

## Ahoj!

Vítej v V. ročníku korespondenční soutěže Jáma Lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6.–9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma Lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Tebe čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očíslej.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 32 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Své řešení nám pošli do **1. listopadu 2013** na email [jamalvova@jamalvova.cz](mailto:jamalvova@jamalvova.cz) nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma Lvová,  
Rektorát ČVUT,  
Žitkova 4,  
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

*Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Zuzka, Lukáš, Martin, Pepa, Petr, Štefan, Tomáš a Tomáš.*

## Kategorie mladší

### Úloha 1A (5 bodů):

Ve vědeckém výzkumu je důležité umět vyjadřovat složité myšlenky jednoduše. Puštík Boris se však rozhodl pro pravý opak – jednoduché věci popisuje co nejsložitěji. Například čísla od nuly do pěti zapisuje zásadně jako výraz, ve kterém jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5 (každé právě jednou), znaménka sčítání, odčítání, násobení a dělení (v jednom výrazu nemusí být všechny) a libovolný počet závorek. Třeba jedničku by zapsal jako  $1 = 4 - 5 + 3 - 2 + 1$ . Dokážete vymyslet výrazy splňující Borisovy požadavky, jejichž výsledkem jsou čísla 0, 2, 3, 4 a 5?



### Úloha 2A (6 bodů):

V Království zvířat je v poslední době velmi populární následující jednoduchá hra. Na začátku je v osudí 12 tyček a hráči se postupně střídají v jejich odebírání. V jednom tahu může hráč odebrat jednu, dvě nebo tři tyčky a vyhrává ten, kdo odstraní poslední zbývající tyčku (tyčky). Nejlepším hráčem široko daleko je kormorán Michal, který objevil, že když hraje jako druhý, může vždy vyhrát bez ohledu na tahy soupeře. Jakou strategii Michal používá? Zapište ji např. v podobě pravidel typu „Jestliže je v osudí tolik a tolik tyček, odeber dvě“.

### Úloha 3A (7 bodů):

V žabím království Mazuria se nachází mnoho jezer a jedno z nich je pověstné pěstováním vzácných leknínů. Jezero je rozděleno na  $10 \times 10$  políček a v každém roste jedna rostlinka. Aby se vzájemně nepletly, přiřadila vrchní pěstitelka žába Iveta každé sazeňičce číslo od jedné do sta (viz tabulka). Každý den ráno se Iveta vydává na obhlídku jezírka. Skáče z jednoho políčka na druhé a vždy, když dopadne na nějaké políčko, potopí příslušný leknín pod hladinu. Lekniny jsou navíc velmi zvláště propojeny šlahouny: Jesliže Iveta skočí na políčko s číslem  $x$ , potopí se kromě  $x$  všechny rostliny, jejichž řádek  $\cdot$  sloupec =  $x$  (ale pozor, nikoli obráceně, jestliže Iveta skočí např. na 16, potopí se následně 72, ale když skočí na 72, 16 se nepotopí). Tyto rostliny potopí díky šlahounům další lekniny a řetězová reakce pokračuje, dokud nejsou všechny takto propojené rostliny pod vodou. Časté potápění však lekninům nesvědčí a Iveta by chtěla, aby její každodenní obhlídky zanechaly co nejméně následků. Pro každý leknín experimentálně zjistila, kolik dalších rostlinek potopí, ale z výsledků není vůbec moudrá, a proto vás prosí o pomoc. Co mají společného čísla leknínů, které nepotopí žádný další leknín, když na ně Iveta skočí? A pomůžete Ivetě najít takovou cestu z políčka 1 na 100, aby na ní potopila co nejméně leknínů? Cesta musí být od startu až do cíle souvislá (Iveta v jednom kroku zvládne skočit jen na vzdálenost jednoho políčka), sousedící políčka musí sdílet celou hranu (nechce skákat šikmo) a může vést i přes lekniny, které se potopily v důsledku předchozích skoků.

