



## Milí přátelé!

Vítáme Vás ve třetím a zároveň posledním kole I. ročníku korespondenční soutěže Jáma lvová pořádané pod záštitou Českého vysokého učení technického v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma lvová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Vás čeká 5 záložných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída), zúčastnit se však mohou řešitelé i z nižších tříd. Pokud budete úspěšní, máme pro Vás za odměnu připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhnete do víru zadání, přečtěte si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžete přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola. Pokud se Vaše škola soutěže oficiálně neúčastní, připište Vaše jméno a adresu (nejlépe na zvláštní papír), na kterou si přejete zasílat opravená řešení.
- Každou úlohu pište na samostatný papír. U horního okraje napište Vaše jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísľujte.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým jste se dostali k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíte, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžete získat body.
- V tomto kole můžete dohromady získat 36 bodů. Nemusíte řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sledujte webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Svá řešení posílejte do **29. března 2010** na adresu:

Odbor vnějších vztahů - Jáma lvová  
Rektorát ČVUT  
Žitkova 4  
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení Vám přejí

*Lucka, Eva, Honza, Lukáš, Michal, Tomáš a Štefan.*

## Kategorie mladší

### Úloha 1A (5 bodů):

Astronomové v království zvířat začali nedávno zkoumat vzdálený vesmír. Po dlouhém přemýšlení přišli na to, jak nejlépe rozmístit svoje teleskopy: vzdálenosti všech přístrojů se od sebe musí navzájem lišit, a to nejen sousedních, ale skutečně všech. Takže, pokud by rozestavili 4 teleskopy A, B, C a D na pozicích 0, 1, 3 a 6, měly by teleskopy A, C od sebe stejnou vzdálenost jako C, D ( $3 - 0 = 3$  a  $6 - 3$  je také 3). Čtyři teleskopy ale astronomům z království zvířat nestačí, chtěli by jich rovnou šest. Zatím jich postavili pět: rozmístili je na pozice 0, 1, 8, 11 a 13 a nyní řeší problém, kam umístit šestý, a pro radu se obracejí na Vás. Na jakou pozici mají umístit šestý teleskop, aby se vzdálenosti všech přístrojů od sebe navzájem lišily a aby vzdálenost mezi prvním a posledním teleskopem byla co nejmenší?

### Úloha 2A (7 bodů):

Královská alchymistická dílna dostala za úkol namíchat lektvar ohromujícího tance pro blížící se taneční slavnost. Vrchní alchymista se rozhodl, že tímto úkolem pověří svého nového učně. V chytrých knihách mu našel tyto rady:

- Smícháme-li teplý mátový čaj s fenyklem, získáme elixír posilující zdraví.
- Nastrouháme-li kořen mandragory do mátového čaje, dostaneme omlazující elixír.
- Pokud do odvaru z pelyňku přidáme trochu fenyklu, dostaneme lektvar proti kašli.
- Pro přípravu lektvaru ohromujícího tance je třeba do lektvaru krásných snů přilít trochu lektvaru mládí.
- Zalijeme-li kořen mandragory odvarem z pelyňku, dostaneme lektvar dlouhého spánku.
- Když naopak zalijeme mandragoru teplým čajem, obdržíme lektvar dlouhotrvající energie.
- Pokud rozdrťíme skořici a zalijeme ji elixírem klidného spaní, získáme lektvar ohromujícího tance.
- Pro namíchání lektvaru krásných snů vezmeme jeden díl elixíru zdraví a přimícháme do něj jeden díl lektvaru dlouhého spánku.
- Chceme-li získat nebezpečný odvar věčného spánku, smícháme elixír klidného spaní s lektvarem krásných snů, tento odvar nepít více než jednou týdně.
- Zalijeme-li nastrouhaný kořen mandragory omlazujícím elixírem, dostaneme vynikající lektvar mládí.
- Pro elixír klidného spaní potřebujeme do elixíru zdraví přimíchat jeden díl lektvaru proti kašli.



