

## Milí přátelé!

Vítáme Vás ve III. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. - 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Vás čeká 5 záložných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhnete do víru zadání, přečtěte si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžete přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napište svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Vás (např. kvůli účasti na tábore) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu pište na samostatný papír A4. U horního okraje napište Vaše jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísľujte.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým jste se dostali k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíte, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžete získat body.
- V tomto kole můžete dohromady získat 32 bodů. Nemusíte řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sledujte webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Svá řešení posílejte do **20. ledna 2012** na adresu:

Odbor vnějších vztahů - Jáma lvová  
Rektorát ČVUT  
Žitkova 4  
166 36 Praha 6

nebo na email [jamalvova@jamalvova.cz](mailto:jamalvova@jamalvova.cz).

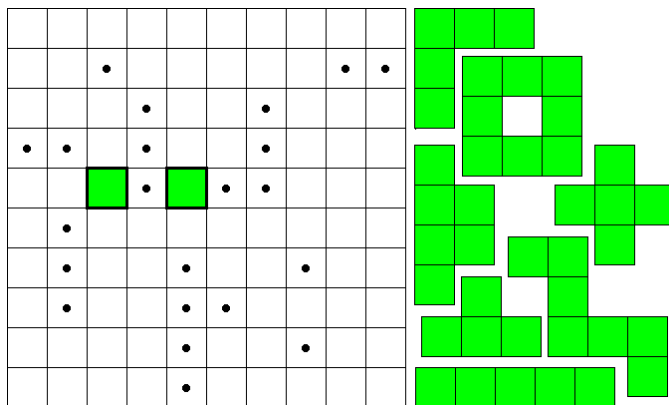
Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení Vám přejí

*Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Terka, Verča, Lukáš, Pepa, Tomáš, Tomáš a Štefan.*

## Kategorie mladší

### Úloha 1A (5 bodů):

Při každoročním cvičení námořních sil Království zvířat spolu svedly dělostřelecký soubor jednotky kachniček a vyder. Každá jednotka obsadila jedno jezírko a rozdělila si jej na 10 x 10 čtverců. Její členové se rozdělili do několika menších skupin a utvořili formace (jejich tvary a orientaci protivník zná, ale přesnou polohu nikoli). Dvě formace se nesmí dotýkat ani hranou ani rohem. Oba týmy po sobě střídavě střílí malé žabky a podle toho, zda se ozve žblunknutí nebo tupé plesknutí usoudí, zda je na daném políčku voda nebo člen nepřátelské jednotky (zásakem jej vyřadí z boje). Velitelka admirál-kachnička Verča ví, že vydry utvořily skupiny jako na obrázku vpravo a její jednotka dosud zjistila stav několika políček na nepřátelském jezírku (zelená s tlustým rámečkem=vydra, bílá s tečkou=voda, ostatní=neznámé). Verča by ráda dovedla soubor do vítězného konce, avšak k tomu potřebuje znát přesné rozmístění vyder. Poradíte Verče, na která políčka má její jednotka střílet?

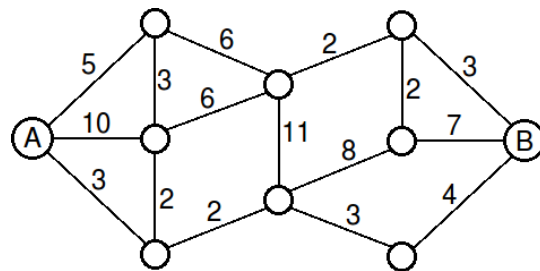


### Úloha 2A (6 bodů):

V Království zvířat funguje mnoho věcí jinak než jsme zvyklí, a tak i měsíce mají jiný počet dní: leden 32, únor 30, březen 31, duben 31, květen 29, červen 28, červenec 32, srpen 31, září 30, říjen 29, listopad 31 a prosinec 31. Kapybara Helena byla pozvána na velkou oslavu, ale nemůže si zapamatovat, ve kterém měsíci se koná. V kalendáři si však všimla, že oslava je ve čtvrtek, následující měsíc v ten samý den je neděle a další měsíc v ten samý den je úterý. Který měsíc by si Helena měla vřít do paměti, nechce-li oslavu propásnout?

