JÁMA LVOVÁ

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Milí přátelé!

Vítáme Vás ve III. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. - 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Vás čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma**! Ještě než se vrhnete do víru zadání, přečtěte si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžete přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napište svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Vás (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu pište na samostatný papír A4. U horního okraje napište Vaše jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očíslujte.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým jste se dostali k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíte, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžete získat body.
- V tomto kole můžete dohromady získat 32 bodů. Nemusíte řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sledujte webové stránky soutěže **http://www.jamalvova.cz**.

Svá řešení posílejte do 1. listopadu 2011 na adresu:

Odbor vnějších vztahů - Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

nebo na email **jamalvova@jamalvova.cz**.

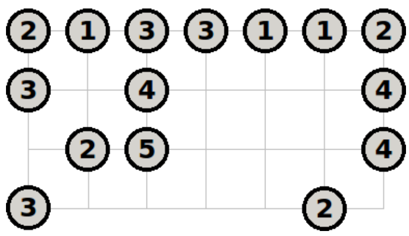
Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení Vám přejí

Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Lukáš, Pepa, Radek, Tomáš a Štefan.

Kategorie mladší

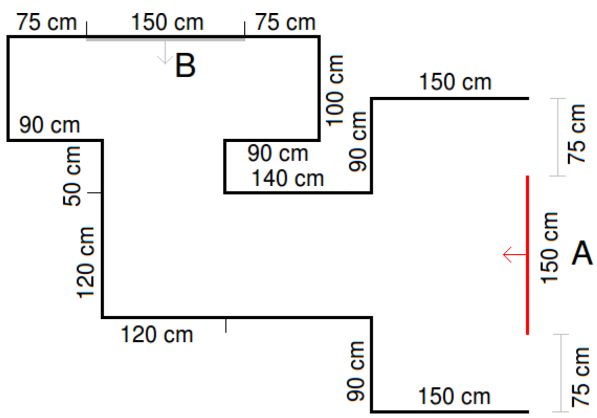
Úloha 1A (5 bodů):

Tučňák Johan dostal za úkol od vládce království Adiktara pospojovat několik ledových ker pomocí mostů. Na každou kru musí vést právě tolik mostů, kolik odpovídá jejímu významu (čísla v kroužku). Mosty lze stavět pouze ve směru mřížky (na obrázku vodorovně nebo svisle) a dvě kry mohou být spojeny žádným, jedním nebo nejvýše dvěma mosty. Jak má Johan kry propojit, aby bylo možné přejít mezi libovolnou dvojicí ker suchou nohou a zároveň splnil všechny ostatní požadavky?



Úloha 2A (6 bodů):

Pavián Vašek si do své spižírny koupil pozlacené zrdcadlo. Rád by ho umístil tak, aby v něm při vstupu do místnosti viděl svůj obraz (pozice B, na obrázku nakresleno šedou barvou), avšak zjistil nepříjemnou věc: chodba vedoucí ke spižírně je užší než šířka zrdcadla. Sám navíc zrdcadlo neunese, takže s ním může pohybovat jen tak, že jej opře o jeden roh a otočí s ním. Vašek drží zrdcadlo v pozici A (nakresleno červenou barvou) a přemýšlí, jak ho dopravit do spižírny. Dokážete pomocí pravítka a kružítka naplánovat dráhu zrdcadla tak, aby nemusel Vašek nikde bourat zeď a zároveň umístil zrdcadlo do správné polohy (nemusí zcela přesně, stačí, když se výsledná poloha nebude lišit o více než 10 cm od té správné)? Půdorys budovy si překreslete ve větším měřítku.