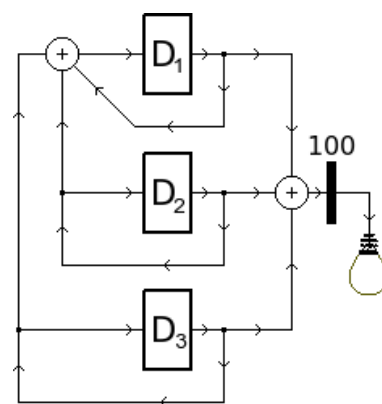
Dále mu dal klíče od své skříně s přísadami, ve které je fenykl, mandragora, máta do čaje a odvar z pelyňku. Poradíte učňovi, jakým způsobem má namíchat svůj lektvar? Zatímco si učěň lámal hlavu nad tanečním lektvarem, vydal se vrchní alchymista namíchat svůj vlastní lektvar. Připravil si kotlík a postupně do něj přidával mátový čaj s fenyklem, odvar z pelyňku s fenyklem, opět trochu mátového čaje s fenyklem a nakonec mandragoru zalitou odvarem z pelyňku. Dokážete zjistit, co vrchní alchymista připravil?

### Úloha 3A (8 bodů):

Každým rokem vydává kocour Felix mapu království zvířat. Jeho mapy jsou nejen přesné, ale i přehledné, protože Felix obarvil jednotlivé okresy tak, že žádné dva sousední nemají stejnou barvu (sousední okresy mají společnou část hranice, nestačí jediný bod). Felix samozřejmě nenabarvil každý okres jinou barvou (tolik jich v dílně ani nemá), ale stačily mu jen čtyři. Dokážete také obarvit mapu království čtyřmi barvami, aby žádné sousední okresy neměly stejnou barvu? Pokud se Vám to nepodaří, můžete dokoupit další barvy, ale cena každé plechovky jsou dva body. Nevybarvená mapa království je na samostatném listu papíru (mapu si nakopírujte nebo vytiskněte).

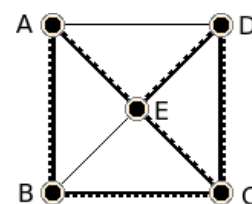
### Úloha 4A (10 bodů):

Aby měla zvířátka v zimě z čeho péct chléb, pěstují kromě jiných plodin i pšenici. Obilí se musí sklídit v přesně určenou dobu, jinak by nebylo dozrálé nebo by naopak mohlo začít hnit. Čas žní vždy v království zvířat určovala žirafa Jiřina. Sestavila si speciální přístroj, podle kterého se řídila a díky tomu začaly žně vždy načas. Jenže Jiřina nedávno odjela do země hor a vodopádů a protože byla jediná, kdo svému přístroji rozuměl, zavolal si král chameleona Milana, který je největší odborník v okolí na podobné přístroje a poprosil ho, zda by jej mohl prozkoumat. Po několika dnech Milan nakreslil plánek přístroje. Je vlastně docela jednoduchý. Obsahuje totiž jen tři krabičky  $D$ , jež jsou navzájem propojeny dráty. Každá krabička si pamatuje jedno číslo, které představuje její hodnotu, a neustále jej vysílá ze svého výstupu. Číslo se pak šíří dále ve směru šipek. Svoji hodnotu může krabička  $D$  změnit jen o půlnoci: nová hodnota je rovna číslu na vstupu krabičky. Důležité je, že hodnoty všech krabiček  $D$  se mění najednou, to znamená, že nová hodnota nějaké krabičky je ovlivněna jen stavem přístroje v předchozím dni a ne tím ve dni následujícím. Další součástka je kolečko s plusem, které sčítá čísla ze svých vstupů. Hodnoty všech krabiček  $D$  jsou dnes rovny 1. Milan ví, že pokud vstupuje do černého obdélníčku číslo větší než 100, rozsvítí se žárovka a je čas žní. Dokážete určit, kolik dní do nich zbývá?



