Kategorie mladší

Úloha 1A Popletený Ježíšek

Z informací, které si chudák Ježíšek pamatuje, hned vidíme, že zelený balíček patří Cilce, v modrém balíčku je autíčko a ve stříbrném puzzle:

Barva	Dárek	Jméno
červený		
modrý	autíčko	
zelený		Cilka
zlatý		
stříbrný	puzzle	

Ježíšek si pamatuje, že knížku pro Aničku nebalil do modrého ani zlatého papíru, Anička tedy může dostat červený, zelený, nebo stříbrný balíček. Víme ale, že zelený balíček je pro Cilku a že ve stříbrném papíře je zabaleno puzzle, jedinou možností tedy je, že Anička dostane červený dárek, v němž se bude ukrývat knížka:

Barva	Dárek	Jméno
červený	knížka	Anička
modrý	autíčko	
zelený		Cilka
zlatý		
stříbrný	puzzle	

Evička si přála dostat kalkulačku. Z naší tabulky vidíme, že ta se může ukrývat buď v zeleném, nebo zlatém balíčku. Zelený balíček je ale pro Cilku, a Evička tedy dostane kalkulačku zabalenou ve zlatém papíře.

Barva	Dárek	Jméno
červený	knížka	Anička
modrý	autíčko	
zelený		Cilka
zlatý	kalkulačka	Evička
stříbrný	puzzle	

Na otázku v zadání jsme již odpověď nalezli, můžeme ale Ježíškovi pomoci i se správným určením zbylých dárků. Z druhé Ježíškovy informace můžeme vyčíst, že v posledním, zeleném balíčku, který dostane Cilka, je zabalená sbírka příkladů z matematiky. Zbývá nám určit, který z chlapců (Béďa, nebo Davídek) dostane autíčko v modrém papíře, a který puzzle v papíře stříbrném. Víme, že Béďa puzzle nedostane, stříbrný balíček tedy patří Davídkovi a Béďa se pod stromečkem bude radovat z autíčka:

Barva	Dárek	Jméno
červený	knížka	Anička
modrý	autíčko	Béďa
zelený	sbírka příkladů	Cilka
zlatý	kalkulačka	Evička
stříbrný	puzzle	Davídek

A co Tvůj Ježíšek, nepopletl nic? Našel jsi pod vánočním stromečkem to, co sis přál/a?

Úloha 2A Cesta na chatu

Nejdříve je potřeba spočítat náklady na provoz autobusu. Ty musíme převést do stejných jednotek. My se budeme ptát, kolik stojí hodinový provoz činčilího spolehlivého autobusu. (Stejně tak bychom mohli počítat, kolik stojí například jeden kilometr jízdy (případně 100 km apod.) a porovnávat hodnoty vztažené k ujeté vzdálenosti.)

Řidiči autobusu budeme za hodinu platit 100 JC (JámaCoinů). Není to sice mnoho, ale bude se nám to lépe počítat;). K této částce musíme připočítat cenu spotřebovaného benzínu. Řekněme, že činčilí autobus má spotřebu 30 l na 100 km. My ale potřebujeme znát spotřebu za hodinu. Činčilí autobus bude mít průměrnou rychlost 50 km/hod. (Opět aby se nám to dobře počítalo.) Za hodinu tedy ujede 50 km a tím pádem spotřebuje 15 l nafty. Cena samozřejmě závisí na tom, kde bude pan řidič tankovat, my ale budeme předpokládat, že zaplatil 30 JC za litr, za tedy hodinu projezdil $15 \cdot 30 = 450$ JC. Pokud bychom tedy počítali jen cenu řidiče a pohonných hmot, provoz autobusu činčily stojí $100 + 450 = 550$ JC.

Nyní spočítáme příjmy z provozování autobusové dopravy. Cena jízdného se většinou odvíjí od počtu ujetých kilometrů, předpokládejme, že jedno (dospělé) zvířátko zaplatí za každý ujetý kilometr 2 JC. Pokud autobus ujede za hodinu 50 km, jak jsme výše předpokládali, dostaneme od každého cestujícího za hodinu jízdy $2 \cdot 50 = 100$ JC. (Nevadí, že jeden cestující nejede celou hodinu, může ho vystřídat jiný a výsledek bude stejný.) Na hodinový provoz autobusu potřebujeme 550 JC, od každého zvířátka dostaneme 100 JC, je tedy potřeba, aby v autobuse byly alespoň $550 : 100 \doteq 6$ zvířátek.

Do výpočtu můžeme samozřejmě zahrnout i další náklady na provoz autobusu, které nám potřebný počet pasažérů budou zvyšovat. Činčily si například autobus musely nejprve koupit. Počítejme, že pořizovací cena autobusu je 2 500 000 JC a autobus vydrží sloužit 20 let, což je $20 \cdot 360 = 7200$ dní. (Autobus nepojede jen o Vánocích, v Den vzniku samostatného zvířecího království a na den narozenin pana krále lva;)) Autobus jezdí jen 12 hodin denně, za dvacet let tedy bude v provozu $7200 \cdot 12 = 86400$ hodin. K ceně za hodinu provozu proto musíme připočítat $2500000 : 86400 = 28$ JC (tzv. amortizace).

Za autobus je také potřeba zaplatit povinné ručení (25 000 JC/rok), jednou za dva roky s ním jet na technickou kontrolu, která stojí zhruba 2000 JC, tedy 1000 JC za rok, 5000 JC za rok za pneumatiky a 10 000 JC za rok za drobné opravy. Dohromady $25000 + 1000 + 5000 + 15000 = 46000$ JC za rok. Rok $= 360 \cdot 12 = 4320$ hodin, k hodinové ceně tedy připočteme ještě $46000 : 4320 \doteq 10$ JC. Hodinový provoz autobusu stojí celkem $550 + 28 + 10 = 588$ JC. Vidíme, že stále potřebujeme alespoň pět cestujících, aby činčily nebyly ve ztrátě, zisk ale bude menší.