Úloha 3A (7 bodů):

Skupina sedmi zvířátek se zúčastnila sportovní letní školy v hlavním městě Království horských jezer. Kromě zajímavých přednášek a různých sportovních aktivit se den před koncem vydala na výlet na naučnou stezku se zmenšeným modelem sluneční soustavy. Každé zvířátko si mohlo vybrat celkem ze tří dopravních prostředků: koloběžky, kola a parního válce. Ve skladu jsou dvě kola, čtyři koloběžky a jeden parní válec. Všichni účastníci letní školy seřadili dopravní prostředky podle toho, jak moc by je chtěli využít:

Olga: Kolo, koloběžka, parní válec
Andrea: Koloběžka, kolo, parní válec
Marek: Parní válec, koloběžka, kolo
Marie: Kolo, parní válec, koloběžka
Lubor: Parní válec, kolo, koloběžka
Ondřej: Kolo, parní válec, koloběžka
Vítek: Koloběžka, parní válec, kolo

Pokud dostane zvířátko svůj nejoblíbenější dopravní prostředek, má z toho pomyslný užitek 3, z druhého nejoblíbenějšího má užitek 2 a ze třetího 1. Celkový užitek je roven součtu užitků všech zvířátek. Jak má ředitel letní školy rozdělit dopravní prostředky, aby byl celkový užitek co největší?

Úloha 4A (9 bodů):

V severovýchodní části království zvířat žije druh mravenců, který nestaví ohromná mraveniště, ale každý jeho člen si buduje samostatný příbytek. Jejich obydlí mají čtvercový půdorys rozdělený na 2x2 malé čtverce. V každém malém čtverci může být buď postaven libovolně vysoký sloup nebo vykopaná libovolně hluboká jáma. Když si mravenec bere mravenčí slečnu za ženu, postaví si nový společný přístřešek podle následujícího předpisu:

Představme si, že mravenčí obydlí označíme písmeny A a B a výšky (hloubky) jednotlivých sloupů proměnnými a - h:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Žádá-li mravenec A o ruku B, výšky sloupů (hloubky jam) u nového příbytku budou

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Každému obydlí může navíc král udělit vyznamenání (nebo pokutu). Udělí-li král vyznemanání (pokutu) ve výši m, změní se velikosti sloupů a děr na

$$mA = m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix}$$

Když se mravenečník Aleš vydal do Království zvířat na prázdniny, tento druh mravenců ho velmi zaujal a rád by znal odpověď na následující otázky:

Liší se výsledná obydlí, pokud mravenec A žádá o ruku mravence B od případu, kdy B žádá o ruku A, nebo jsou stejná?

Představme si, že si A vezme B a potom jejich obydlí udělí král vyznamenání ve výši m. Bude výsledné obydlí vypadat stejně jako kdyby král nejprve udělil vyznamenání ve výši m mravenci A i B a teprve potom se oba vzali?

Jakou výši musí mít vyznamenání, aby se dotčené obydlí nezměnilo?

Jak musí vypadat obydlí mravence A, aby vezme-li si libovolného mravence B, vypadalo výsledné obydlí stejně jako původní přístřešek B?

Pomůžete Alešovi najít a odůvodnit správné odpovědi?

Úloha 5A (5 bodů):

Dobrý večer dámy a pánové, vítejte v našem světě čar a kouzel! Dnešním večerem Vás provede tajemný keporkak Květoslav, který sice moc nemluví, ale připravil si pro Vás kouzlo s 21 kartami. Myslete na nějakou kartu, která je v balíčku, ale neříkejte ji nahlas. Květoslav rozdělí balíček na tři hromádky po sedmi kartách. Ukažte prstem na hromádku, ve které je Vaše karta! Potom vezme Květoslav jednu hromádku, dá na ni tu, na kterou jste ukázali a nahoru položí zbylou hromádku. Karty nijak nemíchá ani nepřehazuje jejich pořadí. Poté opět rozdělí balíček na tři hromádky: sejme první kartu a dá ji na první hromádku, druhou kartu dá na druhou hromádku, třetí na třetí, čtvrtou opět na první, pátou na druhou atd. Ukažte znovu prstem na hromádku, ve které je Vaše karta! Květoslav složí balíček stejným způsobem jako před chvílí (jako první vezme nějakou hromádku, ve které není Vaše karta, na ni položí tu, na níž jste ukázali, a zbývající dá navrch) a stejně jako před chvílí jej zpátky rozloží do třech hromádek: první kartu z balíčku dá na první hromádku, druhou na druhou, třetí na třetí, čtvrtou opět na první atd. Naposled ukažte prstem na hromádku s Vaší kartou! Květoslav pak hromádky vezme a složí je do balíčku stejným způsobem jako doposud. Z balíčku sejme 10 karet (čímž ho rozdělí na dvě poloviny). 11. kartu vezme ploutvemi a dramaticky odhalí, že je to Vaše karta! Jak to dokázal, umí snad opravdu kouzlit?

