Ahoj!

Vítej v VI. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, z nichž v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro nejlepší soutěžící je připraven **letní tábor**. Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísluj.
- Pokud úlohu odevzdáváš přes naše webové stránky, stačí, když bude každá úloha v samostatném PDF dokumentu.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 34 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě ten bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže: `http://www.jamalvova.cz`.

Své řešení nám pošli do **3. dubna** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Běňa, Čenda, Hanka, Honza, Honza, Jirka, Kobi, Petr, Terka, Tomáš, Tomáš, Zuzka a Zuzka

Kategorie mladší

Úloha 1A Sůví trable (5 bodů)

Sůvě Aničce se kýve stůl, rozhodla se jej proto podepřít složeným papírem. Má ale jen běžný kancelářský papír o tloušce 0,1 mm a velikosti A4 (o rozměrech 210×297 mm). Kolikrát by musela papír přeložit na polovinu, aby vyrovnala 5 cm kývání (±2 mm)? Narýsuj, jakou plochu by pak měl přeložený papír. Myslíš, že se jí to podaří? Kolikrát přeložíš papír na polovinu Ty?

Úloha 2A Vii (6 bodů)

Viiiii… Komár Kuba často a rád píská na svou píšťalku. Je to jednoduchá trubka dlouhá 14 cm, může na ni tedy zapískat jen jeden tón. Kuba by chtěl rozšířit svůj repertoár alespoň na tóny dva a sice tak, že svou píšťalku rozřízne na dvě menší. V jaké vzdálenosti od konců má Kuba píšťalku rozříznout, aby mohl zvířátka varovat před blížícím se požárem pískáním „Hó-ří“, jehož tóny tvoří čistou kvartu? Víme, že výška tónu závisí na tzv. frekvenci f a frekvence tónů v kvartě jsou ve vzájemném poměru 4:3. Víme také, že frekvence tónu se dá vypočítat z délky píšťaly l podle vztahu $f = 340 : (4 \cdot l)$, tedy čím kratší píšťala, tím vyšší tón. Pokud bychom tedy například zkrátili píšťalu na polovinu, zvýšili bychom její frekvenci na dvojnásobek.

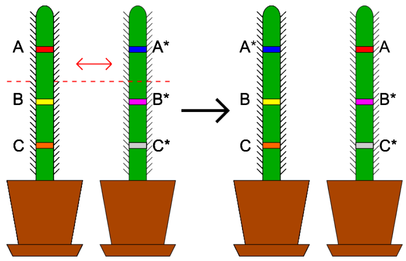
Úloha 3A Rekombinace (8 bodů)

V neprobádaných končinách Království zvířat byl v hustém pralese objeven zcela nový druh rostlin, barvivka tělní (*Chromus Somaticus*). Kromě toho, že má na stonku proužky mnoha různých barev, je barvivka zvláštní také tím, že v případě, že se dva jedinci dostanou do těsné blízkosti, dochází u nich k tzv. rekombinaci: těla obou rostlin se v určitém místě (u obou jedinců stejném) zlomí a rostliny si části svých těl nad tímto zlomem vymění (viz obrázek 1). Vědeckým zkoumáním barvivky byla pověřena odbornice na botaniku, octomilka Margot. Margot si všimla, že k rekombinaci nedochází na všech místech těl barvivek stejně často, některá místa se lámou častěji než jiná. Proto se rozhodla zavést novou jednotku, tzv. margotku, která udává, jak často dochází za vhodných podmínek mezi danými dvěma místy k rekombinaci. Pokud by např. červený a žlutý proužek na rostlině na obrázku byly od sebe vzdáleny $\frac{1}{4} = 0{,}25$ margotky znamená to, že ve čtvrtině případů mezi nimi k rekombinaci dojde a ve třech čtvrtinách případů ne. Margot se ve svém výzkumu zaměřila na barvivky, které mají na svém těle tři různobarevné proužky, přičemž každý z těchto proužků se v přírodě vyskytuje ve dvou barevných variantách (na obrázku označené A a A*, B a B* a C a C*). Nechala spolu rekombinovat dvojice rostlin s kombinacemi proužků ABC a A*B*C* a sledovala, jaké typy rostlin budou vznikat. Výsledky jejích pozorování byly následující:

Typ rostliny	Zastoupení
ABC	22,5%
A*BC	7,5%
AB*C	5%
ABC*	15%
A*B*C	15%
A*BC*	5%
AB*C*	7,5%
A*B*C*	22,5%

Pozn. 1: $1\% = \frac{1}{100}$ z celku $= 0{,}01$.
25% je tedy $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Pozn. 2: Pozor, k rekombinaci může docházet na více místech najednou.