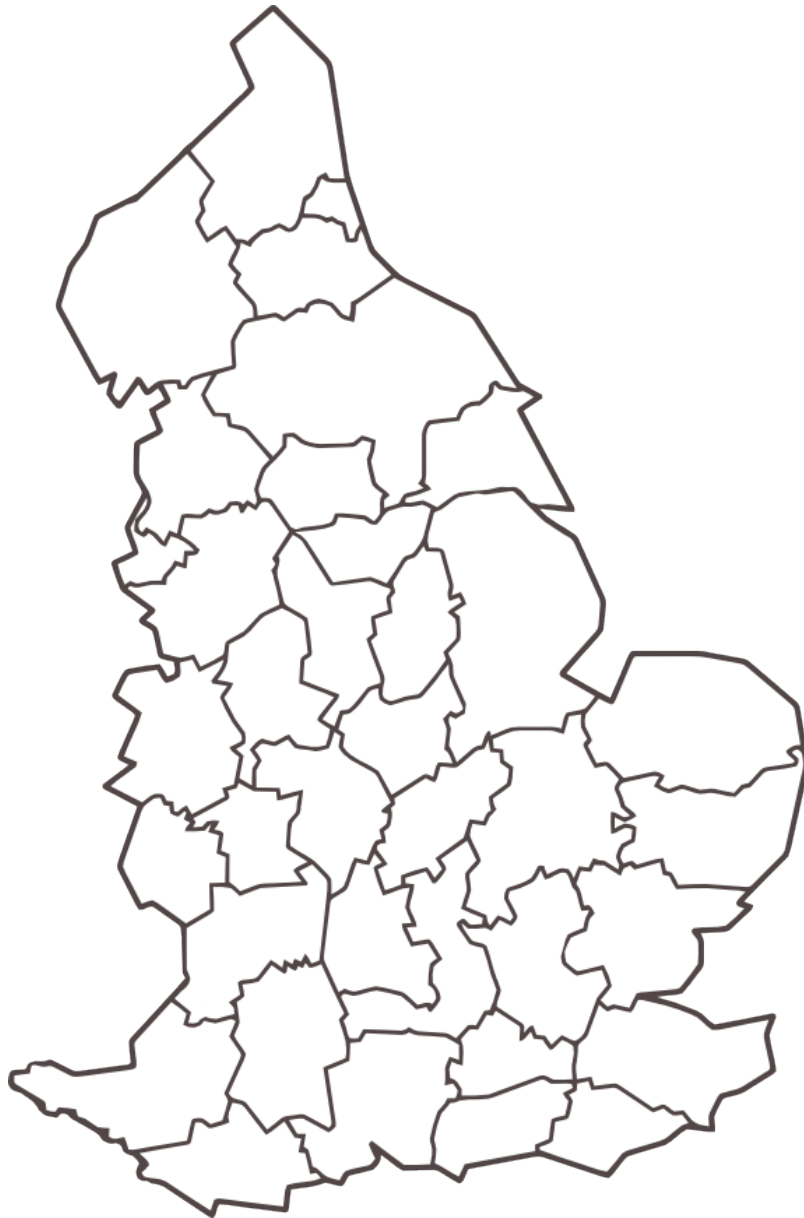
### Úloha 5A (6 bodů):

Jako každé správné království má i království zvířat železniční síť. Její zjednodušený plánek vidíte na obrázku vpravo. Jednotlivá města jsou označena písmeny A až E. Zoubkovaná čára značí elektrifikovanou trať a hladká čára představuje trať bez drátů, po které mohou jezdit jen motorové lokomotivy. Cesta mezi sousedními městy trvá vlaku půl hodiny. Jednou za čas se zvířátka rozhodnou vytvořit nový jízdní řád. Každé město má určité požadavky na odjezdy vlaků. Např. radní ve městě C chtějí, aby z jejich nádraží odjízdel v 7:00 vlak do města B, v 7:30 do města E a aby v 10:30 odjízdel jeden vlak do B a jeden do E. Požadavky všech měst pro tento rok jsou shrnuty v následující tabulce:



	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00
A	E	B				B, D, E						D, E	E
B			E	A				C		A	A		
C			B	E						B, E			
D	A		C				E						A
E	C	D		A	A			B, C			A		C

Železniční společnost spojeného království (ZSSK) však vlastní pouze dva elektrické vlaky a jeden motorový a nové kupovat nemohou. Radní tak řeší jeden problém: jak mají těmto 3 vlakům naplánovat jízdy, aby byl dodržen jízdní řád? Vlak může buď stát ve stanici, nebo jet z jedné stanice do druhé. A váš úkol je pro každý vlak rozhodnout, v kolik hodin odjede z které stanice, kde bude stát a jak dlouho (připomeňme, že jízda mezi sousedními stanicemi trvá půl hodiny). Pomůžete radním naplánovat jízdy vlaků tak, aby byl dodržen jízdní řád?





