Kategorie mladší

Úloha 1A Korálky

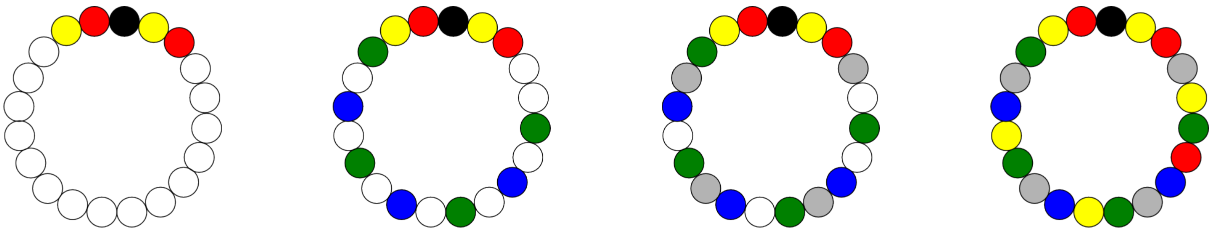
Způsobů, jak korálky při splnění všech Heleniných podmínek navléci, je celá řada a dá se říci, že správné jsou všechny postupy, které nakonec vedou ke správnému cíli.

Mnohé z vás napadlo začít s navlékáním od neoblíbeného černého korálku a vedle něj podle Helenina přání umístit z jedné strany žlutý a červený a z druhé červený a žlutý korálek (obrázek 1a).

Protože si Helena nepřeje, aby měla vedle sebe zelený a modrý korálek, umístíme na své pozice nyní všechny tři modré a čtyři zelené korálky – udělat to můžeme různými způsoby, například tak, jako je na obrázku 1b.

Teď už nám zbývá umístit jenom tři žluté, jeden červený a čtyři bílé korálky. Začneme bílými, kterých je nejvíc, a umístíme je do náramku tak, aby žádný z již navlečených korálků nesousedil se dvěma bílými korálky, například jako je na obrázku 1c. (Pozice obsazené bílými korálky jsou pro přehlednost vybarveny světle šedě.)

A jdeme do finále, teď už stačí jenom rozmístit tři žluté a jeden červený korálek. Do pozice vpravo nahoře nemůžeme umístit červený korálek, protože bílý by potom sousedil se dvěma červenými. Z druhé strany vedle následujícího zeleného korálku potom musí být korálek červený. Zbývající dvě pozice obsadíme žlutými korálky a náramek je hotový (obrázek 1d).


(a) (b) (c) (d)

Obrázek 1

Úloha 2A Žabka obkládá

Protože chce mít Terka proužky okolo celé místnosti, je nejdříve potřeba spočítat, jak budou tyto proužky dlouhé. Dva horní proužky v koupelně budou mít délku obvodu koupelny, tedy $2 \cdot (4+7) = 22$ dlaždic (obvod obdélníka = $2 \cdot (a+b)$). Od spodních čtyř proužků musíme odečíst šířku dveří, protože ty se obkládat nebudou: $2 \cdot (4+7) - 2 = 20$ dlaždic. Proužky na toaletě spočítáme podobně, horní dva budou mít délku $2 \cdot (2+3) = 10$ dlaždic, dolní čtyři $2 \cdot (2+3) - 2 = 8$ dlaždic.

