejvhodnější se jim jeví tzv. rozhodovací strom. Ten se skládá z rozhodovacích bloků, které jsou propojeny podobně jako na obrázku 5, takže celá struktura připomíná rozvětvený strom. Každý blok umí změřit hodnotu právě jednoho příznaku zkoumaného výroku: po dlouhých debatách zvířátka dospěla k názoru, že nejlepší příznaky jsou počet samohlásek ve výroku vydělený počtem souhlásek (zkratka *samosou*; „ch" se počítá jako jedno písmenko, a to i v cizích slovech), průměrná délka slova (*prům*) a počet slov ve výroku (*počet*; za slova se považují i jednopísmenné předložky). Hodnotu příznaku porovná blok pomocí znaménka $>$, $<$ nebo $=$ s předem zvolenou konstantou, a pokud je podmínka splněna, odpoví „ano", v opačném případě „ne". Dokážete sestavit rozhodovací strom, který správně určí pravdivost libovolného z výše uvedených výroků a zároveň k tomu nikdy nepotřebuje více než tři porovnání příznaků? U každého rozhodovacího bloku zvolte měřený příznak, s jakým číslem je porovnáván a jak jsou obě hodnoty porovnávány ($>$, $<$, nebo $=$). Je podle vašeho stromu výrok „Budoucnost patří multiagentním systémům" míněn vážně, nebo vás Kosťa tahá za nos? A co tvrzení D. J. Hrocha „Dno Golemce má tvar rotačního paraboloidu." z předchozí úlohy?



Obrázek 5