Konkrétní čísla samozřejmě závisí na tom, s jakými hodnotami jste počítali (nejvíce asi na spotřebě a ceně pohonných hmot), nemělo by vám ale vyjít, že je potřeba více cestujících, než se vejde do autobusu, případně že cestující nejsou potřeba vůbec;)

Úloha 3A Rovnoramenné váhy

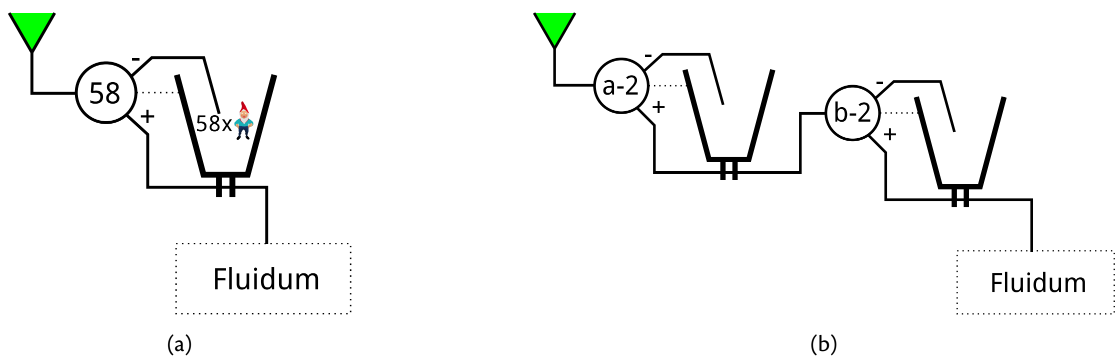
Je jasné, že Erik si musí pořídit závaží o hmotnosti 1 g, protože jinak by nebyl schopen odvážit ostatním zvířátkům 1 g zboží. Dvougramový nákup by Erik samozřejmě mohl zvážit pomocí dvou jednogramových závaží, pořizovat dvě stejná závaží ale není příliš ekonomické, lepší bude koupit rovnou závaží dvougramové. Pomocí 1g a 2g závaží je Erik schopný navážit i 3 g, 4 g už ale nezváží, a další závaží, které bude potřebovat, tedy bude 4g. Pět gramů může nyní zvážit jako $4 + 1$ g, šest jako $4 + 2$ g, sedm jako $4 + 2 + 1$ g, na osm už se ale nedostane, a musí si tedy pořídit osmigramové závaží. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat až do 100, rychlejší ale bude se nad úlohou nyní trošku zamyslet: Víme, že Erik už umí zvážit jakoukoliv hmotnost od 1 do 7 g a že si pořídil i 8g závaží. Potom ale určitě zvládne zvážit i jakoukoliv hmotnost od 9 do 15 g - stačí prostě k 8g závaží přidat příslušnou hmotnost od 1 do 7 g. Hmotnost 16 g už Erik zvážit nedovede, pořídí si tedy 16g závaží. Podobnou úvahou přijdeme na to, že díky koupi 16g závaží a díky tomu, že všechny hmotnosti od 1 do 15 gramů už zvážit umí, už Erik dokáže zvážit i všechny hmotnosti od 17 do 31 (tj. $16 + 15$) g. Další pořizované závaží bude mít hmotnost 32 g, a s ním už Erik může přesně určit jakoukoliv hmotnost až do $32 + 31 = 63$ g. Posledním závažím, které Erik potřebuje, je závaží o hmotnosti 64 g, a protože $64 + 63 = 127\text{ g} > 100$ g, další závaží už Erik nepotřebuje a dokonce bude pomocí této sady závaží schopen vážit přesně až do 127 g.

Erik by si tedy měl koupit celkem 7 závaží, která budou mít hmotnost 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 32 g a 64 g.

Pozn.: Díky tomu, že s tímto řešením Erik požadovaných 100 g docela výrazně přestřelil, mohl by si hmotnosti závaží zvolit i jinak při zachování jejich počtu. Kdyby si například místo 4g závaží koupil závaží 3g, a potom patřičně upravil další hodnoty (místo 8g závaží pořídil 7g, místo 16g 15g atd.), byl by poté schopen zvážit jakoukoliv hmotnost od 1 do 126 g, což by mu také stačilo. Možností je celá řada, výše uvedené řešení je ale nejlepší co do maximální hmotnosti, kterou je Erik schopen zvážit.