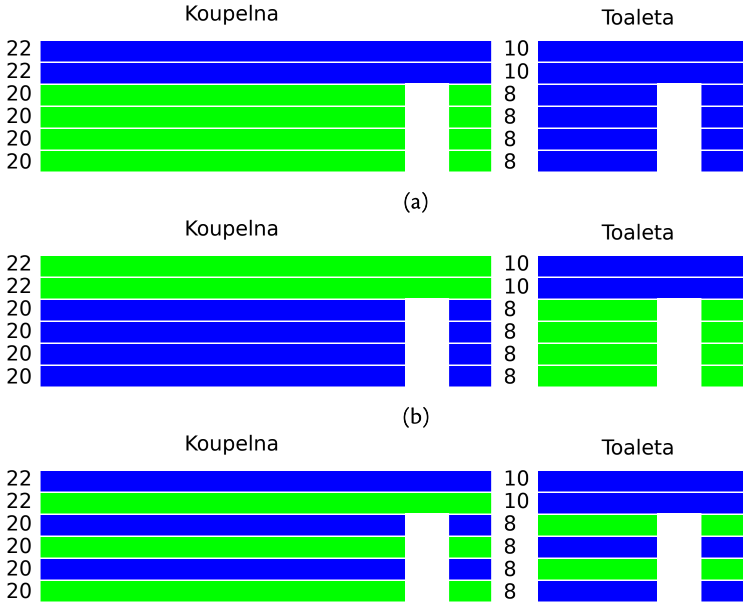
Máme tedy:

- 2 proužky délky 22 dlaždic
- 4 proužky délky 20 dlaždic
- 2 proužky délky 10 dlaždic
- 4 proužky délky 8 dlaždic

Teď se snažíme najít takovou kombinaci barev, abychom použili jen tolik dlaždic, kolik máme k dispozici. Můžeme buď

- Využít všech 80 zelených (například $4 \cdot 20$, $3 \cdot 20$ a $2 \cdot 10$, $2 \cdot 22$ a $2 \cdot 8$ a $2 \cdot 20 \ldots$) Zbytek dlaždic pak bude modrý (4 modré zbydou). Jedno z možných řešení je na obrázku 2a.
- Využít všech 100 modrých (například $4 \cdot 20$ a $2 \cdot 10$, $2 \cdot 22$ a $2 \cdot 8$ a $2 \cdot 20 \ldots$) Zbytek dlaždic pak bude zelený (4 zelené zbydou). Jedno z možných řešení je na obrázku 2b.
- Vyrovnat rozdíl v počtu dlaždic tak, že použijeme například $2 \cdot 10$ modrých (možností je opět více), zbytek bude střídavě zelený/modrý. Zbydou pak dvě zelené a dvě modré dlaždice, což se Terce jistě bude hodit při případných opravách. Možné řešení je na obrázku 2c.

Proužky o stejné délce mezi sebou můžeme libovolně prohazovat, čímž vzniká mnoho dalších možností, mohli jste si vybrat tu, která nejvíce lahodí vašemu oku. Výborně to popsal Tomáš Veselý, pěkně problém vyřešil i Vilda Gutvald, který si dal práci s estetickou stránkou věci.