## Milí přátelé!

Vítáme Vás ve třetím a zároveň posledním kole I. ročníku korespondenční soutěže Jáma Ilová pořádané pod záštitou Českého vysokého učení technického v Praze. Soutěž je určena pro žáky 6. – 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Jáma Ilová je soutěž na pomezí matematiky a informatiky. Skládá se ze tří kol, v každém z nich na Vás čeká 5 záludných úloh. Soutěž je rozdělena na dvě věkové kategorie, starší (8. a 9. třída) a mladší (6. a 7. třída), zúčastnit se však mohou řešitelé i z nižších tříd. Pokud budete úspěšní, máme pro Vás za odměnu připraven **letní tábor**, který je **zcela zdarma!** Ještě než se vrhnete do víru zadání, přečtěte si pravidla soutěže:

- Do soutěže se můžete přihlásit kdykoli během roku, stačí poslat vyřešené příklady z právě probíhajícího kola. Pokud se Vaše škola soutěže oficiálně neúčastní, připište Vaše jméno a adresu (nejlépe na zvláštní papír), na kterou si přejete zasílat opravená řešení.
- Každou úlohu pište na samostatný papír. U horního okraje napište Vaše jméno, školu a číslo úlohy. Nevejde-li se řešení nějaké úlohy na jeden list, všechny listy přehledně očísľujte.
- V řešení příkladu musí být popsán myšlenkový postup, jakým jste se dostali k výsledku. Pokud svůj postup nevysvětlíte, nemůžeme takový příklad ohodnotit plným počtem bodů. Naopak, i za částečné řešení můžete získat body.
- V tomto kole můžete dohromady získat 36 bodů. Nemusíte řešit všechny příklady, stačí jen jediný. Třeba právě on bude v konečném hodnocení rozhodující.
- Sledujte webové stránky soutěže <http://www.jamalvova.cz>.

Svá řešení posílejte do **29. března 2010** na adresu:

Odbor vnějších vztahů - Jáma Ilová  
Rektorát ČVUT  
Zikova 4  
166 36 Praha 6

Hodně štěstí a bystrou mysl při řešení Vám přeji

*Lucka, Eva, Honza, Lukáš, Michal, Tomáš a Štefan.*

## Kategorie starší

### Úloha 1B (5 bodů):

V království se chystá velká hostina, na kterou jsou pozvána zvířátka z celého okolí. Pozvání jich přijalo celkem 16. Byl proto připraven dlouhý obdélníkový stůl a na každou z delších stran se postavilo po osmi židlích. Ne všechna zvířátka se ovšem navzájem znají, a proto je nutné je rozesadit tak, aby naproti sobě neseděla zvířátka, která se vůbec neznají. Dokážete je za pomoci seznamu hostů a jejich známostí uspořádat do dvojic tak, aby se každá dvojice znala?

V seznamu hostů jsou o vztazích zvířátek následující tvrzení: Kamzík se zná s lamou a daňkem, daněk se zná s kamzíkem a jelenem, lama se zná s kamzíkem a muflonem a jelen se zná s daňkem, mývalem a muflonem. Muflon zná lamu, jelena, krtka a velblouda, velbloud kamarádí jen s muflonem, krtek zná muflona, bobra a lišku a liška se zná s vlkem, medvědem, rysem a krtkem. Mýval zná jelena, bobra a kunu, kuna se zná s mývalem a tchořem, tchoř se přátelí jenom s kunou a bobr se zná s mývalem, krtkem a syslem. Sysel se zná s bobrem a medvědem, vlk se zná s liškou, rysem a medvědem, dobrák medvěd se kamarádí s liškou, vlkem, rysem a syslem a rys zná lišku, vlka a medvěda.

