

Ahoj!

Vítej v V. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvoová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6.–9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvoová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Tebe čeká 5 základních úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očíslov.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 32 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Své řešení nám pošli do **10. ledna 2014** na email jamalvova@jamalvova.cz nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma lvoová,
Rektorát ČVUT,
Žitkova 4,
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Zuzka, Honza, Lukáš, Martin, Pepa, Petr, Štefan, Tomáš a Tomáš.

Kategorie mladší

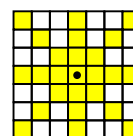
Úloha 1A (5 bodů):

Netopýr Richard má velice špatný zrak, dokonce tak špatný, že je téměř slepý. Přesto pracuje jako hodinář a spravuje zvířátkům rozbité budíky. Richard je velmi zručný, ale i tak se občas nevyvaruje chyby. Třeba právě teď má v dílně 7 „opravených“ budíků, které ukazují 02:42, 06:42, 13:07, 13:57, 19:07, 19:27 a 23:52. Některé jdou zcela přesně, jiné se liší od správného času v jedné cifře, další ve dvou, ve třech a jsou i takové, u kterých nesouhlasí ani jedna cifra (všechny rozdílné počty nesprávných cifer jsou zastoupeny alespoň jedním budíkem). Dokážete určit, který budík byl opraven bez chyby?

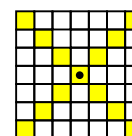


Úloha 2A (6 bodů):

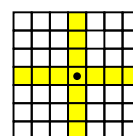
Jsou nejlepší z nejlepších, tvrdší než skála, nikdy se nevzdají, nikdy neustoupí. Elitní gardová divize bojových žabiček stojí před dalším náročným úkolem – zabránit pašerákům v údolí Korengal v převážení nelegálního zboží. Údolí Korengal je velmi rozsáhlé, a tak jej velitel divize myšleně rozdělil mřížkou 7×7 a nyní přemýšlí, jak všechna políčka kontrolovat palbou. K dispozici má totiž jen velmi malé síly – jeden tank (T), dvě samohybná děla (SD), dvě bojová vozidla pěchoty (BVP) a dva minomety (M). Tank dokáže kontrolovat všechna políčka, která jsou vodorovně, svisle i šikmo od jeho pozice, samohybné dělo ovládá palbou všechna políčka nacházející se vodorovně a svisle od jeho pozice, BVP všechna políčka šikmo od jeho pozice a minomet může střílet jen na políčka, která se nachází dvě políčka vodorovně a jedno svisle, nebo naopak dvě svisle a jedno vodorovně od jeho pozice. Pokud tanku, dělu nebo BVP brání ve výhledu jiná jednotka, nemůže střílet na políčka nacházející se za ní. Naopak minomet podobné omezení nemá. Všechny jednotky samozřejmě kontrolují políčka, na kterých stojí. Jak má velitel divize rozmístit své síly, aby ovládaly každé políčko v mřížce 7×7 ?



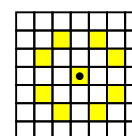
T



BVP



SD

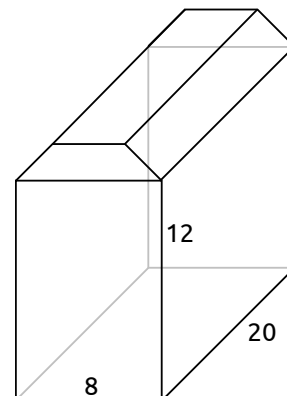


M

Víš, že...? Do soutěže se můžeš zapojit v kterémkoli kole, nejen v tom prvním.