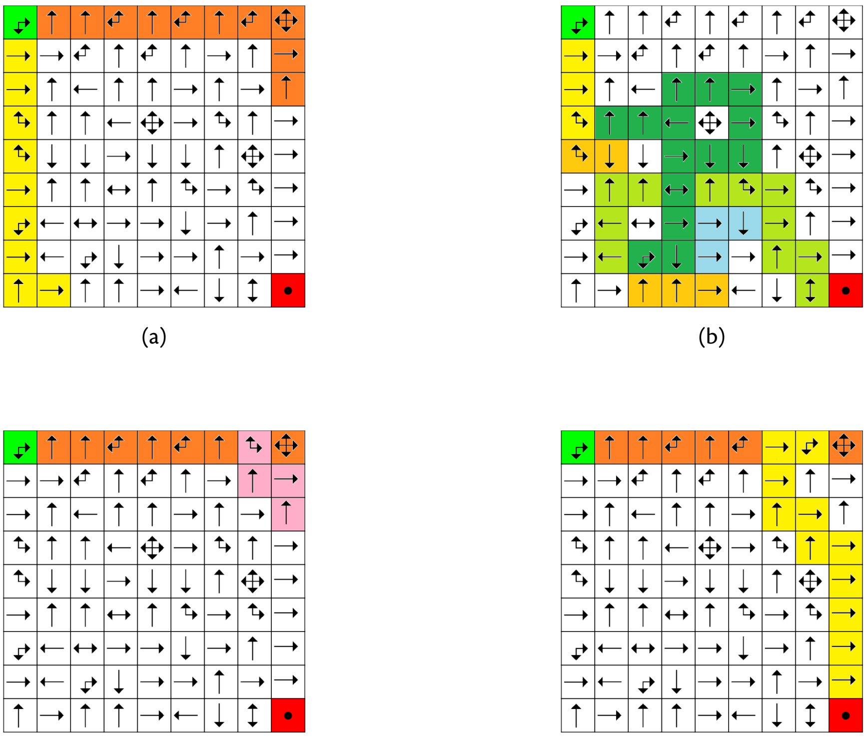


(a) (b) (c)

Obrázek 2

Úloha 3A Bludiště

K tomu, aby Daniel našel správnou cestu, je hlavně potřeba neztrácet hlavu a celou situaci dobře promyslet. Za předpokladu, že se první políčko už neotočí, může jít buď doprava, nebo dolů. Na obrázku 3a je pak znázorněno, jak daleko se v tomto případě může dostat pouze po hranách – v obou případech bzry dojde na políčko, které míří mimo plochu. Cestou má však několik možností k odbočení. Pokud takto projde cestu směrem dolů, narazí na dvě odbočky (obrázek 3b). Ta nižší jej přesměruje rovnou zpět, jedná se tedy o slepou uličku. U odbočky výše se dá postupovat mnohem lépe – jedním políčkem přitom projde dvakrát, pokaždé vyhovujícím směrem, a poměrně snadno se tedy může dostat do cíle. Cestou si musí dát pozor pouze na dvě slepé odbočky (oranžová a modrá), které vedou opět mimo plochu.



(a) (b) (c) (d)

Obrázek 3

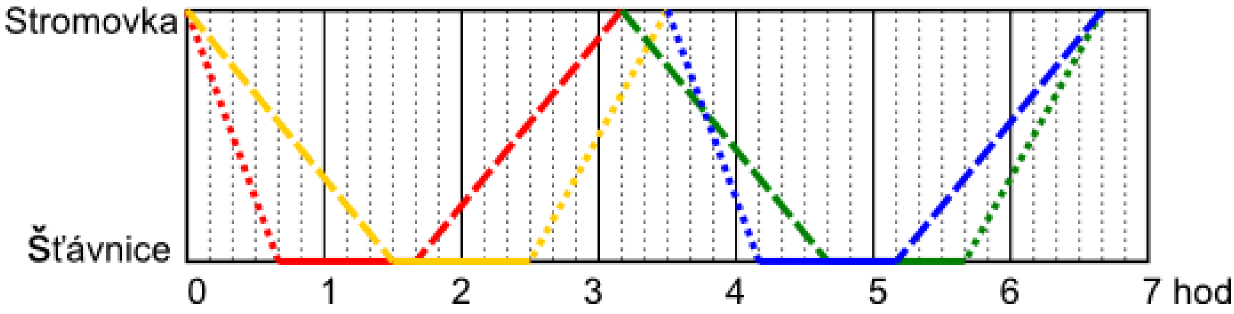
Druhá možnost je potom zamířit směrem doprava. Jediná šance, jak nedojít opět do slepého ramena, je políčko v pravém horním rohu, ze kterého se Daniel může vrátit na políčko předchozí. Z něj se může vydat dolů, to jej však opět „zavře“, jak je vidět na obrázku 3c. Nicméně pokud se znovu místo toho vrátí do pravého horního rohu a znovu se dá přes dvě již několikrát otočená políčka (na obrázku 3d již v poloze před Danielovým posledním vstupem), může již poměrně snadno dosáhnout cíle.