### Úloha 3A (7 bodů):

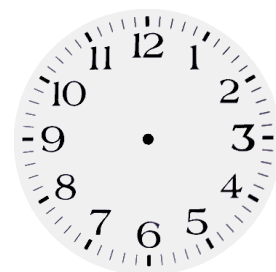
Mezi hlavními městy Království zvířat (A) a království Fägäraş (B) probíhá čilý obchod s jablky. Každý druhý den převáží celé hejno nákladních ježků zásilky z Království zvířat do Království Fägäraş (následující den opačným směrem). Mapa cest mezi oběma městy je nakreslena na obrázku vpravo. Číslo u každé cesty udává počet ježků, kteří po ní mohou projít během jednoho dne (na každé cestě číhají jiná nebezpečí, proto se čísla liší). Aby měla dopravní policie snažší úlohu, mohou na jednom úseku mezi dvěma křižovatkami procházet ježci v daný den jen jedním směrem. Kolik jablek lze s těmito omezeními převézt z království zvířat do Království Fägäraş za jeden den, jestliže každý ježek unese jediné jablko? Mosfetovi loupežníci se sice v obchodu moc nevyznají, ale přemýšlí, jaké cesty mají zabarikádovat, aby převoz jablek mezi oběma královstvími zastavili. Nechtějí zatarasit všechny cesty, protože by to trvalo příliš dlouho, ale jen ty nejzranitelnější. Jaké cesty by měli loupežníci zabarikádovat, aby znemožnili převoz jablek mezi královstvími a zároveň součet kapacit zatarasených cest byl co nejmenší (kapacitou cesty se myslí počet ježků, kteří po ní mohou projít během jednoho dne)?



### Úloha 4A (9 bodů):

Keportak Květoslav je nejen zdatný karbaník, ale umí kouzlit i s hodinami. Představte si klasický ciferník s čísly od 1 do 12 a vyberte si libovolné číslo, na kterém začnete, je to jen na Vás! Dále postupujte podle pokynů mága:

- Myslete si libovolné číslo mezi 1 a 12 a jděte o tento počet kroků po směru nebo proti směru hodinových ručiček. Stojíte-li třeba na čísle 4, myslíte si 11 a jdete proti směru hodinových ručiček, skončíte na čísle 5.
- Stojíte-li na lichém čísle, jděte o 1, 3 nebo 5 políček po nebo proti směru hodinových ručiček. Pokud stojíte na sudém čísle, jděte o 2, 4 nebo 6 políček po nebo proti směru hodinových ručiček.
- Jděte po směru hodinových ručiček o tolik kroků, na jakém čísle právě stojíte.