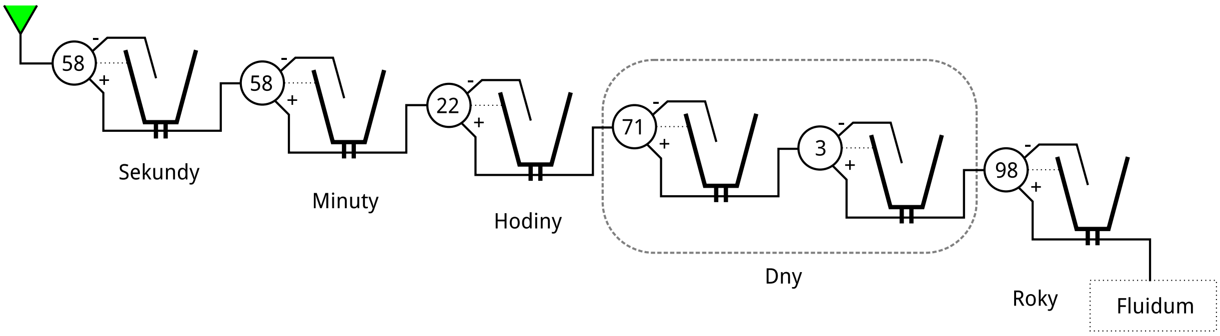
Úloha 4A Měření času

Není asi těžké si představit, že výsledné hodiny budou obsahovat kyblíček pro sekundy, další pro minuty, hodiny atd. a čas bude zakódován pomocí počtu trpaslíků v jednotlivých kyblíčcích. Stejně tak se může zdát samozřejmé, že kyblíček pro sekundy bude řízen bifurkátorem s číslem 60, ale není tomu tak. Sekundy vyžadují bifurkátor s číslem 58. Minuta má 60 sekund, což znamená, že v kyblíčku může být 0 až 59 trpaslíků. Představme si, že už jich tam máme 58 a kyblíček je zapojený jako na obrázku 1a. Jakmile na bifurkátor přijde nový trpaslík, zjistí se nejprve, zda je obsah kyblíčku (58) větší než číslo řídicí bifurkátor (také 58). Protože neplatí, že $58 > 58$, pošle bifurkátor nového trpaslíka výstupem označeným – a v kyblíčku bude nově 59 trpaslíků. Když přijde další, bifurkátor zjistí, že obsah kyblíčku (59) je větší než řídicí číslo (58), pošle jej výstupem označeným symbolem +, trpaslík přejde přes ventil a tím kyblíček vypustí (vynuluje ukazatel sekund).



Obrázek 1

Jestliže tedy chceme využít kyblíček k měření časového úseku, který má n dílků, bude příslušný bifurkátor řízen číslem $n - 2$. Bifurkátory pro sekundy a minuty budou řízeny číslem 58, dny vyžadují číslo 22 a roky 98 (hodiny se mají každých 100 let dostat do původního stavu). Ukazatel dnů není možné sestavit jen z jednoho kyblíčku, protože rok má 365 dní, zatímco kapacita kyblíčků je jen 128. Existuje však jednoduchý trik, jak využít kyblíčky s omezenou kapacitou k uchování téměř libovolně velkého čísla. Kyblíčky stačí spojit za sebe podobně jako na obrázku 1b. Jakmile do prvního bifurkátoru přijde trpaslík, který způsobí vypuštění prvního kyblíčku, není vrácen zpátky do fluida, ale uloží se do druhého kyblíčku. Protože do něj takto dorazí jen každý a-tý trpaslík, lze hodnotu reprezentovanou celým obvodem vyjádřit jako *(obsah druhého kyblíčku)* $\cdot\, a +$ *(obsah prvního kyblíčku)*. Také to znamená, že tento obvod dokáže reprezentovat čísla od 0 do $a \cdot b - 1$. Dnů v roce je $365 = 73 \cdot 5$, takže je můžeme zaznamenávat pomocí dvou kyblíčků, první s bifurkátorem 71 a druhý řízený číslem 3.



Obrázek 2

Stejného principu (spojování kyblíčků za sebe) využijeme i pro konstrukci celých hodin. Výsledné zapojení je na obrázku 2. Sekundy, minuty, hodiny a roky jsou reprezentovány jedním kyblíčkem a jejich počet je reprezentován počtem trpaslíků v těchto kyblíčcích. Dny jsou reprezentovány dvěma kyblíčky a jejich počet je dán jako *(obsah druhého kyblíčku)* $\cdot\, 73 +$ *(obsah prvního kyblíčku)*.

Úloha 5A Dobré dny

Hned na úvod si všimneme, že číslo 2015 není dobré, protože není dělitelné 2, a v roce 2015 jsme tedy nezažili žádné dobré dny. Číslo 2016 ale dobré je ($2016/2 = 1008$, $2016/1 = 2016$, $2016/6 = 336$), a má tedy smysl zjišťovat, kolik dnů od 1. 1. 2016 do 22. 1. 2016 bylo dobrých. Číslo 1 (měsíc leden) určitě je dobré, a proto jenom spočítáme počet dobrých čísel mezi 1 a 22. Dobrá jsou určitě všechna čísla jednociferná (1 – 9), protože každé číslo je dělitelné samo sebou. Dobrá jsou i čísla 10 ($10/1 = 10$), 11 ($11/1 = 11$) a 12 ($12/1 = 12$, $12/2 = 6$), 13 ani 14 už ale dobrá nejsou, protože 13 není dělitelná 3 a 14 není dělitelná 4. Podobně ověříme, že dalšími dobrými čísly jsou 15, 20 a 22. V lednu byly tedy dobré dny: 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 11., 12., 15., 20. a 22. Dohromady jsme tedy v průběhu druhého kola Jámy lvové zažili 15 dobrých dnů.