Úloha 4A Výlet

Protože si Mařena přeje, aby každé zvířátko absolvovalo jednu cestu na kole a jednu na voru, a zároveň mají být po skončení výletu všechna kola a vory zpět ve Stromovce, je jasné, že nejlepší bude rozdělit zvířátka na sudý počet stejně velkých skupin – v takovém případě si potom výletníci ve Šťávnici prostě jenom vymění dopravní prostředky a po prohlídce města se mohou vesele vrátit zpět. Bohužel ale nestačí rozdělit zvířátka jenom na poloviny. Každá skupina by potom totiž měla 72 členů, a Mařena má k dispozici jenom 60 jízdních kol a 64 (= 4 · 16) míst na vorech. Rozdělíme tedy zvířátka do čtyř skupin po 48 a pro lepší přehlednost si průběh výletu zakreslíme do jednoduchého schématu (Obrázek 4).

Nejprve ze Stromovky současně vyrazí skupina 48 zvířátek na kolech (ve schématu znázorněno tečkovaně) a 48 zvířátek na vorech (znázorněno čárkovaně). Ve Šťávnici stráví hodinu (znázorněno plnou čarou), a poté se vrátí zpět do Stromovky - skupina, která cestou tam jela na kole, pojede na vorech, a naopak. Hned poté, co se červená skupinka vrátí do Stromovky, může na vory nasednout dalších 48 zvířátek a vyrazit do Šťávnice. O 20 min později, až se na kolech vrátí i žlutá skupina, se může na cestu vydat i poslední část výletníků. Obě skupiny opět stráví ve Šťávnici hodinu a na druhém dopravním prostředku se vrátí zpět. Je vidět, že obě skupiny dorazí do Stromovky ve stejný čas, a to 6 hodin a 40 minut po začátku výletu. Při tomto průběhu výletu dokonce bude Mařena potřebovat pro účastníky jenom 48 kol a 3 vory, a zvířátka tedy jistě výrazně ušetří.

Ke stejnému výsledku (tedy 6 hodinám a 40 minutám) se dostaneme i jinými způsoby. Můžeme například zvířátka rozdělit na nestejně velké skupiny, třeba dvě šedesátičlenné a dvě dvanáctičlenné, a další průběh výletu už bude stejný. Výlet lze ale naplánovat i jiným, trošku složitějším způsobem. Rozhodneme se využít maximální kapacitu, kterou nám vory a kola nabízí, a pošleme do Šťávnice 60 zvířátek na kolech a 4 plně obsazené vory (tedy 64 zvířátek). Na 20 zvířátek se místo nedostane a musí zatím počkat. Poté, co si prohlédnou Šťávnici, vydají se zvířátka zpět – 60 těch, kteří původně jeli na kolech, na voru, zvířátka z vorů na kolech. Na čtyři se kolo bohužel nedostane a musí ve Šťávnici zůstat (budiž jim útěchou, že Šťávnice je plná kaváren a obchůdků se suvenýry, a nudit se tedy určitě nebudou). Poté, co vory dorazí zpět do Stromovky, nasedne na ně zbývajících 20 zvířátek a dojedou do Šťávnice. Nyní tedy máme ve Šťávnici 24 výletníků a minimálně dva vory. Obojí, jak výletníky, tak vory, potřebujeme dostat zpět do Stromovky, jediný problém je v tom, že to nemůžeme udělat současně (zvířátka musí jet do Stromovky na kolech). Ve Stromovce tedy vybereme ze zvířátek, která se již z výletu vrátila, 24 dobrovolníků a na kolech je pošleme do Šťávnice. Tam předají kola posledním výletníkům a sama se vrátí do Stromovky na vorech. Pokud si zapíšete délky trvání jednotlivých přesunů, zjistíte, že i v tomto případě bude výlet trvat 6 hodin a 40 minut. Uvidíme, kterou variantu nakonec Mařena zvolí.



