Ahoj!

Vítej ve IV. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6.–9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Tebe čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma**! Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísluj.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 32 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže **http://www.jamalvova.cz**.

Své řešení nám pošli do 18. ledna 2013 na email **jamalvova@jamalvova.cz** nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma lvová,
Rektorát ČVUT,
Zikova 4,
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí

Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Lukáš, Pepa, Martin, Tomáš, Tomáš a Štefan.

Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):

I zvířátka v teplých krajích slaví Vánoce a rozhodla se, že si ozdobí palmu. Už to mají skoro hotové a zbývají jim jen 4 velké listy a dvě sady ozdobiček, z nichž v každé je jedna 20, 30, 40, a 50gramová ozdoba. Ty chtějí zvířátka rozložit po listech tak, aby byly všechny listy rovnoměrně zatížené. Zatížení se vypočítá jako hmotnost ozdoby krát její vzdálenost od středu koruny. Pokud je ozdob více, zatížení se jednoduše sečtou dohromady.
Na každém listu jsou dva háčky, jeden na konci a druhý přibližně uprostřed. První list je dlouhý 2 metry a druhý háček má ve vzdálenosti 1 metr od kmene, druhý list 1 metr a 0,5 metru, třetí 1,5 a 0,5 metru a čtvrtý 1,5 a 1 metr. Jak mají zvířátka rozvěsit ozdoby, pokud chtějí mít na největším listu 20 a 30gramovou ozdobu?

Úloha 2A (6 bodů):

Pes Pauli je vášnivý chovatel brouků druhu electronus fermionsis, jež mají velmi zvláštní nároky na životní prostor. Lze je chovat jen ve speciálních krabičkách (v každé maximálně dva), které se navíc vyrábí pouze ve skupinách: jedna krabička se v chovatelské hantýrce nazývá orbital s, tři spojené tvoří orbital p, pět orbital d a sedm orbital f. Orbitaly se vyrábí v různé kvalitě, která se označuje čísly 1, 2, 3, 4 (1 znamená nejhorší, 4 nejlepší). Čím horší kvalita, tím méně verzí orbitalu lze koupit, takže orbital kvality 1 se prodává jen ve verzi s, orbital kvality 2 existuje ve verzích s, p, kvality 3 ve verzích s, p, d a nejlepší orbitaly lze sehnat ve všech verzích. Orbitaly se podle kvality a verze značí 1s, 4d, 2p atd. Pokud chce Pauli udržet brouky dlouhodobě při životě, musí jim postavit hnízdo podle následujících pravidel:

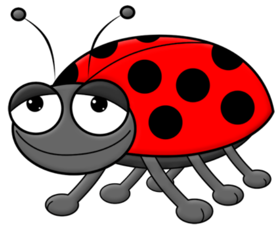
- Orbitaly se věší do vrstev pod sebe, v každé vrstvě je právě jeden.
- Nový orbital je možné pověsit až ve chvíli, kdy je ten předchozí zcela zaplněný.
- Rozhodujeme-li se mezi dvěma orbitaly, dříve pověsíme ten, který má součet kvalita + (počet krabiček-1)/2 menší.
- Jestliže mají dva orbitaly součet kvalita + (počet krabiček-1)/2 stejný, pověsíme dříve ten méně kvalitní.

Víš, že...? Každý rok se tábora účastní i náhradníci za výherce, kteří jet nechtěli. Šanci máš tedy vždycky!

Snem každého chovatele je vybudovat si tzv. vzácné hnízdo, které má zaplněné všechny vrstvy až po nějaký orbital p (včetně): hnízdo Neon po 2p, hnízdo Argon po 3p a Krypton po 4p. Kolik brouků musí Pauli nasbírat v makovém poli, aby mohl vybudovat hnízdo Neon? Přes veškerou snahu se mu však podařilo vyčenichat o 2 brouky méně, než potřebuje. Se kterými ze svých kamarádů by měl spojit svůj chov, jestliže chce přesto získat vzácné hnízdo? Enrico vybudoval hnízdo Argon, Werner má hnízdo Neon a 4 brouky navíc, Niels vlastní 22 brouků a Louis 6 brouků.

Úloha 3A (7 bodů):

Berušky Klárka, Anča, Domča, Bětka a Sylva se rozhodly spočítat své tečky. Kamarádky jim prozradily, že součet jejich teček je dělitelný pěti a žádná z nich nemá stejný počet puntíků. Anča vidí, že Klárka má o 1 tečku méně než Domča, Domča vidí, že Anča má o 6 teček více než beruška s nejmenším počtem flíčků (samozřejmě neví, jestli sama nemá ještě méně), Bětka vidí, že Anča má ze zbylých 4 berušek (mimo ni, na své krovky opět nevidí) nejvíce teček. Domča ještě zpozorovala, že Bětka má o 4 tečky více než Sylva, a Anča s Bětkou jako nejlepší počtářky zjistily, že vidí na svých kamarádkách 17 a 19 flíčků. Mohou nyní poznat, kolik teček má každá z nich, pokud je všeobecně známé, že berušky bez teček neexistují a ty s více než 11 také ne? A kolik teček bude mít šestá beruška Hanka, která se k nim přidá, pokud berušky vidí, že i s ní je počet jejich teček stále dělitelný 5?