Kategorie starší

Úloha 1B Vánoční mlsání

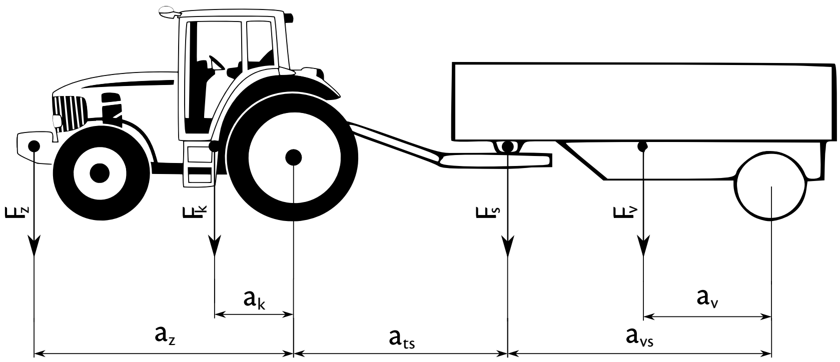
Zadání této úlohy se možná tváří složitě, její řešení je ale ve skutečnosti velice jednoduché. Představme si, že Ondřej ve spíži začne otevírat jednotlivé krabice s cukrovím. V nejhorším možném případě se může stát, že Ondřej otevře 16 krabic a v každé z nich bude jiný druh cukroví – paní Gorilová totiž napekla celkem 16 různých druhů. V 17. krabici už ale určitě musí být druh, který už Ondřej jednou objevil, jednoduše proto, že 17 různých druhů cukroví prostě není. V nejhorším možném případě Ondřej v tomto „druhém kole" otevře opět 16 krabic a opět v nich objeví všech 16 druhů cukroví – každý druh tak bude v právě dvou otevřených krabicích. Nyní stačí Ondřejovi otevřít libovolnou další (celkově 33.) krabici a je jasné, že cukroví, které je v ní uskladněno, určitě nalezl minimálně potřetí. Ondřej tedy musí otevřít alespoň 33 krabic.

Poznámka: Samozřejmě je možné (ba přímo velice pravděpodobné), že Ondřej některý druh cukroví objeví třikrát mnohem dříve, než stihne otevřít 33 krabic. Ondřej ale chce mít jistotu, že za všech okolností některý druh třikrát nalezne, a proto musí brát v úvahu nejhorší možnost.

Úloha 2B Traktorová

Když Kryšpín připojil naložený valník za traktor, převrhla se mu kabina traktoru dozadu – valník traktor takříkajíc „převážil". Čeština je v tomto ohledu trošku záludná: slovo „převážit" by v nás mohlo vzbudit dojem, že aby traktor zůstal stát pevně na kolech, je potřeba, aby kabina spolu s připevněným závažím vážila alespoň tolik, co valník, tedy 5 t. Ve skutečnosti nám ale bude stačit mnohem méně. Otáčivý účinek síly totiž závisí nejen na velikosti této síly, ale také na tom, jak daleko od osy otáčení síla působí – čím dále od osy otáčení, tím menší síla nám stačí. Na tomto principu je založena například dobře známá páka, vyzkoušet si ho jednoduše můžeš na obyčejných dveřích: když položíš ruku na tu stranu dveří, kde jsou panty, a budeš je chtít uvést do pohybu, budeš muset vyvinout mnohem větší úsilí, než když budeš rukou působit v blízkosti kliky. Otáčivý účinek síly vyjadřuje veličina moment síly, která se značí M a vypočteme ji podle vztahu $M = F \cdot a$ (F je působící síla a a je vzdálenost od osy otáčení). V řeči momentů síly se tak traktor převrhl proto, že otáčivý účinek síly valníku (tuto sílu budeme značit F_s, její moment M_s) byl větší než otáčivý účinek síly kabiny (tu budeme značit F_k, její moment M_k).

Když už mluvíme o vzdálenosti od osy otáčení, nebylo by na škodu uvědomit si, kudy vlastně ta osa otáčení při překlápění traktoru dozadu prochází ☺ Traktor se bude převracet okolo bodu, kde se jeho zadní kola dotýkají země. Tento bod se bude v průběhu převrhávání mírně posouvat směrem k valníku, nás ale zajímá pouze jestli k převracení vůbec dojde, tento posun tedy zanedbáme. Valník se také překlápí, a jelikož má jen dvě kola, nemá na vybranou. Otáčí se okolo místa dotyku svých kol se zemí a to v opačném smyslu než traktor.



Obrázek 3: Převracení traktoru dozadu.

Nyní si zvolíme bod, pro který budeme úlohu řešit. Mohli bychom počítat síly působící v bodě spojení traktoru s valníkem, jako správnější se ale jeví porovnat momenty sil působící v ose otáčení traktoru. Aby se traktor po připojení valníku nepřevrátil, musí pro momenty v ose otáčení traktoru platit, že „Moment síly vyvolaný silou valníku působící na spoj s traktorem je menší nebo roven momentu způsobenému gravitačními silami působícími na kabinu traktoru a závaží." Matematicky:

$$M_s \leq M_k + M_z.$$

Všechny vzdálenosti známe, gravitační sílu působící na kabinu traktoru snadno vypočteme z její hmotnosti. Zbývá určit velikost síly F_s, kterou působí valník na spoj s traktorem. Nejprve vypočítáme moment síly v ose valníku vytvářený gravitační silou valníku. Potřebujeme k tomu znát hmotnost valníku a vzdálenost těžiště od jeho osy otáčení. Moment síly M_v je pak roven $F_v \cdot a_v$. Nyní chceme zjistit, jak velkou silou bude tento moment působit ve vzdálenosti a_{vs} (vzdálenost spoje s traktorem od osy otáčení valníku). I pro tuto sílu musí platit, že $F_s \cdot a_{vs} = M_v$, sílu F_s pak můžeme vyjádřit jako $M_v : a_{vs}$. Po dosazení za moment dostaneme