Milí přátelé!

Vítáme Vás ve III. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová, kterou pořádá České vysoké učení technické v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. - 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Vás čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída). Pro všechny soutěžící je připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma**! Ještě než se vrhnete do víru zadání, přečtěte si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžete přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola.
- Na tábor se může přihlásit libovolný soutěžící. V případě nadbytku zájemců (kapacita tábora je 24 účastníků) mají přednost ti s lepším umístěním v soutěži.
- Na zvláštní papír napište svoje jméno, školu, třídu a email nebo telefon, abychom Vás (např. kvůli účasti na táboře) mohli kontaktovat.
- Každou úlohu pište na samostatný papír A4. U horního okraje napište Vaše jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očíslujte.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým jste se dostali k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíte, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžete získat body.
- V tomto kole můžete dohromady získat 32 bodů. Nemusíte řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sledujte webové stránky soutěže **http://www.jamalvova.cz**.

Svá řešení posílejte do 1. listopadu 2011 na adresu:

Odbor vnějších vztahů - Jáma lvová
Rektorát ČVUT
Zikova 4
166 36 Praha 6

nebo na email **jamalvova@jamalvova.cz**.

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení Vám přejí

Hanka, Kamča, Lucka, Terka, Lukáš, Pepa, Radek, Tomáš a Štefan.

Kategorie starší

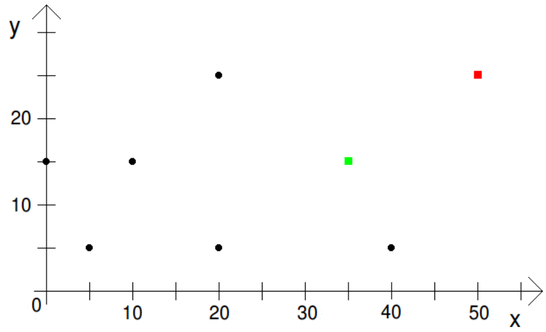
Úloha 1B (5 bodů):
Oslík Jindřích pěstuje na zahrádce hrušky a letos se mu jich urodilo tolik, že se rozhodl přebytky prodat na trhu. Po dlouhém rozmýšlení si odvodil, že při ceně c Kč za kilogram může za celé léto prodat $p = \frac{400}{3} - \frac{4}{3}c$ kg hrušek (rozmyslete si, že čím větší cena tím méně prodá). Hrušky ze zahrádky určené k prodeji váží 100 kg. Za kolik Kč má prodávat 1 kg, chce-li prodat všechny hrušky a vydělat co nejvíce? Je to jeho maximální zisk nebo při nějaké jiné ceně vydělá více?

Úloha 2B (6 bodů):
Ptakopysk Albert si doma v kůlně postavil vesmírnou loď a rozhodl se, že křížem krážem proletí celou sluneční soustavu. Při testování lodi zjistil zvláštní věc: pokud letěl opravdu rychle, palubní hodiny se zpožďovaly za hodinami, které nechal na Zemi. Trval-li nějaký děj na palubě lodi t_0 sekund, uběhlo na Zemi

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kde t_0 je doba trvání děje změřená hodinami na lodi,
t je čas, který ukáží hodiny na Zemi,
v je rychlost, kterou letěl a
c je rychlost světla (300000000 ms^{-1}).
Jak rychle musí letět, aby děj, který podle palubních hodin trvá 1 hodinu, trval podle pozemských hodin celý den? Kolik času uplyne na Zemi, poletí-li Albert 1 hodinu (podle palubního chronometru) rychlostí 90 kmh^{-1}?