### Úloha 2B (7 bodů):

Místní policejní náčelník kačer Oldřich řeší problém, jak co nejlépe zaznamenávat podrobnosti o kriminálních případech, a nutně potřebuje Vaši radu. Rozhodl se uchovávat informace pomocí výroků: výrokem je třeba věta „pes má čtyři nohy“ nebo „lasička zakousla slepici“. Každý výrok může být buď pravdivý nebo nepravdivý. Pravdivé mají hodnotu 1 a nepravdivé 0. Oldřich zapisuje výroky pomocí písmen, takže místo celých vět napíše třeba jen výrok „ $x$ “ nebo výrok „ $y$ “.

Aby dokázal zaznamenat i složitější tvrzení, spojuje Oldřich výroky pomocí logických spojek. Když spojí dvě tvrzení  $x$  a  $y$  spojkou „a“ (značí se stříškou  $\wedge$ ), je výsledný výrok  $x \wedge y$  pravdivý jen tehdy, jsou-li  $x$  i  $y$  pravdivé. Další spojku, kterou Oldřich zná, je „nebo“ (značí se zobáčkem  $\vee$ ). Výrok  $x \vee y$  je nepravdivý jen tehdy, jsou-li  $x$  i  $y$  nepravdivé. Kromě logických spojek používá Oldřich i tzv. negaci. Ta se značí  $\neg x$  a obrací pravdivost výroku. Je-li výrok  $x$  pravdivý, je  $\neg x$  nepravdivý a naopak. Všechno si můžeme přehledně zapsat do pravdivostní tabulky, kterou vidíte napravo. Poslední spojka, kterou najdeme v policejních spisech království zvířat, je implikace. Značí se  $\rightarrow$  a výrok  $x \rightarrow y$  má stejnou pravdivostní tabulku jako  $\neg x \vee y$ .

$x$	$y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$	$\neg y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0



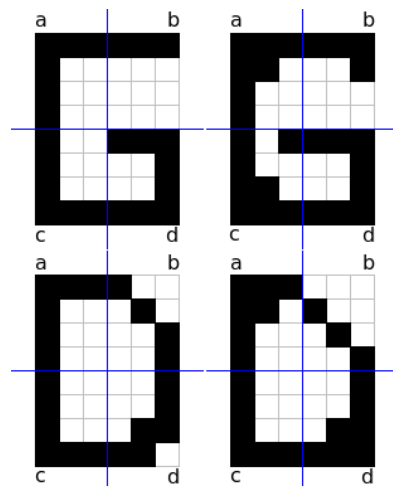
Oldřich takto sice ušetřil opravdu hodně papíru, ale v záznamech se objevily složité výroky, kterým ani Oldřich moc nerozumí (natož jeho kolegové) a chtěl by je zjednodušit. Mějme výrok

$$\neg(y \rightarrow x) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg(\neg x \rightarrow y)).$$

Dokážete jej přepsat tak, aby měl výsledek stejnou pravdivostní tabulku a abyste použili jen jednu negaci a jednu logickou spojku?

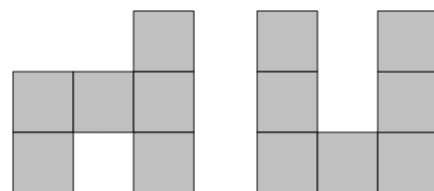
### Úloha 3B (8 bodů):