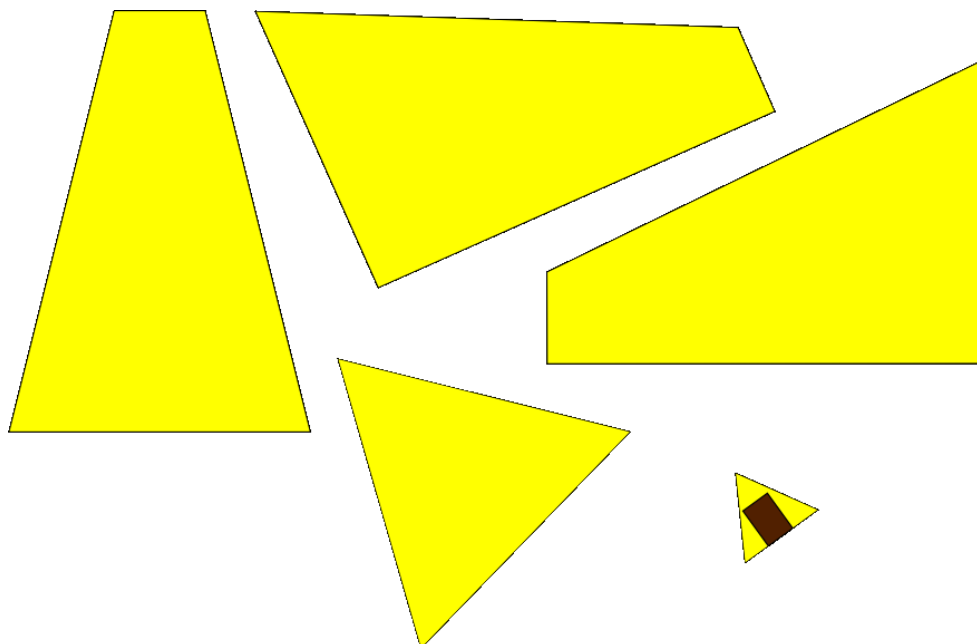
Květoslav se na chvíli zamyslí a prohlásí: „Nyní vím, že nejste na dvojce ani na trojce, takže tyto dvě čísla odstraním. Určitě také nestojíte na číslech 6 nebo 7, takže i tuto dvojici odeberu. A protože nemám rád dvouciferná čísla, odeberu i 10 a 11.“ A pak vyřkne poslední pokyn:

- Jděte po směru hodinových ručiček o tolik kroků, jaké je číslo těsně před tím, na kterém právě stojíte (pozor, některá čísla byla odebrána). Takže pokud nyní stojíte na 1, uděláte 12 kroků po směru hodinových ručiček.

Květoslav se potom zachmuří, pronese magická slova, řekne číslo, na kterém jste skončili, a užívá si zaslouženého potlesku. Jaké číslo Květoslav řekl a jak to mohl vědět, dokážete jeho kouzlo vysvětlit?

### Úloha 5A (5 bodů):

Veverka Petra si zatepluje doupě a aby si dělníci mohli vše připravit, nakreslila pro ně jeho plán. Původně zamýšlela nakreslit kompletní plášť, ze kterého by si dělníci mohli složit model doupěte, ale protože je roztržitá, nakreslila každou stěnu zvlášť. Dokážete nakreslit plášť Petřina doupěte v jednom kuse, aby z něj dělníci mohli složit jeho model? Zatím vědí jen to, že Petřino doupě je uzavřené těleso, žádná stěna nepřesahuje ven, stěny nelze přehýbat a v doupěti také není žádná díra (samozřejmě kromě dveří).



## Milí přátelé!

Vítáme Vás ve III. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. - 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Vás čeká 5 záložných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhnete do víru zadání, přečtěte si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžete přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napište svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Vás (např. kvůli účasti na tábore) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu pište na samostatný papír A4. U horního okraje napište Vaše jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísľujte.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým jste se dostali k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíte, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžete získat body.
- V tomto kole můžete dohromady získat 32 bodů. Nemusíte řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sledujte webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Svá řešení posílejte do **20. ledna 2012** na adresu:

Odbor vnějších vztahů - Jáma lvová  
Rektorát ČVUT  
Žitkova 4  
166 36 Praha 6

nebo na email [jamalvova@jamalvova.cz](mailto:jamalvova@jamalvova.cz).