Úloha 3A (7 bodů):

Kocourkov je mezi cestovateli znám jako město nesmyslů, ale na některé z nich vás sebelepší turistický průvodce nepřipraví. Svě o tom ví i rys Roman, který si hned po vystoupení z vlaku všiml, že zde domy nemají střechu. V infocentru se dozvěděl, že domy střechu mají, ale je zakopaná pod zemí. Silné bouře totiž v minulosti způsobily pád několika domů a po mnoha experimentech se ukázalo, že aby dům přestál jakoukoli bouří, musí být zapuštěn trochu do země, konkrétně tak, aby objem podzemní části byl stejný jako objem střechy. Místní si to přebírali po svém a staví domy vzhůru nohama se zakopanou střechou. Roman není běžný turista, ve skutečnosti přijel dohlížet na stavbu nové knihovny, kterou projektuje, a nechce se smířit s představou, že mu z jeho díla udělají ošklivou krabici. Podle plánu by budovu měl tvořit kvádr o rozměrech $8 \times 12 \times 20$ metrů (šířka \times výška \times délka), na němž je položena střecha ve tvaru seřízlého trojbokého hranolu. Šířka a délka střechy je stejná jako šířka a délka budovy. Výška střechy byla původně rovna polovině šířky domu, avšak po seříznutí se dvakrát zmenšila a šířka horní strany je stejná jako původní výška střechy. Objem *neseříznuté* střechy se vypočítá ze vzorce

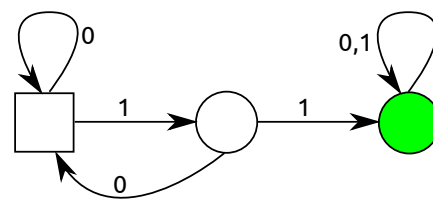


$$V = \frac{(\text{šířka střechy}) \cdot (\text{výška střechy}) \cdot (\text{délka střechy})}{2}$$

Roman chce knihovnu samozřejmě postavit se střechou nahoře, což znamená, že aby po první prudší bouři nespadla, musí určitou část budovy zakopat pod zem. Jak hlubokou jámu mají dělníci vykopat?

Úloha 4A (9 bodů):

Svišť Jiří provádí velmi tajný výzkum - tak tajný, že jen on zná jeho detaily a praktický význam. Aby výsledky nepadly do nepravých rukou, zamkl je doma ve sklepe pomocí kódového zámku, který se odemkne jen po zadání supertajného kódu 11. Zámek má na klávesnici znaky 0 a 1 a můžeme si jej představit jako automat s několika vnitřními stavy, mezi kterými přechází podle toho, jaké tlačítko bylo stisknuto na klávesnici. Stavový diagram zámku, který Jiří používá, je na obrázku vpravo. Na začátku se nachází ve stavu znázorněném čtverečkem a dokud Jiří mačká na klávesnici 0, také v něm setrvává. Jakmile však stiskne 1, přejde zámek do druhého stavu a pokud potom stiskne opět 1, přejde do koncového stavu (zelené kolečko) a odemkne se. Následuje-li však po první 1 tlačítko 0, přejde zámek zpět do počátečního stavu. Jakmile se zámek odemkne, setrvává v tomto stavu bez ohledu na vstup z klávesnice. Jiří si uvědomuje, že kód 11 není příliš bezpečný, protože existují jen 4 různé sekvence délky 2 složené z nul a jedniček. Dokážete nakreslit stavový diagram kódového zámku, do kterého by Jiří postupně zadával z klávesnice cifry 0 a 1 a odemkl by se jen tehdy, pokud by posledních 10 cifer bylo 1101110011 (podobně jako se starý zámek odemkl, jestliže poslední dvě cifry byly 11)?



Úloha 5A (5 bodů):

Každý rok na podzim přijímá Spolek zasloužilých zvířátek (SZZ) nové členy. Přijímací řízení probíhá po celý rok a zájemci v něm musí prokázat svou chytrost složením několika zkoušek, svou výřečnost učením na univerzitě, svou spisovatelskou zdatnost publikováním alespoň dvou článků o padání šišek v lese, všeobecný přehled sepsáním a obhajobou svého názoru na budoucnost vědy a navíc je každému přidělen mentor, který pravidelně píše posudky, jak si dotyčný zájemce vede. Divočák Zdeněk splnil všechny požadavky se ctí a nyní stojí před poslední překážkou - závěrečnou zkouškou, která může definitivně potvrdit nebo zhatit jeho přijetí. Zdeněk dostal čísla 4, 1, 3, 5, 2 zapsaná na proužku papíru a jeho úkol je seřadit je od nejmenšího po největší. Aby to neměl tak jednoduché, může pouze proužek rozstříhnout mezi dvěma čísly, vzniklé části otočit (může si vybrat, zda obě, jen jednu, nebo žádnou), prohodit (opět si může vybrat, zda ano či ne), slepit znovu izolepou a tento postup opakovat tak dlouho, dokud nejsou čísla seřazená. Zdeněk je bohužel velký trémista a nemůže přijít na správný postup, takže to vypadá, že poslední zkoušku nezvládne. Pomůžete mu?