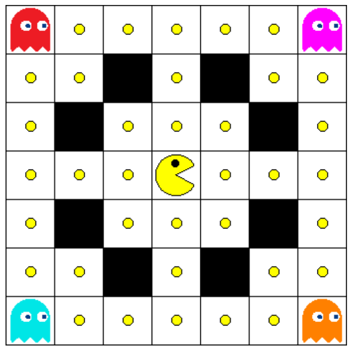
Obrázek 1

Dokážete Margot pomoci vyhodnotit výsledky experimentu a určit, jaké jsou vzdálenosti v margotkách mezi jednotlivými proužky?

Úloha 4A Pacman (10 bodů)

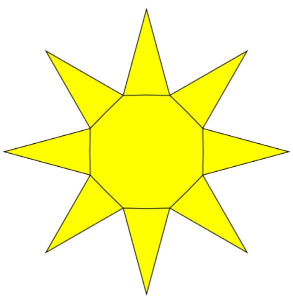
Je skutečný a přesto není. Jeho cílem je zotročit živoucí bytosti a využít je jako zdroj energie pro stroje. Matrix. Počítačová simulace ovládaná nemilosrdnými agenty. Pouze On jim dokáže vzdorovat, jen On se jim může postavit, ten, který je Vyvolený – Pacman. Avšak i on se dostal do potíží a agenti jej při sbírání pampelišek pro jeho milou obklíčili na čtvercové louce rozdělené na 7×7 políček (viz obrázek 2). Agenti i Pacman mohou chodit jen vodorovně a svisle, nesmí louku opustit a rovněž nesmí vstoupit na začerněná políčka (na nich jsou bažiny). Agenti nejsou žádní velcí myslitelé, vzájemně spolu nespolupracují a každý se pohybuje na vlastní pěst podle následujícího programu:

- Je svislá vzdálenost mezi mnou a Pacmanem menší než vodorovná vzdálenost?
  - Ano: Mohu jít svisle směrem k Pacmanovi?
    - Ano: Popojdu jedno políčko svisle směrem k Pacmanovi.
    - Ne: Mohu jít vodorovně směrem k Pacmanovi?
      - Ano: Popojdu jedno políčko vodorovně směrem k Pacmanovi.
      - Ne: Zůstanu stát
  - Ne: Mohu jít vodorovně směrem k Pacmanovi?
    - Ano: Popojdu jedno políčko vodorovně směrem k Pacmanovi.
    - Ne: Mohu jít svisle směrem k Pacmanovi?
      - Ano: Popojdu jedno políčko svisle směrem k Pacmanovi.
      - Ne: Zůstanu stát


Obrázek 2

Agenti se navíc mohou pohybovat jen na začátku každé sudé sekundy matrixového času a Pacman jen na začátku každé liché sekundy, takže se střídají podobně jako hráči šachů (začíná Pacman). V rámci jednoho kroku se mohou přesunout jen o jedno políčko a Pacman se navíc může rozhodnout stát na místě. Agent zůstane stát jen tehdy, pokud se nedokáže podle svého programu rozhodnout, nebo je zablokován (např. nachází-li se ve stejném řádku jako Pacman a podle programu by měl jít svisle, podobně ve stejném sloupci a vodorovně). Dva nebo více agentů mohou sdílet jedno políčko, ale Pacman se samozřejmě nesmí ocitnout na stejném políčku jako některý z agentů, protože by to znamenalo jeho konec. Jakým způsobem se má Pacman pohybovat, aby vysbíral všechny pampelišky (včetně těch v rozích, které nejsou na obrázku vidět) a zároveň jej agenti nepolapili?