Obrázek 4

Úloha 5A Minové pole

Protože zvířátka mají pouze malý kousek papíru a málo času, je potřeba mít řešení co nejjednodušší (obecné). Nebudou si tedy zvlášť počítat trasu uraženou za jednotlivé dny (tedy cestu uraženou za první den, za druhý den a tak dále až k poslednímu dni), ale raději se pokusí řešení shrnout do jednoho výrazu.

Za první den urazila zvířátka šestinu trasy, zbývající trasu po tomto dni si tedy mohou vyjádřit jako vzdálenost bez této šestiny: $144 \cdot (1 - \frac{1}{6})$ km $= 144 \cdot \frac{5}{6}$ km. Obdobně se dá zbývající vzdálenost zapsat až do čtvrtého dne s tím, že samozřejmě ony části trasy bereme ze zbývající vzdálenosti z předchozího dne. Získáme tedy: $144 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ km což je po úpravě rovno $\frac{144}{3}$ km.

Pátý den už je situace složitější a musíme se podívat zpět na to, jak vypadala trasa, kterou zvířátka zdolala druhý den. Z předchozího dne zbývala trasa $144 \cdot \frac{5}{6}$ km a pátý den urazila zvířátka polovinu z desetiny tohoto výrazu, tedy $\frac{1}{2} \cdot \frac{144 \cdot \frac{5}{6}}{10}$ km, což je po úpravě $\frac{144}{24}$ km. Tuto trasu pak můžeme pohodlně odečíst od již získaného výrazu pro 4 dny a získáme $\frac{144}{3}$ km $- \frac{144}{24}$ km.

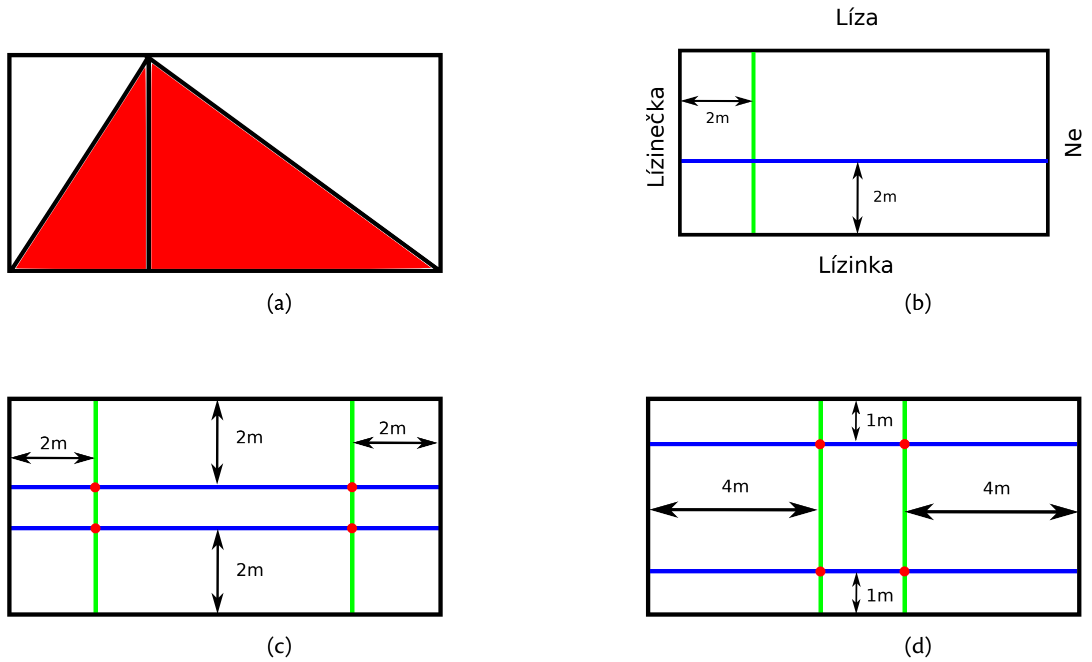
Zbývá určit již jen šestý den. Vzdálenost za druhý den známe – tou je $\frac{144 \cdot \frac{5}{6}}{10}$ km a čtvrtý den opět určíme jako danou část ze zbývající trasy z předchozího dne, konkrétně tedy $(144 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3}$ km. Trasu za šestý den tedy odečtu od již zjištěného zbytku trasy z pátého dne a získám: $\frac{144}{3} - \frac{144}{24} - \frac{144}{12} - \frac{144}{6} = 48 - 6 - 12 - 24 = 6$ km. Do cíle zbývá tedy zvířátkům urazit ještě 6 kilometrů.