Úloha 4A (9 bodů):

Velbloud Libor se v království zvířat stará o zaznamenávání různých matematických konstant pro budoucí generace. Desetinná čísla uchovává v několika podobách, z nichž jedna je řetězový zlomek v následujícím tvaru:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

kde a, b, c, d ... jsou přirozená čísla. Jednou z nejdůležitějších konstant je π, které Libor uchovává s přesností na tři desetinná místa. Jak vypadá řetězový zlomek reprezentující číslo $3,141$?

Úloha 5A (5 bodů):

Medvěd Míša onemocněl zákeřnou formou moru, a proto se vydal ke své lékařce, sově Karle, která má naštěstí účinný lék. Je ve formě tabletek, z nichž každá obsahuje přesně 10 mg účinné látky. Karla ví, že mor je vyléčen až ve chvíli, kdy je obsah léčivé látky v těle alespoň 3 mg na každý kilogram váhy. Lék však z těla průběžně ubývá, a to rychlostí 0,5 mg/hod. Kolik tabletek musí Karla předepsat a jak dlouho bude léčba trvat, jestliže Míša váží 500 kg a bude každých 8 hodin brát 6 tabletek? První dávku si vzal v pondělí v sedm hodin ráno - kdy si vezme poslední? A jak se výsledek změní, když bude zapomnětlivý Míša brát stejnou dávku léku každých 9 hodin?

Víš, že...? Do soutěže se můžeš zapojit v kterémkoli kole, nejen v tom prvním.

Ahoj!

Vítej ve IV. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6.–9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Tebe čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma**! Ještě než se vrhneš do víru zadání, přečti si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžeš přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napiš svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Tě (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu piš na samostatný papír A4. U horního okraje napiš své jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísluj.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým ses dostal/a k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíš, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžeš získat body.
- V tomto kole můžeš dohromady získat 32 bodů. Nemusíš řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sleduj webové stránky soutěže **http://www.jamalvova.cz**.

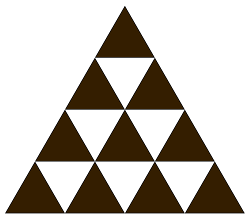
Své řešení nám pošli do 18. ledna 2013 na email **jamalvova@jamalvova.cz** nebo na adresu:

Odbor vnějších vztahů – Jáma lvová,
Rektorát ČVUT,
Zikova 4,
166 36 Praha 6

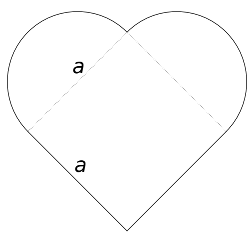
Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení přejí
Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Lukáš, Pepa, Martin, Tomáš, Tomáš a Štefan.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Křeček Adéla si dělá zásoby na zimu. Nejraději má zvláštní druh oříšků, které musí být neustále ofukovány studeným vzduchem, aby se nezkazily. Adéla je proto skladuje po jednom v krabičkách ve tvaru pravidelného čtyřstěnu (těleso, jehož všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky). Z krabiček sestavila následujícím způsobem mnohapatrovou pyramidu: Na podlahu své spižírny poskládala krabičky tak, aby se jejich podstavy dotýkaly jen v rozích a dohromady vytvořily jeden velký (děravý) rovnostranný trojúhelník (příklad pohledu shora je na obrázku vpravo). Na ně začala pokládat další krabičky, a to vždy tak, aby spočívaly na třech vrcholech krabiček pod nimi. Jakmile zcela zaplnila druhé patro, pokračovala třetím, čtvrtým atd., dokud se nedostala až na vrchol. Adéla otevřela ve spižírně všechna okna a nechala studený vzduch proudit, ale pak si uvědomila, že vlastně neví, zda jí zásoby vystačí na celou zimu. Kolik oříšků má Adéla ve spižírně, jestliže je skladuje v pyramidě o 15 patrech a všechna patra jsou zcela zaplněná?



Úloha 2B (6 bodů):
Oslík Jindřich peče pro zvířátka každé Vánoce cukroví ve tvaru srdce. Formičku si můžete představit jako čtverec o straně a centimetrů, ke kterému jsou připojeny dvě půlkružnice o průměru rovněž a centimetrů (obrázek vpravo). Nebyl by to ale Jindřich aby své dílo nějak neozvláštnil: formičku si vyrobil tak velkou, aby se obsah srdce číselně rovnal jeho obvodu. Čemu se rovná a?



Víš, že...? Každý rok se tábora účastní i náhradníci za výherce, kteří jet nechtěli. Šanci máš tedy vždycky!