$$F_s = F_v \cdot a_v : a_{vs}$$

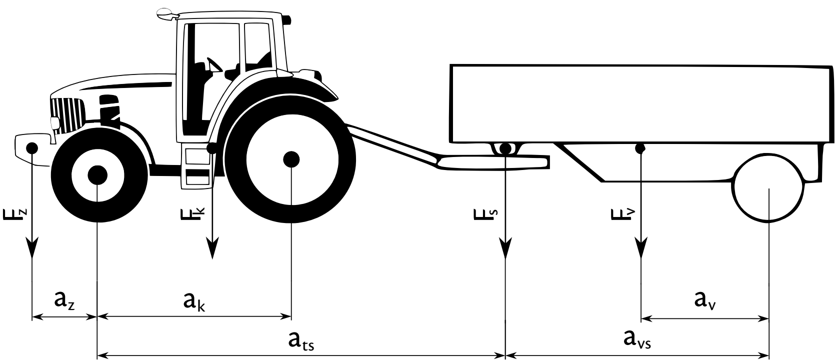
Nyní už můžeme určit, jak těžké závaží si má Kryšpín pořídit, aby se mu traktor nepřevracel. Pro osu otáčení procházející zadním kolem traktoru musí po dosazení do první rovnice za F_s platit:

$$(F_v \cdot a_v : a_{vs}) \cdot a_{ts} \leq F_k \cdot a_k + F_z \cdot a_z$$

Dosadíme-li za gravitační síly $m \cdot g$, gravitační konstanta se nám na obou stranách rovnice vykrátí a hledanou hmotnost m_z můžeme vyjádřit jako

$$m_z \geq \big((m_v \cdot a_v : a_{vs}) \cdot a_{ts} - m_k \cdot a_k\big) : a_z = \big((5 \cdot 1 : 2{,}5) \cdot 1 - 2{,}3 \cdot 0{,}75\big) : 2{,}5\,\mathrm{t} = 0{,}11\,\mathrm{t} = 110\,\mathrm{kg}.$$

Hmotnost závaží musí být alespoň 110 kg. Kryšpín by měl ale pořídit závaží o něco těžší, protože pokud by se v této chvíli rozjel, na zadní kola traktoru začne působit síla motoru, která bude mít stejný otáčivý účinek, jako tíha valníku („stejný" rozuměj směrem, nikoli velikostí). Co by se stalo, si můžeš prohlédnout tady: `https://www.youtube.com/watch?v=Q_hzhCe4rWs` zhruba v minutě a půl a šesti a půl minutách. (Děkujeme Jindrovi za zaslání odkazu ☺)



Obrázek 4: Převracení traktoru dopředu.

Jak těžké ale může závaží být, aby se Kryšpínovi traktor naopak nepřevážil dopředu? Použijeme podobnou úvahu, jen s tím rozdílem, že osa otáčení tentokrát prochází místem, kde se země dotýká přední kolo, a závaží musí „převážit" jak kabinu traktoru, tak valník. Tento případ je znázorněn na obrázku 4. Pro momenty sil vzhledem k ose otáčení procházející předním kolem platí:

$$M_z \leq M_k + M_s,$$

což je po dosazení za momenty:

$$F_z \cdot a_z \leq F_k \cdot a_k + F_v \cdot a_v : a_{vs} \cdot a_{ts},$$

z čehož po dosazení za gravitační síly a vykrácení g vyjádříme m_z jako:

$$m_z \leq (2{,}3 \cdot 1{,}5 + 5 \cdot 1 : 2{,}5 \cdot 3{,}25) : 0{,}25\,\mathrm{t} = 39{,}8\,\mathrm{t}.$$

Závaží tedy nesmí být těžší než 39 800 kg.

Nutno říci, že zatímco sehnat závaží vážící 110 kg zřejmě nebude až takový problém, toho, že by omylem pořídil závaží těžší než 39 800 kg, se Kryšpín zřejmě obávat nemusí. Jako látka s nejvyšší hustotou se udává kov osmium, který má hustotu 22,6 g/cm^3 = 22 600 kg/m^3. Závaží z osmia o hmotnosti 39 800 kg by tedy muselo mít objem $39800 : 22600 = 1{,}76\,\mathrm{m}^3$*, což je přibližně krychle o hraně 1,2 m. Přidělávat tak velký předmět na předek traktoru by asi nikoho ani nenapadlo, nemluvě o tom, že 1,76 m^3 osmia běžně nekoupíte ☺ Pokud by Kryšpín chtěl použít o něco dostupnější olovo, které má hustotu přibližně dvakrát nižší než osmium (11,3 g/cm^3), musel by si pořídit olověnou krychli o hraně přibližně 1,5 m. Jeden kilogram olova se na internetu prodává za 70 Kč, za 39 800 kg by tedy Kryšpín zaplatil 2 786 000 Kč – a to už by ho přišlo levněji koupit si lepší traktor ☺*

Úloha 3B Bomba a štít

Pokud se Adam, Vilém a Tadeáš rozhodnou hrát „Bombu a štít" jen ve třech, budou mít smůlu. Řešení pro tři hráče neexistuje. Aby hráč „nevybouchnul", musí mít v přímce mezi sebou a svou „bombou" svůj „štít". Na jedné straně od něj tedy musí stát alespoň dva další hráči („bomba" a „štít" musejí být různí hráči). Ve hře tří hráčů lze tuto podmínku splnit pro dva krajní hráče, pro prostředního ale taková možnost neexistuje.

Pokud se přidá i Antonín, je situace nadějnější. Nejdříve dokážeme, že pro každý výběr „bomb“ a „štítů“ existuje právě jedno rozestavení hráčů, při kterém jsou všichni spokojení. Pokud tento předpoklad bude platit, můžeme spočítat všechny různé možnosti rozestavení a z nich odvodit počet možností výběrů. V opačném případě bychom si nemohli být jisti, jestli jsme nějakou možnost výběru nezapočítali dvakrát.