Kategorie starší

Úloha 1B Ohrádka pro kozičky

Sečteme-li plochy, které potřebují kozičky k pastvě ($20 + 15 + 10 + 5$ m^2 $= 50$ m^2), snadno zjistíme, že se kozičky do ohrady, která má rozměry 5×10 m (a tedy plochu 50 m^2) přesně vejdou. Každá z koziček tedy bude mít k dispozici právě minimální požadovanou plochu.

Když Beny zatluče doprostřed ohrady kůl a k němu natáhne ze všech rohů ohrady ohradníky, vzniknou čtyři trojúhelníky: dva se základnou 5 m a dva se základnou 10 m. Obsah trojúhelníka se spočítá podle vztahu $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$, kde v_a je výška trojúhelníka na stranu a (proč je to tak, je dobře vidět na obrázku 5a).



Obrázek 5

Pokud tedy Beny nejmenší kozičku Lízinečku umístí ke kratší straně ohrady (obrázek 5b), vzdálenost kůlu od této strany se vypočítá ze vztahu

$$S_1 = \frac{a_1 \cdot v_{a_1}}{2}$$

takto:

$$v_{a_1} = \frac{2 \cdot S_1}{a_1},$$

tedy $v_{a_1} = \frac{2 \cdot 5}{5}$ m $= 2$ m. Kůl tedy musí umístit někam na modrou čáru. Kam přesně, na tom už obsah Lízineččiny pastvy nezávisí, můžeme s ním tedy pohybovat libovolně.

Protější pastva bude patřit koze Ne, protože $S_2 = \frac{5.(10-2)}{2}$ m^2 $= 20$ m^2. Polohu kůlu na modré čáře určíme umístěním další kozičky (například Lízinky) k delší straně ohrady. Opět vypočítáme potřebnou vzdálenost kůlu: $v_{a_3} = \frac{2 \cdot 10}{10}$ m $= 2$ m, kůl bude tedy vzdálen 2 m od kraje ohrady (zelená čára). Na Lízu pak zbývá poslední část ohrady, která má plochu $S_4 = \frac{10 \cdot (5-2)}{2}$ m^2 $= 15$ m^2. Kůl bude umístěn 2 m od kratší strany ohrady a 2 m od delší strany. Tato podmínka ovšem dovoluje více řešení (viz obrázek 5c), kozičky na protějších stranách můžeme libovolně prohazovat, musíme ale vždy dodržet to, že Lízinečka bude naproti Ne a Lízinka naproti Líze (čtyři možná řešení).

Další čtyři řešení dostaneme, pokud Lízinečku na začátku umístíme nikoli ke kratší straně, ale ke straně delší (viz obrázek 5d). Kůl by pak byl vzdálen $v_{a_1} = \frac{2 \cdot 5}{10}$ m $= 1$ m od delší strany a $v_{a_3} = \frac{2 \cdot 10}{5}$ m $= 4$ m od strany kratší.