Ahoj!

Vítej v V. ročníku korespondenční soutěže Jáma Lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6.–9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma Lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Tebe čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se můžeš přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísľuj.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 32 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Své řešení nám pošli do **10. ledna 2014** na email jamalvova@jamalvova.cz nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma Lvová,
Rektorát ČVUT,
Žitkova 4,
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Zuzka, Honza, Lukáš, Martin, Pepa, Petr, Štefan, Tomáš a Tomáš.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):

Myšky zlodějky se pokouší proniknout do tajné skrýše kočky Máši, kde by se podle všeho měly nacházet piškotky, sýr a jiné dobrotky. Dveře ke skrýši jsou bohužel zamčeny zámekem s pětimístným kódem, který si Máša pečlivě střeží a žádná myška ho nikdy neviděla. Z odposlechů Mášina telefonu se však přeci jen nějaké informace podařilo zjistit:

- Kdyby se bral kód jako číslo, byl by dělitelný 3.
- Žádná číslice se v kódu nevyskytuje více než jednou.
- Součet třetí a čtvrté cifry je roven 7.
- Součet poslední a druhé číslice je roven první číslici.
- Nejmenší ze všech je čtvrtá cifra.
- Třetí cifra je trojnásobek poslední číslice.
- Součet všech číslic je 20x menší než součin těchto cifer.

Jaká kombinace odemkne zámek na dveřích do skrýše?

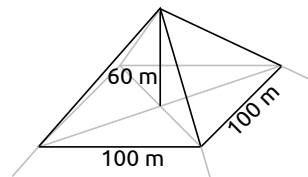
Úloha 2B (6 bodů):

V Království zvířat se hra Kámen, nůžky, papír hraje trochu jinak, než jsme zvyklí. Zvířátka od sebe stojí přesně 22 metrů, naráz vyběhnou proti sobě a v okamžiku, kdy jsou od sebe vzdálena 7 metrů, si stříhnou. Vítěz potom honí poraženého a pokud nechce, aby hra skončila nerozhodně, musí ho chytit dříve, než se dostane do výchozí pozice. Želva Tarquinius a leguán Evžen se nemohou shodnout, kdo z nich je chytřejší, a tak si chtějí stříhnout. Evžen se zvládne pohybovat rychlostí 35 centimetrů za sekundu. Tarquinius uběhne pouhých 15 centimetrů za sekundu a navíc po stříhnutí musí 4 vteřiny přemýšlet, zda je on tím pronásledovaným, nebo jestli má naopak nahánět svého soupeře. V tomto konkrétním případě vyhrál stříhání Evžen. Stihne Tarquinia chytit dříve, než se dostane do bodu, ze kterého vybíhal?

Víš, že...? Do soutěže se můžeš zapojit v kterémkoli kole, nejen v tom prvním.