Pokud si hráč A vybere jako „štít“ hráče B a jako „bombu“ hráče C, budou si hráči muset stoupnout do řady takto:

$$A\ B\ C$$

Jiné řešení není možné. Hráči by si také mohli stoupnout zrcadlově obráceně, tedy $C\ B\ A$, to ale není jiná možnost postavení, jen se na hřišti trochu pootočili. Hráč D by si zatím mohl stoupnout, kam by chtěl, máme tu ale další podmínky:

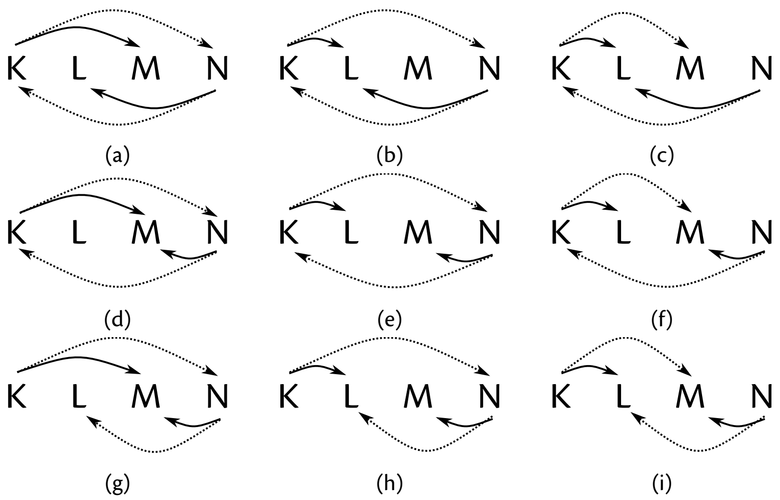
- Pokud si „štít“ prvního hráče, tedy hráč B, vybere jako svou „bombu“ A a „štít“ C, řešení neexistuje.
- Pokud si hráč B, vybere jako svou „bombu“ A a „štít“ D, musí si D stoupnout mezi A a B, jiné řešení není možné.
- Pokud si hráč B, vybere jako svou „bombu“ C a „štít“ A, řešení neexistuje.
- Pokud si hráč B, vybere jako svou „bombu“ C a „štít“ D, musí si D stoupnout mezi B a C, jiné řešení není možné.
- Pokud si hráč B, vybere jako svou „bombu“ D a „štít“ A, musí si D stoupnout vlevo od A, jiné řešení není možné.
- Pokud si hráč B, vybere jako svou „bombu“ D a „štít“ C, musí si D stoupnout vpravo od C, jiné řešení není možné.

Vidíme, že pro konkrétní výběr „bomb“ a „štítů“ existuje maximálně jedna možnost, jak se rozestavit, aby byli všichni spokojeni.

Kolik je tedy různých možností postavení, kdy jsou hráči spokojení? Uvažujme pozice

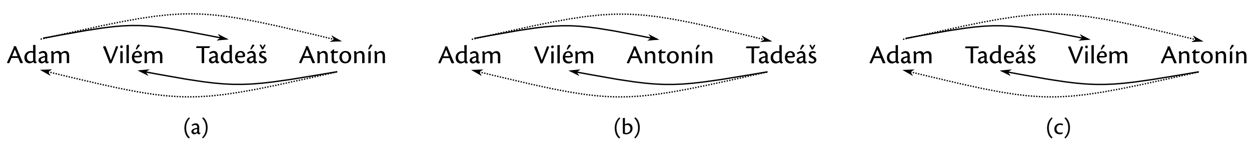
$$K\ L\ M\ N$$

Hráč na pozici L je spokojen pouze tehdy, když má jako „bombu“ hráče na pozici N a jako „štít“ hráče na pozici M. Podobně je na tom hráč na pozici M, také má jen jednu možnost. Krajní hráči mají možností více. Hráč na pozici K může mít jako „bombu“ hráče na pozici N a k tomu „štít“ M nebo L, případně „bombu“ M a „štít“ L. Ke každým těmto jeho třem možnostem má tři možnosti také druhý krajní hráč, celkem je to tedy 9 možností, které jsou znázorněny na obrázku 5. Tečkovanou čarou jsou znázorněny „bomby“ hráčů, plnou jejich „štíty“. Prostřední hráči mají stále jen jednu možnost, jejich výběry proto proto kvůli přehlednosti znázorněny.



Obrázek 5

Z každého postavení můžeme vytvořit odpovídající možnosti výběru tak, že na pozice dosadíme konkrétní hráče. První tři možná obsazení pro první pozici jsou na obrázku 6. V prvním případě si Adam i Vilém vybrali jako „bombu“ Antonína a jako „štít“ Tadeáše a naopak. V případě druhém si vybral Vilém Tadeáše jako „bombu“ atd. Na pozici K můžeme postavit kohokoli z hráčů, máme tedy 4 možnosti. Na pozici L můžeme dát kohokoli, kromě toho, co stojí na první pozici. Ke každé z původních možností tedy přibývají tři další. Třetí pozici můžeme obsadit už jen jedním ze dvou hráčů (dvě možnosti), na čtvrtou nám zbyde poslední z nich.



Obrázek 6

Možností, jak pozice obsadit, je tedy $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Vidíme ale, že možnosti postavení na diagonále (obrázky 5a, 5e, 5i) jsou osově souměrné, když na ně tedy použijeme obsazení pozic: Adam, Vilém, Tadeáš, Antonín, vzniknou stejné vztahy mezi bombami a štíty, jako v případě obsazení Antonín, Tadeáš, Vilém, Adam. Pro ostatní možnosti postavení navíc platí, že ve dvojicích nejsou různé, jen stranově převrácené (obrázky 5b a 5d, 5c a 5g a 5f a 5h). Počet vzniklých možností výběrů tedy budeme muset vydělit dvěma. Vypočítáme ho jako *počet možností postavení · počet obsazení pozic konkrétními hráči* : 2 = $9 \cdot 24 : 2 = 108$ možností.