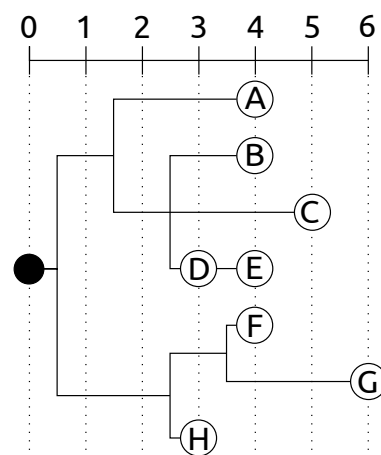
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

### Úloha 4A (9 bodů):

Tarbík Karel se v Království zvířat věnuje studiu biologie a vývoje druhů. Jak známo, veškeré informace o organismu jsou obsaženy v jeho genetickém kódu, který se skládá ze čtyř písmenek: A, C, G a T. Nový druh vznikne ve chvíli, kdy v tomto kódu dojde ke změně jednoho či více písmen. Z jednoho původního druhu se tak časem může vyvinout několik druhů nových a tento proces se popisuje pomocí tzv. fylogenetických stromů (příklad viz obrázek vpravo). Počet změn (co změna to jedno písmeno), ke kterým došlo od okamžiku oddělení od mateřského druhu (označeného černou tečkou), je znázorněn na ose nad stromem a prázdné kroužky s písmenky značí současné druhy.

Karel se v poslední době věnoval především vývoji motýlů, získal genomy a s jejich pomocí sestavil fylogenetický strom, který vidíte na obrázku. Bohužel si ale zapomněl poznamenat, který kroužek označuje který druh; jediné, co mu zbylo, je právě náčrtek stromu a genetické kódy jednotlivých druhů:

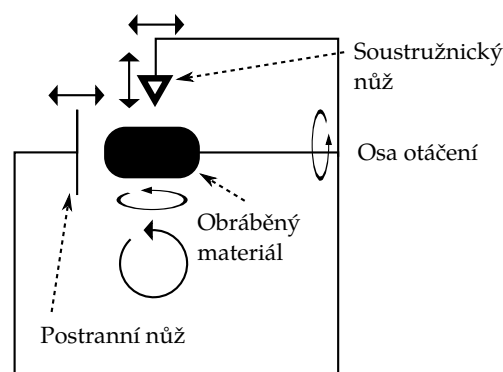
dědouška polní maršál	ACAGTGCTCAAGCAATGAGC
panovník přelétavý	AGAGTGCCTAAGTAATGACC
přemyslík anýzový	GCTGTGCTTAAGCAATGAGC
slonovinovec zlatořemen	ACAGTGCTCAAGCAACGAGC
svítánek malinikovitý	CCAGTGCCTAAGGACTGCGC
temnoň modronosý	ACAGCGCTTAAGGAATGAGT
tkadlevník rysí	CCAATATCTAAGGAATGTGC
vlčej životrup	CCAGTACCTAAGGAATGCTC



Pomůžete Karlovi určit, který kroužek představuje který druh, a jaký byl genetický kód předka všech zkoumaných motýlů?

### Úloha 5A (5 bodů):

Lišák Ivan je jeden z nejzručnějších inženýrů v království zvířat. Na svém soustruhu vyrábí různé vázičky, misky, figurky a spoustu dalších předmětů. Ivanův soustruh si můžeme zjednodušeně představit jako stroj, do kterého se upevní obráběný materiál, jímž se velmi rychle otáčí podle vyznačené osy a je možné ho buď v jednom místě ztenčovat pomocí soustružnického nože nebo na jedné straně (nalevo) seříznout pomocí postranního nože. Když je soustruh vypnutý, umožňuje otočit s obráběným materiálem kolem libovolné osy o libovolný úhel (přesně ho nastavit). Vestavěná pravítka navíc usnadňují měření jeho rozměrů, takže je např. možné materiál přesně seříznout postranním nožem na zvolenou šířku. Soustruh je ideální na obrábění „kulatých“ předmětů. Jak má ale Ivan postupovat, když si chce vyrobit krychli o délce hrany 1 cm? Předpokládejte, že Ivan má k dispozici dostatečně velký kus materiálu a nemusí tedy nic slepovat.



## Ahoj!

Vítej v V. ročníku korespondenční soutěže Jáma Lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6.–9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma Lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Tebe čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očíslej.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 32 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Své řešení nám pošli do **1. listopadu 2013** na email [jamalvova@jamalvova.cz](mailto:jamalvova@jamalvova.cz) nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma Lvová,  
Rektorát ČVUT,  
Zikova 4,  
166 36 Praha 6

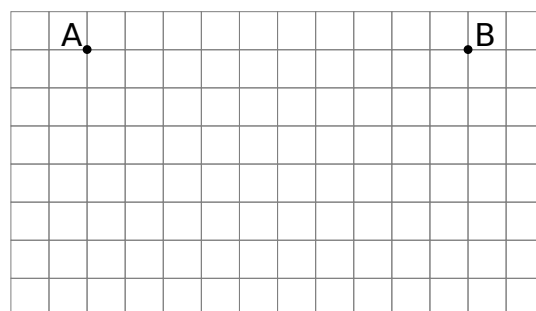
Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

*Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Zuzka, Lukáš, Martin, Pepa, Petr, Štefan, Tomáš a Tomáš.*

## Kategorie starší

### Úloha 1B (5 bodů):

Outloň Josef ve svém volném čase rád montuje prapodivná zařízení složená z koleček. Kostra jednoho takového zařízení je na obrázku vpravo (rozměry každého čtverečku jsou  $10 \times 10$  cm). Josef by rád do bodů A a B namontoval kolečka tak, aby stačilo točit s jedním a druhé se točilo samo stejnou rychlostí, ale opačným směrem. Josef má k dispozici dvě kolečka o poloměru 10 cm, dvě o poloměru 20 cm, jedno s poloměrem 30 cm a jedno 40 cm. Kolečka může připevnit jen do rohů malých čtverečků. Aby jedno kolečko točilo s druhým, nesmí mezi nimi být žádná mezera a ani se nesmí překrývat. Např. aby kolečko o poloměru 10 cm točilo s velkým 40 cm kolem, musí být jejich středy přesně 50 cm od sebe. Rychlosti dvou dotýkajících se koleček (měřené v otáčkách za minutu) jsou v opačném poměru než jejich poloměry: Točí-li např. kolem o poloměru 40 cm kolečko o poloměru 10 cm, bude rychlost velkého kola  $4 \times$  menší. Jak má Josef namontovat dostupná kolečka (nemusí použít všechna a kolečka mohou přechřívát mimo kostru), aby se ta připevněná do bodů A a B otáčela stejnou rychlostí, ale opačným směrem?



### Úloha 2B (6 bodů):

Rybka Terka pluje po řece do moře. V cestě jí však stojí dva veliké víry, které by jí mohly ošklivě ublížit. Jsou od sebe vzdálené 8 metrů a Terka vidí, že ten nalevo roztáčí  $9 \times$  více vody než ten napravo. Terka se k moři velmi těší, a tak přemýšlí, jak mezi nimi bezpečně proplout. Z rybí školy si pamatuje, že síla  $F$ , kterou ji vír přitahuje, se dá spočítat podle vzorečku

$$F = \frac{m \cdot m_v}{r^2},$$

kde  $m$  je její hmotnost (kterou si bohužel nepamatuje),  $m_v$  je množství vody ve víru a  $r$  je její vzdálenost od víru. Pro Terku je nejbezpečnější proplout mezi víry tak, aby se přitažlivá síla levého víru rovnala přitažlivé síle pravého víru. Jak daleko má od nich plavat, aby tomu tak bylo? Nápodvěda: během úprav výrazu odolejte pokušení roznásobit závorku na druhou a využijte toho, že výsledná vzdálenost  $r < 8$  m.

**Úloha 3B (7 bodů):**

Los Piotr si postavil příbytek uprostřed bažin. Přestože zde panuje naprostý klid, má jeho dům i nevýhody – když se jde Piotr napít k řece, vždy se hrozně umaže od bláta. Piotrova bažina je rozdělená na  $5 \times 5$  políček a na každém buď roste tráva (T), nebo rákosí (R), nebo je zde březový háj (B), a nebo holina (H). Piotr přiřadil každému políčku pomyslnou cenu podle toho, jak moc se zde propadne: tráva = 1 (tráva poskytuje dobrou oporu), rákosí = 2, březový háj = 3, holina = 4, políčko X má cenu 0 a Y ohodnotil cenou 1. Rád by našel takovou cestu ze svého obydlí (políčko X) k řece (Y), aby její celková cena byla co nejmenší. Cesta musí být souvislá (Piotr nedokáže nějaké políčko přeskočit) a sousedící políčka musí sdílet celou hranu. Piotr si vzal plánek bažiny a začal hledat nejlepší cestu následujícím způsobem:

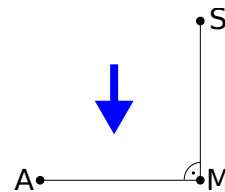
B	R	B	R	Y
H	T	T	R	T
T	B	R	B	R
B	H	H	B	H
X	R	T	B	R