Úloha 3B (7 bodů):

Dikobraz Leoš se vypravil na výzkumnou výpravu do polárních moří. Cestou zahlédl velice zvláštní plující ledovou kru: má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu (jeho podstavou je tedy čtverec) a Leoš pečlivým měřením zjistil, že výška té části kry, která vyčnívá nad hladinu, je 60 m a délka strany na styku s vodní hladinou je 100 m. Jak známo z Archimédova zákona, hmotnost kapaliny vytlačené tělesem do ní ponořeným je rovna hmotnosti tohoto tělesa a objem vytlačené kapaliny je roven objemu jeho ponořené části. Hustota ledu je $0,917 \text{ g/cm}^3$, hustota mořské vody je $1,025 \text{ g/cm}^3$ a objem jehlanu určíme podle vztahu



$$V_{\text{jehlan}} = \frac{S_p \cdot v}{3},$$

kde S_p je obsah podstavy a v je výška jehlanu. Jaký je celkový objem kry, jak je vysoká a jak dlouhá je strana čtverce tvořícího její základnu? A je kra vyšší než Cheopsova pyramida v Gíze? Náповěda: využijte toho, že jestliže mají dva různě velké trojúhelníky shodné všechny vnitřní úhly, pak délky stran prvního trojúhelníka vypočítáme prostým vynásobením délek odpovídajících stran druhého trojúhelníka nějakým číslem k .

Úloha 4B (9 bodů):

Archeologové v Království zvířat se snaží porozumět písmu mnoha zaniklých civilizací. Třeba příslušníci kmene Alagebra měli ve zvyku zdobit si stěny své jeskyně matematickými výrazy a byli tak líní, že než by zapsali součet několika čísel jako $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$, zkracovali jej pomocí symbolu \sum (čti suma). Pod ni psali index prvního sčítance a nad ni index posledního sčítance, takže třeba již zmiňovaný součet $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ by zapsali jako $\sum_{i=1}^n x_i$. Index prvního sčítance

nemusel být nutně 1, např. $x_{15} + x_{16} + x_{17}$ lze pomocí sumy zapsat takto: $\sum_{i=15}^{17} x_i$. A když chtěli Alagebráné sečíst všechna celá

čísla mezi -5 a +7, napsali prostě $\sum_{i=-5}^7 i$. Podobně efektivně uměli zapsat i součin několika čísel: třeba $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=1}^n$

(jak říkali Alagebráné symbolu \prod je nejasné, nejspíše jej nazývali slovem produkt). Stejně jako u sumy, ani v případě násobení nemusel být první index roven 1: Např. součin všech celých čísel od 4 do 12 by se zapsal $\prod_{i=4}^{12} i$. Archeologové byli schopni rozluštit téměř všechny nápisy nalezené na stěnách jeskyně až na jeden:

$$y = \frac{\prod_{i=2}^6 \left(\binom{64}{\sum_{j=i}^6 j} - \binom{64}{\sum_{k=1}^6 k} \right)}{\prod_{i=1}^4 \left(\binom{i}{\sum_{j=1}^i j} \right)^{i-1}}$$

Pomůžete jim zjistit, čemu se rovná y ?

Úloha 5B (5 bodů):

Bobr Kryštof se rozhodl, že si postaví dům uprostřed bažiny. Aby se k němu pohodlně dostal, rád by celou bažinu překonal dřevěným chodníčkem vytvořeným z jediného kmene stromu. Když se však rozhlížel v přilehlém lese, zjistil nepříjemnou věc – nerostou v něm dostatečně dlouhé stromy. Pokud si bažinu myšleně rozdělíme mřížkou 7×7 , kmeny nejvyšších stromů vystačí jen na překonání úhlopříčky čtverce s 3×3 políčky, takže Kryštof bude muset postavit chodníček z více kmenů. Aby se nepropadly do bažiny, musí kmeny oběma konci spočívat buď na pevné zemi (tlustá čára kolem bažiny), nebo na jiném, již usazeném kmeni. Zároveň musí oba konce ležet v bodech mřížky a kmeny je možné pokládat jen vodorovně, svisle nebo do úhlopříčky (tak, aby mřížku protínaly jen v jejích bodech). Uprostřed bažiny ani nikde jinde se zatím žádný pevný bod nenachází. Kryštof může pokácené stromy libovolně zkracovat, ale nemůže je spojovat a tím uměle prodlužovat. Pomůžete mu postavit chodníček z dostupných stromů, po kterém by se dostal suchou nohou doprostřed bažiny (černý puntík)?