Úloha 3B (7 bodů):
Poštolka Eliška se rozhodla, že obletí celý svět. Dlouhé dny brázdila oblohu a ve volných chvílích sledovala hvězdy. Aby si nemusela pamatovat souhvězdí, rozdělila si hvězdy do mnoha shluků. Např. pro výřez oblohy na obrázku postupovala takto:



1. Nejprve si náhodně zvolila počáteční středy shluků. Mohou se shodovat s polohou hvězd, ale nemusí.
2. Každou hvězdu přiřadí právě takovému shluku, k jehož středu je blíže než ke středu libovolného jiného shluku. Vzdálenost hvězdy a středu shluku se počítá jako

$$d = \sqrt{(x_{\text{hvězda}} - x_{\text{střed}})^2 + (y_{\text{hvězda}} - y_{\text{střed}})^2}$$

3. Přepočítá souřadnice středů podle následujících vzorců:

$$x = \text{průměr x-ových souřadnic hvězd, které přísluší tomuto shluku}$$
$$y = \text{průměr y-ových souřadnic hvězd, které přísluší tomuto shluku}$$

4. Kroky 2 a 3 provádí tak dlouho, dokud se všechny středy shluků nepřestanou hýbat.

V tomto konkrétním případě zvolila Eliška počáteční středy shluků $c_1 = [35, 15]$, $c_2 = [50, 25]$ a souřadnice hvězd jsou $h_1 = [5, 5]$, $h_2 = [0, 15]$, $h_3 = [10, 15]$, $h_4 = [20, 5]$, $h_5 = [20, 25]$, $h_6 = [35, 15]$, $h_7 = [40, 5]$ a $h_8 = [50, 25]$. Které hvězdy skončí ve stejném shluku po skončení výpočtu?

Úloha 4B (9 bodů):
Přirozené číslo x nazveme 2-úplné právě tehdy, platí-li pro všechny prvočísla p, která dělí x, že také p^2 dělí x. Např. 125 je 2-úplné číslo, protože je dělitelné 5 i 25, podobně 36 je 2-úplné, protože je dělitelné 2 i 4 a také 3 i 9. O přirozeném čísle x řekneme, že je silné, je-li možné jej napsat jako n-tou mocninu nějakého jiného přirozeného čísla. Např. číslo 16 je silné, protože $16 = 4^2$ (rovněž $16 = 2^4$), podobně 27 je silné, protože $27 = 3^3$.
Najdete alespoň jedno 2-úplné číslo, které není silné? Dokážete najít obecnou postačující podmínku, kterou když nějaké číslo splňuje, tak je 2-úplné a zároveň není silné?

Úloha 5B (5 bodů):
V kasinu Royale v Království zvířat si mohou zvířátka kromě obvyklého hazardu zahrát i tuto hru: Hráči se posadí do kruhu a jeden z nich hodí dvěma kostkami. Dotyčný oznámí svůj hod ostatním jako dvojciferné číslo reprezentující hod (může si i vymýšlet) přičemž vyšší hozená číslice je vždy na prvním místě. Padne-li např. na jedné kostce 1 a na druhé 5, oznámí hráč 51. Následující hráč H mu může věřit a pokusit se hodit lepší číslo a nebo mu nevěří, kostky se odkryjí a pokud si předcházející hráč skutečně vymýšlel, vyhrává H, jinak H prohrává a musí udělat 10 dřepů. Aby to nebylo tak jednoduché, nejlepší možný hod je 21, pod ním jsou hody 66, 55 až po 11 a pak následují ostatní čísla seřazená podle velikosti (65, 64, ..., 61, 54, 53, ...).
Představme si, že se hraje „spravedlivými kostkami“ (všechny hody jsou stejně pravděpodobné), lední medvěd hodí 51 a po něm hraje tuleň. Má tuleň vyšší šanci hodit lepší číslo nebo je spíše pravděpodobné, že hodí horší?
Při jakém hodu má následující hráč stejnou šanci hodit lepší i horší číslo?
Hrají-li tři hráči a padne-li ve druhém hodě 31, ve třetím 54 a v pátém 64, jaká je pravděpodobnost, že v prvním hodu padlo 30?