Úloha 4B Vzdálenosti

Pojem vzdálenosti není v matematice vůbec samozřejmý. Vyznačíme-li na papíře dva body, umíme jejich vzdálenost změřit pravítkem, avšak co když se nacházejí na kulové ploše? A co když se nacházejí v prostoru, ve kterém se nemůžeme vydat libovolným směrem (např. město holubice Holly)? A co když měříme vzdálenost dvou objektů, které ani není obecně možné vyznačit do souřadného systému (takové jsou ve skutečnosti velmi obvyklé a o některých (funkce) se dozvíte na střední škole)? Namísto hledání univerzální definice vzdálenosti se raději matematici rozhodli, že vzdálenost dvou objektů lze měřit libovolným způsobem, který splňuje následující podmínky:

1. Vzdálenost dvou bodů je vždy větší nebo rovna nule
   Porušení této podmínky by vedlo k zajímavým paradoxům. Kdyby např. existovala dvě města, která jsou od sebe vzdálena záporný počet kilometrů, čím více bychom mezi nimi jezdili, tím kratší vzdálenost bychom ujeli. Jaká by potom měla být cena jízdenky na hromadnou dopravu, neměl by spíše dopravce platit nám?
2. Vzdálenost mezi dvěma body je nulová jen tehdy, jedná-li se o ten samý bod
   Nebylo by krásné, kdyby se vzdálenost mezi dvěma různými body rovnala nule a my bychom tak mohli být na dvou místech zároveň? Z matematického hlediska rozhodně ne.
3. Vzdálenost bodu X od bodu Y je rovna vzdálenosti bodu Y od bodu X
   Tato podmínka vypadá na první pohled jako samozřejmá, ale v normálním světě často neplatí. Každý cyklista ví, že vyjet na kopec trvá mnohem déle než se tou samou cestou vrátit. Čas strávený v sedle však není z matematického hlediska vzdálenost, protože tuto podmínku nesplňuje. Matematici nejezdí na kole.
4. Trojúhelníková nerovnost – přímá cesta není nikdy delší než objížďka
   I tato podmínka je v normálním světě často porušena. Cena letenky nebo jízdenky mezi dvěma městy X a Y bývá často nespolehlivým měřítkem jejich vzdálenosti, protože díky různým slevám apod. může být levnější jet oklikou přes město Z. Ve skutečnosti je velmi obtížné najít dopravce, který trojúhelníkovou nerovnost beze zbytku dodržuje.

Podrobnější rozbor by ukázal, že návrhy holubice Holly, plejtváka Péti a dokonce i osla Osvalda všechny čtyři podmínky splňují. Král Lev se tedy bude muset rozhodnout čistě podle estetických hledisek.

Podle návrhu holubice Holly je jednotková kružnice množina bodů, pro kterou platí

$$|x| + |y| = 1. \tag{1}$$

Rovnice s absolutní hodnotou se typicky řeší rozdělením na několik případů, ve kterých nemění výrazy v absolutní hodnotě znaménko. V našem případě se jedná o čtyři případy, které se navíc shodují se čtyřmi kvadranty souřadnicového systému:

$$x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0 \qquad x - y = 1, x \geq 0, y < 0$$
$$-x + y = 1, x < 0, y \geq 0 \qquad -x - y = 1, x < 0, y < 0.$$

V prvním kvadrantu platí, že $y = 1 - x$, což je rovnice úsečky z bodu $[0,1]$ do bodu $[1,0]$ (dosaďte si za x několik čísel z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a výsledek vyneste do grafu) – viz obrázek 7a. Podobně bychom vyřešili i zbylé tři případy a kružnice podle holubice Holly vypadá jako čtverec postavený na roh (obrázek 7b). Vzdálenosti, kterou Holly používá, se říká „Manhattanská". Určitě tušíte, proč ☺

Návrh plejtváka Péti $\max(|x|,|y|) = 1$ můžeme rovněž rozdělit na 4 případy:

$$\max(x,y) = 1, x \geq 0, y \geq 0 \qquad \max(x,-y) = 1, x \geq 0, y < 0$$
$$\max(-x,y) = 1, x < 0, y \geq 0 \qquad \max(-x,-y) = 1, x < 0, y < 0.$$