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení Vám přejí

*Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Terka, Verča, Lukáš, Pepa, Tomáš, Tomáš a Štefan.*

## Kategorie starší

### Úloha 1B (5 bodů):

Zastupitelstvo obce Platněrov se na výročním zasedání dohadovalo, jak nejlépe využít finanční prostředky z fondu rozvoje města. Starosta navrhl postavit fontánu, pomník nebo orloj, ale radní se nemohli rozhodnout, zda postavit všechny tři stavby, jen dvě, jednu nebo žádnou a neustále se bezvysledně překřikovali. Starosta tedy rázným hlasem požádal zastupitele, aby jeden po druhém přednesli svoje požadavky a konečné rozhodnutí bude takové, které žádný neporušuje:

**Radní 1:** Jestliže postavíme fontánu a nepostavíme k ní orloj, budu proti.

**Radní 2:** Budu proti, jestliže postavíme pomník.

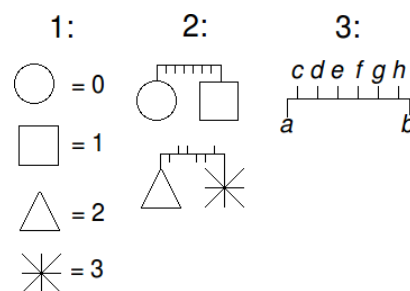
**Radní 3:** Jestliže postavíme orloj a nepostavíme k němu pomník, budu proti.

Jak se má starosta rozhodnout, aby neporušil žádný z těchto požadavků? Majitel firmy stavící orloje chce jednoho radního uplatit, aby svůj požadavek odvolal. Může tak donutit starostu, aby se mohl rozhodnout jedině pro orloj a nic jiného?

### Úloha 2B (6 bodů):

Kontrarozvědka Království zvířat odhalila ve svých řadách dvojitého agenta kraba Vládu, který si všechny získané informace zapisoval tajným písmem. Naštěstí byl trochu nedůsledný, a tak se během vyšetřování našel i návod, jak písmo číst:

Každý symbol zastupuje dvojici písmen a obsahuje libovolnou kombinaci dvou koleček, čtverečků, trojúhelníků nebo hvězdiček. Tyto dva piktogramy jsou spojeny můstkem, ze kterého vychází 6 krátkých čar, některé nahoru, některé dolů (příklady viz obrázek 2 vpravo). Piktogramy i čárky se převedou na číslice, z nich se vypočítá číslo zastupující celý symbol a z něho se následně určí, která dvě písmena kóduje. Kolečko zastupuje číslici 0, čtvereček 1, trojúhelník 2 a hvězdička 3. Pokud čárka na můstku směřuje v daném místě nahoru, převede se na 1, směřuje-li dolů, pak na 0. Všechny části symbolu označíme stejně jako na obrázku 3 vpravo a následně jej převedeme na číslo



$$x = 64(3a + b) + 32c + 16d + 8e + 4f + 2g + h$$

Očíslujeme-li písmena abecedy od 0 do 25, bude symbol zastupovat tuto dvojici písmen:

první písmeno= $\lfloor x/26 \rfloor$ , kde  $\lfloor \cdot \rfloor$  značí zaokrouhlení dolů

druhé písmeno=zbytek po dělení  $x/26$

Dokážete přečíst zprávu, kterou chtěl Vláda poslat svým skutečným nadřízeným? A mohou existovat dva různé symboly zastupující stejnou dvojici písmen?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z



### Úloha 3B (7 bodů):

Rejdařství Království zvířat, které zajišťuje dopravu mezi všemi ostrovy v rybníku Žlubinci, nedávno nakoupilo několik nových lodí. Jeho provozní ředitel tukan Pavel by také rád změnil tarif (ceny lístků), aby bylo rejdařství ještě více atraktivní pro cestující. Protože ale nechce, aby byl tarif až příliš atraktivní, nakreslil si všechny ostrovy ve Žlubinci do mapy, u každého si poznamenal jeho souřadnice  $[x, y]$  a navrhl, aby se cena lístku mezi ostrovy  $[x_1, y_1]$  a  $[x_2, y_2]$  počítala jako menší z čísel  $(x_1 - x_2)^2$  a  $(y_1 - y_2)^2$ . Rozumný tarif by samozřejmě měl mít několik vlastností:

1. Cena lístku mezi  $[x_1, y_1]$  a  $[x_1, y_1]$  je rovna 0 (samozřejmě nikdo soudný nebude cestovat z jednoho ostrova na ten samý, ale pro úplnost chceme i tuto vlastnost)
2. Jestliže jsou ostrovy  $[x_1, y_1]$  a  $[x_2, y_2]$  různé (nejsou jeden a ten samý ostrov), měla by být cena lístku ostře větší než 0.
3. Cena lístku pro cestu mezi ostrovy  $[x_1, y_1]$  a  $[x_2, y_2]$  je stejná jako pro cestu opačným směrem (z  $[x_2, y_2]$  na  $[x_1, y_1]$ ).
4. Přímá cesta je levnější nebo nejhůře stejně drahá, jako cesta s jedním přestupem, tedy pro libovolné tři ostrovy  $[x_1, y_1]$ ,  $[x_2, y_2]$  a  $[x_3, y_3]$  platí, že součet cen lístků mezi  $[x_1, y_1]$ ,  $[x_2, y_2]$  a  $[x_2, y_2]$ ,  $[x_3, y_3]$  je větší nebo roven ceně lístku mezi  $[x_1, y_1]$  a  $[x_3, y_3]$ .

Splňuje vzoreček, který navrhl Pavel, všechny požadavky?

Nápověda: pokud se vám některá vlastnost nezdá, pokuste se najít konkrétní případ, který jí odporuje.

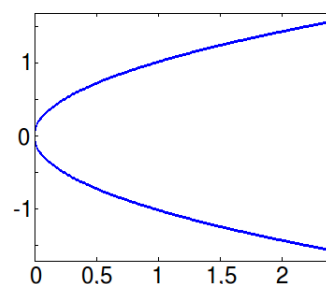
### Úloha 4B (9 bodů):

Kreveta Hana ráda maluje obrazy a v poslední době experimentuje s novým druhem umění. Vymyslí rovnici, najde body, ve kterých je splněna, a ty vykreslí do grafu. Např. rovnice  $x - y^2 = 0$  je splněna v bodech  $[x, y] = [4, 2], [1, 1], [9, -3]$  (a samozřejmě v mnoha dalších), takže tyto body vykreslí do grafu a když jich vykreslí dostatečné množství, nakreslí tím útvar na obrázku vpravo. Jaký obrázek by nakreslila podle rovnice

$$\left(x^2 + (y-4)^2 - 25\right) \cdot \left((x+2)^2 + (y-6)^2 - 1\right) \cdot \left((x-2)^2 + (y-6)^2 - 1\right) \cdot \left((3y-x^2)_{|-3 \leq x \leq 3}\right) = 0?$$

Všechny body, ve kterých je rovnice splněna, leží ve čtverci  $-5 \leq x \leq 5$ ,  $-1 \leq y \leq 9$ . Řešení poslední velké závorky kreslete jen pro hodnoty  $x$  z intervalu  $\langle -3, 3 \rangle$ .

Nápověda: každou velkou závorku můžete vyšetřovat zvlášť, součin je nulový tehdy, je-li nulový alespoň jeden z činitelů.



### Úloha 5B (5 bodů):

Na každoročním cvičení námořnictva Království zvířat se stalo něco neočekávaného: objevil se skutečný nepřítel! Eskadra deseti nepřátelských ponorek (jejich tvary a počty jsou na obrázku vpravo) vypálila několik torpéd proti lodím z výcvikové flotily a podařilo se jim zasáhnout fregatu USS Česílko. Ostatní lodě zaujaly obrannou formaci, rozdělily si sektor na 8x8 čtverců a pomocí sonaru zjistily, kolik částí ponorek je v každém řádku a sloupci (čísla na okraji tabulky). Vědí také, že žádné dvě ponorky se nedotýkají ani rohem ani hranou. Před zahájením protiútoků však musí znát přesné rozmístění nepřátelských plavidel (ponorky mohou být orientované vodorovně i svisle). Pomůžete jim?