Úloha 5A Žabka obkládá 2 (5 bodů)


Obrázek 3

Orientální žabka Atatürka se ráda sprchuje a také zbožňuje slunce. Protože sprchovat se na přímém slunci je nepraktické, chtěla by si obložit koupelnu dlaždicemi, které slunce připomínají. Na trhu ve městě Bulistan sehnala krásné barevné dlaždice, které se shodují s jejími představami. Jednu dlaždici si lze představit jako pravidelný osmiúhelník, nad jehož všemi stranami jsou vztyčeny rovnoramenné trojúhelníky, které symbolizují paprsky slunce (viz obrázek 3). Atatürka jich nakoupila plnou nůši, ale doma zjistila, že ať je skládá jak je skládá, nikdy s nimi nepokryje celou zeď beze zbytku. Proto přemýšlí nad další dlaždicí, kterou by hvězdy doplnila. Protože má velmi silně vyvinuté estetické cítění, bude spokojená jen tehdy, jestliže doplňková dlaždice nebude mít více než 8 stran a bude možné s její pomocí beze zbytku obložit obdélníkovou stěnu. Přesné rozměry stěny nejsou důležité, protože Atatürce se dlaždice tak líbí, že je schopná starou koupelnu zbourat a postavit novou. Doplňkové i hlavní dlaždice může libovolně otáčet (nemusí mít všechny stejnou orientaci), ale nemůže je převracet, protože dlaždice bývají krásně barevné jen z jedné strany. Poradíte Atatürce, jaký tvar by měla doplňková dlaždice mít?

Ahoj!

Vítej v VI. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, z nichž v každém na Tebe čeká pět záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro nejlepší soutěžící je připraven **letní tábor**. Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a e-mail nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír formátu A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísluj.
- Pokud úlohu odevzdáváš přes naše webové stránky, stačí, když bude každá úloha v samostatném PDF dokumentu.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 34 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě ten bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže: `http://www.jamalvova.cz`.

Své řešení nám pošli do **3. dubna** prostřednictvím stránek soutěže, nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Béňa, Čenda, Hanka, Honza, Honza, Jirka, Kobi, Petr, Terka, Tomáš, Tomáš, Zuzka a Zuzka

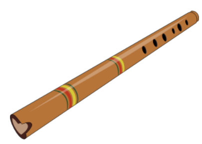
Kategorie starší

Úloha 1B Viii (5 bodů)

Komár Kryšpín má také pěknou píšťalku (viz úloha 2A), která vypadá jako jednoduchá trubka o délce 18 cm. Na jedné straně má připevněný náustek, na druhé straně je otevřená. Kryšpín by chtěl také umět zahrát „Hó-ří“, jenže do své píšťaličky nerad řeže. Rozhodl se proto vyvrtat si do ní jednu dírku, pomocí které bude moci hrát tóny dva – jeden se zakrytou dírkou a druhý s dírkou odkrytou. Kam má Kryšpín dírku vyvrtat, když víme, že výška tónu závisí na jeho frekvenci f, která se dá spočítat z délky l od začátku píšťalky k místu, kde může vzduch unikat (konec píšťalky, nebo nezakrytá dírka), podle vztahu $f = c : (4 \cdot l)$, kde c je rychlost zvuku ve vzduchu (pro jednoduchost budeme předpokládat 340 m/s). Od své kamarádky strašilky Šárky ví, že vyšší frekvence znamená vyšší tón a že pokud chce získat kvartu, musí frekvenci zvýšit tak, aby výsledné frekvence byly v poměru 4:3.

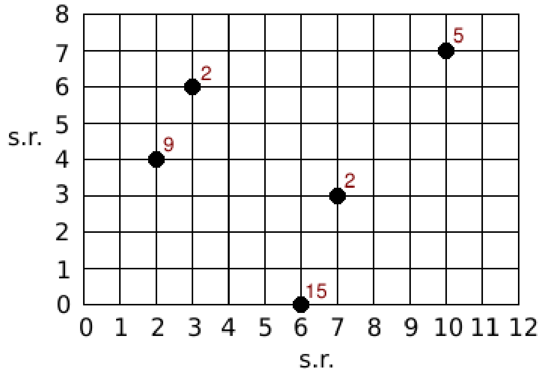
Krom toho by ještě Kryšpín rád hrál Šárce na svatbě jako doprovod. Aby mohl zahrát „Komáři se ženili“, potřeboval by ještě sekundu (poměr 9:8), tercii (5:4) a kvintu (3:2). To znamená vyvrtat ještě další tři dírky.