- Ke každému políčku (označme jej písmenem p) si pamatuje dvě čísla:
  - Odhad ceny cesty z X na políčko p (označíme  $CESTA(X,p)$ ). Na začátku je  $CESTA(X,X) = 0$  a do všech ostatních 24 políček  $CESTA(X,p) = 1000$ . Tento odhad se během prohledávání bude měnit.
  - Odhad ceny cesty z políčka p do cíle:  $ODHAD(p,Y) = (\text{počet kroků z políčka p do Y, kdyby všude rostla tráva})$ .
- Krok 1:** Jdi (přesuň prst) na takové políčko p, jehož  $CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y)$  je nejmenší mezi všemi dosud nenavštívenými políčky (na začátku to bude přímo X). Je-li takových políček více, vyber si jedno z nich náhodně.
- Krok 2:** Prohlédni si (ale nechoď na ně) všechna dosud nenavštívená políčka sousedící s p (označme je písmenem q) a pokud pro některé  $CESTA(X,q) > CESTA(X,p) + CENA(q)$ , nastav  $CESTA(X,q) = CESTA(X,p) + CENA(q)$ .  $CENA(q)$  značí cenu políčka q.
- Krok 3:** Jestliže existuje nějaké zatím nenavštívené políčko p, jehož  $CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y) < CESTA(X,Y)$ , běž na krok 1, jinak skonči.

Která políčka Piotr navštíví při prohledávání plánu bažiny? A jak vypadá nejlepší cesta z X do Y a jaká je její cena?

**Úloha 4B (9 bodů):**

Labuť Mariana žije na nepřístupné pláži na břehu řeky Biebrzy, v níž teče voda rychlostí 3 km/h. Jako každý rok, i letos se chystá po prázdninách navštívit své dva kamarády, jespáka Alexandra a jeřába Sergeje. Alexandr (v obrázku označen písmenem A) žije na druhém břehu, který je od Marianiny pláže (M) vzdálen 4 km. Sergej (S) žije na stejném břehu jako Mariana 4 km proti proudu (řeka je zde velmi široká a má rovné koryto). Mariana dokáže na klidné vodě plavat rychlostí 5 km/h. Když plave směrem k Sergejovi, její rychlost vůči břehu je rovna rozdílu rychlosti Mariany a proudu řeky, zatímco zpátky se rychlosti sčítají. K Alexandrovi ovšem nemůže plout přímo, protože by ji proud odnesl pryč. Namísto toho si na protějším břehu vybere nějaký bod a odstartuje přímo k němu. Protože ji ale během plavby unáší proud, přistane na druhém břehu přímo u Alexandra. Cesta jí zabere stejnou dobu, jakou by se na klidné vodě plavila k vybranému bodu, a lze si ji představit jako složení cesty k vybranému bodu na klidné vodě a unášení se proudem. Který výlet zabere Marianě více času, k Alexandrovi a zpět, nebo k Sergejovi a zpět?


**Úloha 5B (5 bodů):**

Bažant Václav je v království zvířat považován za odborníka na botaniku. O své znalosti by se chtěl podělit i s ostatními zvířátky a vytvořit pro ně příručku, jak určit druh neznámé rostliny, na kterou narazí v přírodě. V království zvířat roste jen 8 druhů bylin a Václav ze zkušenosti ví, že mají následující vlastnosti (více možností znamená, že v přírodě lze najít některé exempláře s první hodnotou, jiné s druhou hodnotou atd.):

	Typ listů	Barva květů	Počet okvětních lístků	Průřez stonku	Výška	Místo výskytu
šípátka střelolistá	jednoduché	bílá	3	hranatý	1-10 cm, 10-100 cm	louky, bažiny
pětsil nachový	složené	červená	5	kulatý	do 1 cm, 1-10 cm	les, louky
sokolík chlupáček	složené	bílá	5	kulatý	do 1 cm, 1-10 cm, 10-100 cm	bažiny
karajka rozkladitá	jednoduché	bílá	4	kulatý	10-100 cm, nad 100 cm	les, louky
krtinka obrovská	složené	červená	5	kulatý	10-100 cm, nad 100 cm	les, louky
jamník blízký	složené	bílá	3	hranatý	1-10 cm, 10-100 cm, nad 100 cm	les, louky, bažiny
breklík trpasličí	jednoduché	bílá	4	kulatý	do 1 cm, 1-10 cm	les, louky, bažiny
třesť bahňavá	jednoduché	červená	5	kulatý	10-100 cm, nad 100 cm	bažiny

Václav by rád sestavil identifikační klíč tak, že při určování neznámé rostliny budou zvířátka odpovídat na různé otázky týkající se jejich vlastností (např. jak je rostlina vysoká) a podle odpovědi se přesunou k další otázce (ilustrace viz obrázek vpravo). Jak má Václav klíč sestavit, aby k určení libovolné rostliny stačily nejvýše tři otázky?