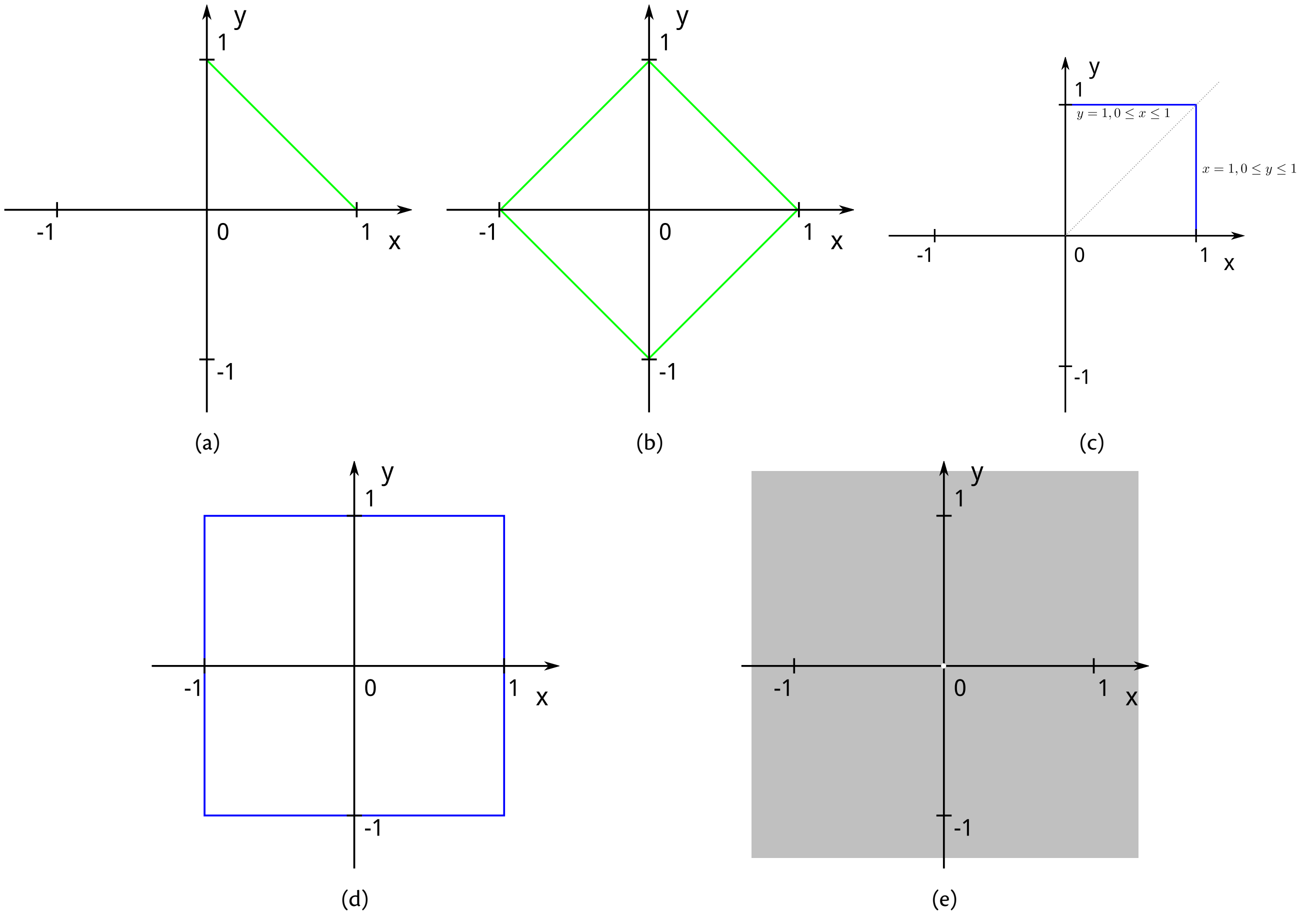
Rovnice $\max(x,y) = 1$ může být v prvním kvadrantu splněna jen tehdy, je-li $x = 1$ nebo $y = 1$ (a nebo obojí – bod $[1,1]$ leží na Péťově kružnici). Druhá (nejedničková) souřadnice musí být zároveň menší než 1, protože jinak by neplatilo, že maximum z obou souřadnic je rovno 1. Část Péťovy kružnice v prvním kvadrantu tedy obsahuje takové body, pro které je splněna alespoň jedna z těchto podmínek:

$$x = 1, 0 \leq y \leq 1 \qquad y = 1, 0 \leq x \leq 1$$

První z nich je svislá úsečka mezi body $[1,0] - [1,1]$ a druhou si lze představit jako vodorovnou úsečku mezi body $[0,1] - [1,1]$ (obrázek 7c). Řešení ve zbylých kvadrantech bude podobné a kružnice plejtváka Péti bude vypadat jako čtverec (obrázek 7d).

Kružnice osla Osvalda je ze všech nejpodivnější. Množina bodů, jejichž vzdálenost od počátku je rovna 1, je totiž celá rovina kromě počátku. Osvaldova kružnice tedy není křivka, ale dvourozměrný objekt, takže není zřejmé, jak definovat její obvod. Navíc jednotková kružnice je jediná, která může existovat, kružnice o jiném poloměru jsou prázdné množiny. Vskutku bizarní (obrázek 7e).

Pro kterou kružnici by se měl Lev rozhodnout? Inu, jak už to bývá, všechny mají něco do sebe.



Obrázek 7

Úloha 5B Číselné štěstí

Řešení této úlohy je zdánlivě skryto v zadání, vždyť není náhodou 1 000 000 zároveň šťastné a radost rozdávající? Jeho ciferný součet je roven 1, která patří mezi dělitele 1 000 000 a s postupným nahrazováním součtem druhých mocnin jednotlivých cifer také brzo skončíme, protože $1^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 = 1$, což znamená, že 1 000 000 rozdává radost a zároveň je šťastné. Není však řešením úlohy, protože není *větší než* 1 000 000. Přesto však je možné úlohu vyřešit bez mechanického zkoušení všech možných čísel. Ze zadání víme, že je-li součet druhých mocnin jednotlivých cifer roven 10, je číslo šťastné, protože v dalším kroku se dostaneme na 1. Z tohoto důvodu je 13 šťastné a spolu s ním všechna čísla, která se skládají z cifer 1, 3 a dále samých nul. Ciferný součet takových čísel je roven 4 a chceme-li, aby zároveň rozdávalo radost, musí být zároveň čtyřmi dělitelné. Tomu vyhovuje např. 1 000 300, které je i možným řešením úlohy.