Pomůžeš Kryšpínovi spočítat, kam má vrtat, aby nic nezkazil?



Úloha 2B Vesmírná navigace (6 bodů)

Vesmírná loď Orion je v potížích – její posádka zabloudila a nemá tušení, kde se nachází. Navigátor křeček Pavel prospal několik průletů červími děrami a nyní marně hloubá nad mapou Mléčné dráhy. Mapy na palubě Orionu jsou však staršího data vydání, a proto jsou v nich zakreslené jen hvězdy a jejich relativní jas J ve vzdálenosti jednoho světelného roku (s.r.). Jak už jeho název naznačuje, relativní jas se mění se vzdáleností: jestliže je relativní jas J nějaké hvězdy ve vzdálenosti 1 světelného roku roven číslu k, ve vzdálenosti r světelných let bude roven $k : r^2$. Senzory na palubě Orionu nedokáží měřit přímo vzdálenost ke hvězdě, pouze její relativní jas. Právě teď je v jejich dosahu 5 hvězd, jejichž relativní jasy jsou rovny hodnotám 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 a 0,5. Pavel si je jistý, že se loď nachází v sektoru mapy na obrázku 4, ale nedokáže dopočítat přesné souřadnice. Poradíte mu?



Obrázek 4

Úloha 3B Ciferný součin (8 bodů)

Jestliže víte, že ciferný součin nějakého čísla získáme vzájemným vynásobením všech jeho cifer, kolik čísel mezi 0 a 1 000 000 má lichý ciferný součin?

Úloha 4B Víla Zvonilka (10 bodů)

Rarášková jsou známí tím, že cestují po duhách. Také víla Zvonilka se ráda nechá duhou svézt, má to ale jeden háček: sama na ni naskočit nedokáže, jediný způsob je posadit se některému raráškovi na rameno. Raráškům se to ale pochopitelně moc nezamlouvá a vždy, když si jí některý z nich všimne, nasedne na duhu a co nejrychleji uteče. Chudák Zvonilka se už potom jen od začátku duhy zklamaně dívá na pokaženou zábavu. Má však orlí zrak, a proto je schopná rarášky zahlédnout mnohem dříve, než si všimnou oni jí. Když tedy spatří některého raráška stát na začátku duhy, vyletí ihned jeho směrem. Ve chvíli, kdy ji rarášek uvidí, rozběhne se po duze, a když Zvonilka konečně dorazí na její začátek, je už rarášek od Zvonilky přesně poloměr duhy (600 m) daleko. Zvonilka ale zjistila, že jestliže v tuto chvíli vyletí pod úhlem 30° směrem ke konci duhy, akorát raráška dostihne, naskočí mu na rameno a sveze se s ním alespoň poslední kousek. Dokážete určit, jak daleko rarášková dohlédnou? (Duha má tvar půlkružnice o poloměru 600 m a Zvonilka i rarášková se celou dobu pohybují rovnoměrně.)

Úloha 5B Poznávací zájezd (5 bodů)

Kozel Mustafa se vypravil na poznávací zájezd do města Hajir, které je známé svými historickými památkami, křivolakými uličkami a rušným nočním životem. Rozkládá se na čtverci o straně 9 km a je tak hustě osídlené, že v každém jeho bodě někdo bydlí. Mustafa by rád navštívil galerii středověkých mozaik, ale mapa, kterou dostal v informačním centru, je tak nepřesná, že se rozhodl raději se někoho na cestu zeptat. Místní obyvatelé však neznají své město dokonale – pokud se jich Mustafa zeptá na místo, které leží do 3 km od jejich pozice, ukážou mu směr, ale neřeknou, jak daleko toto místo leží. V opačném případě jen bezradně pokrčí rameny. V každém případě se však ochotně dávají do řeči, a protože by Mustafa rád viděl i jiné památky, chce se ptát co nejméně krát. Nakreslete Mustafovi obrázek, na kterých místech města se má na cestu zeptat, aby měl jistotu, že i v nejhorším případě neosloví více než 8 místních a přitom zjistí přesně polohu galerie.