Kdysi dávno byla v království zvířat postavena knihovna. Každým rokem v ní přibýlo mnoho knih, takže nyní je pro zvířátka velmi zdouhavé cokoli najít. Král dal tedy hlavnímu knihovníkovi krokodýlu Jiřímu za úkol všechny knížky uložit do počítače. Ruční prepisování by trvalo léta, a tak si Jiří půjčil od krtka Petra robota Karla. Toho ale musí naučit rozpoznávat jednotlivá písmena. Pro začátek si úlohu zjednodušíme na D a G. Každý znak, který načte, popíše Karel čtveřicí čísel: číslo  $a$  = (počet černých čtverečků v levé horní čtvrtině znaku) - (počet bílých čtverečků v téže čtvrtině). Číslo  $b$  se počítá stejně, pouze ze čtverečků vpravo nahoře, pro výpočet  $c$  se používají čtverečky vlevo dole a pro  $d$  vpravo dole (naznačeno na obrázku vpravo). Všechna čtyři čísla se pak dosadí do vzorce  $ax + by + cz + du$  a pokud je výsledek větší než 0, určí Karel daný znak jako G, jinak jako D. Proměnné  $x, y, z$  a  $u$  ale Karel nezná a Vaším úkolem je bude spočítat. Jiří pečlivě vybral 4 písmena, jež vidíte na obrázku vpravo, a rozhodl, že pro obě vzorová D vyjde vzorec  $-1$  a pro obě vzorová G vyjde  $+1$ . Neznámé  $x, y, z$  a  $u$  jsou pro všechna rozpoznávaná písmena stejná. Dokážete je vypočítat?



### Úloha 4B (10 bodů):

„Kapitánův deník, hvězdné datum 52701,3. Vesmírná loď USS Animal objevila při svém průletu kolem hvězdy Omicron Eridani A neznámý předmět. Podle našeho vědeckého důstojníka hrocha Jana jsme narazili na nouzovou bójí mimozemské lodi, která byla pravděpodobně zničena. Vzhledem k možnému nebezpečí se budeme snažit bójí otevřít a prozkoumat její obsah. Myslíme si, že k jejímu otevření potřebujeme speciální klíč, jehož stavba je popsána na povrchu bóje. Nikdo z posádky však těmto nápisům nerozumí. Vedle nich jsou dvě kresby. Jejich zkoumáním jsme zjistili, že klíč má tvar krychle složené z menších kostek. Krychle však není úplná, některé kostky chybí. Levá část obrázku představuje pohled zleva a napravo je pohled zepředu. Protože nemáme žádné další informace, sestavíme všechny možné klíče, které těmto pohledům odpovídají.“



Vyrobít klíče jistě naše neohrožená posádka zvládne sama, a tak Vaším úkolem bude odpovědět na dvě otázky: Kolik možných klíčů je možné vyrobit, aby pohled zleva a zepředu byl stejný jako na obrázku vpravo? Každý klíč musí navíc být vcelku, to znamená, že všechny kostky musí mít alespoň jednu společnou stěnu s jinou kostkou. Kolik kostek bude posádka potřebovat k sestavení všech takových klíčů?

### Úloha 5B (6 bodů):

Fägäraş je království vysokých hor a rozlehlých luk. Na jednu takovou louku se nedávno přistěhovalo pět zvířátek a ráda by si ji mezi sebe rozdělila. Každé si vyhlédlo vlastní strom (prázdná kolečka) a poblíž si vybuodovalo noru (plná kolečka). Po dlouhém přemýšlení se zvířátka rozhodla, že vyzkouší dvě možnosti jak louku rozdělít:

Nejprve ji celou oplotí, čímž vznikne jeden pozemek (podobně, jako na obrázku vpravo). Potom stále opakují jednoduché pravidlo: Pokud nově vzniklý pozemek obsahuje více než jednu noru, rozdělí jej napříč nejdelší strany na dvě poloviny. Např. první dělení povede vodorovně středem louky. Zároveň ale přemýšlela o druhé možnosti:

Stejně jako v předchozím případě nejdříve oplotí celou louku, ale potom budou postupovat jinak. Vytvoří právě tolik pozemků, aby na každém byla jedna nora. Dělení musí mít navíc následující vlastnost: Když si vezmeme libovolný bod, který leží na nějakém pozemku, vzdálenost tohoto bodu od nory na témže pozemku je menší než jeho vzdálenost k ostatním norám.

Bohužel, zvířátka nemají dobrou představivost, a tak potřebují Vaši pomoc. Dokážete obě výsledná dělení nakreslit? Který ze způsobů zajistí, že na každém pozemku bude právě jeden strom?