Úloha 3B (7 bodů):
Lachtan Hans žijící v nehostinných končinách Antarktidy má v poslední době nepříjemně studené ploutve. Pořídil si proto speciální ohřívací láhev – vždy ji nahřeje na určitou teplotu a poté ji drží v ploutvích tak dlouho, dokud není teplota lahve a ploutví stejná. Hans ví, že pro tepelnou výměnu platí rovnice:

$$c_1 m_1 (t - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t),$$

kde c_1 a c_2 je tzv. tepelná kapacita ploutví/lahve (která zůstává stále stejná), m_1 a m_2 je hmotnost ploutví/lahve (také se nemění), t_1 je počáteční teplota ploutví, t_2 počáteční teplota lahve a t výsledná teplota. Tepelná výměna probíhá pouze mezi lahví a ploutvemi, teplo se nikde neztrácí a uvnitř lahví je tekutina, kterou lze nahřívat téměř libovolně, protože vaří až při 350 °C. Počáteční teplota Hansových ploutví je 15 °C. Když si Hans láhev nahřál na 75 °C, ohřály se mu ploutve na 27 °C. Hans by ale chtěl, aby jeho ploutve měly příjemnou teplotu 37 °C. Na kolik stupňů si musí láhev nahřát? A co kdyby si pořídil ohřívací láhev o dvakrát větší hmotnosti, změnil by se nějak výsledek?

Úloha 4B (9 bodů):
Tučňák Simeon luští písmo starověkých Poissonů. Právě teď se snaží přijít na kloub jejich zvyklostem v zápisu matematických výrazů. Zatím zjistil, že Poissonové používali dva způsoby: obřadní a všední. Příklad výrazu v obřadním zápisu je třeba

$$\dot{T} = \left\{ \frac{p^2}{2m}, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \right\}$$

kde k a m jsou nějaká čísla. Simeon si s tímto výrazem dlouho vůbec nevěděl rady, dokud neobjevil hliněnou tabulku s pravidly, jak převést obřadní zápis na všední:

$$\{x, x\} = 0 \quad \{p, p\} = 0 \quad \{x, p\} = 1 \tag{1}$$

$$\{x, p\} = -\{p, x\} \quad \{p, x\} = -\{x, p\} \tag{2}$$

$$x^2 = x \cdot x \quad p^2 = p \cdot p \tag{3}$$

Je-li α nějaké číslo, potom

$$\{\alpha f, g\} = \alpha\{f, g\} \quad \{f, \alpha g\} = \alpha\{f, g\} \tag{4}$$

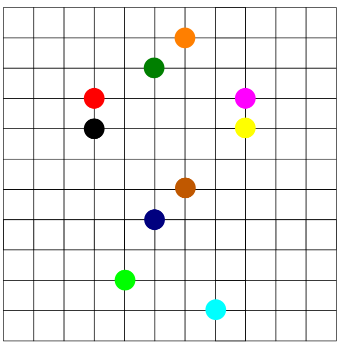
Pro libovolné výrazy f, g a h platí

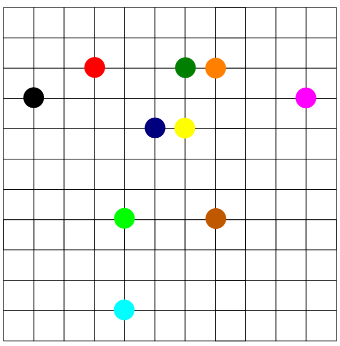
$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \quad \{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\} \tag{5}$$

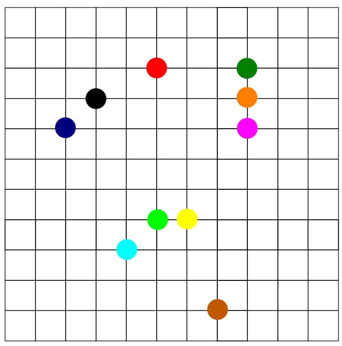
$$\{f \cdot g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad \{f, g \cdot h\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h \tag{6}$$

Jak vypadá $\dot{T}$ ve všedním zápisu?

Úloha 5B (5 bodů):
Veverka Terka by si ráda udělala pořádné zásoby na zimu, a proto se vydala do lesa na houby. Bohužel ale natrefila na zvláštní druh atletických hub, které pravidelně mění svou polohu - mají totiž pod zemí vybudovaný systém chodeb, kterými se přesouvají. Chodby mohou vést pouze po vyznačených čarách (vodorovných a svislých, ne po úhlopříčkách), tvoří uzavřený okruh a nikde se nekříží. Každá houba se při každé změně může posunout o jedno, dvě, nebo maximálně tři políčka, nikdy ale nemůže žádnou jinou houbu předběhnout. Terka si nakreslila, jak byly houby rozmístěny ve třech po sobě následujících okamžicích, avšak nedokáže z obrázku vyčíst, kudy přesně vede podzemní chodba, kterou se houby pohybují. Dokážete jí poradit?


1)


2)


3)

Víš, že...? Do soutěže se můžeš zapojit v kterémkoli kole, nejen v tom prvním.