Úloha 2B Trénující gepard

První den uběhne Martin 500 metrů. Druhý den uběhne o 10 procent víc, což je

$$500 + 500 \cdot 10\,\% = 500 + 500 \cdot 0,1 = 500 \cdot (1,1) = 550 \text{ m}.$$

Třetí den to bude

$$550 + 550 \cdot 10\,\% = 550 + 550 \cdot 0,1 = 550 \cdot (1,1),$$

po dosazení poslední rovnosti z předchozího dne

$$500 \cdot (1,1) \cdot (1,1) = 500 \cdot (1,1)^2.$$

Čtvrtý den (tedy za tři dny) to bude analogicky $500 \cdot (1,1)^3$.

366. den (tedy za 365 dní) to bude $500 \cdot (1,1)^{365}$, což je $6,4 \cdot 10^{17}$ metrů $= 641,65$ petametrů. Jak někteří z vás správně podotkli, kdyby tuto vzdálenost měl Martin uběhnout za jediný den, musel by několikanásobně přesáhnout rychlost světla.

Úloha 3B Dolování

Začneme tím, že si spočítáme průřez chodby. Chodba se skládá z půlkruhu o poloměru $r = 0,7$ m a rovnoramenného lichoběžníku s podstavami délek $a = 2$ m a $c = 1,4$ m a výškou $v = 2 - 0,7$ m $= 1,3$ m. Průřez chodby má tedy plochu

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + (a+c) \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0,7^2 + (2+1,4) \cdot \frac{1,3}{2}\ \mathrm{m}^2 = 2,98\ \mathrm{m}^2.$$

Abychom mohli vypočítat, kolik metrů takových chodeb budeme potřebovat vydolovat, musíme zjistit, jaký objem zeminy se nachází v haldě o výšce 1602 m. Objem kužele se spočítá jako

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot S_k \cdot v_k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_k^2 \cdot v_k,$$

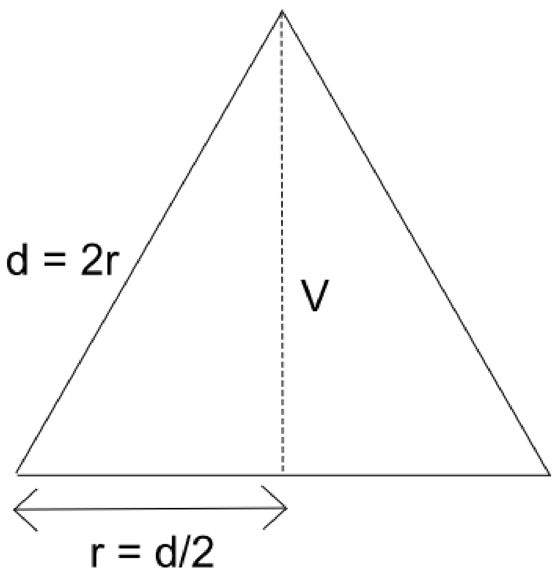
kde S_k je plocha podstavy kužele a v_k je jeho výška. My ale zatím neznáme poloměr podstavy haldy. Protože ale víme, že halda má tvar rovnostranného kužele a že tedy průměr její podstavy je stejný jako délka strany (viz obrázek 6), můžeme poloměr snadno dopočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} (2r_k)^2 &= r_k^2 + v_k^2 \\ 4r_k^2 - r_k^2 &= v_k^2 \\ 3r_k^2 &= v_k^2 \\ r_k &= \sqrt{\frac{v_k^2}{3}} = 924,9\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Vypočítaný poloměr dosadíme do vzorečku pro objem kužele:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_k^2 \cdot V_k = \frac{1}{3}\pi \cdot 924,9^2 \cdot 1602\ \mathrm{m}^3 = 1\,435\,095\,123\ \mathrm{m}^3$$

a vydělíme tento objem plochou chodby: $\frac{1\,435\,095\,123}{2,98}$ m $= 481\,575\,544,6$ m $= 500\,000$ km. Aby vytvořila druhou Sněžku, musela by tedy zvířátka vykutat téměř $500\,000$ km chodeb. Při vší úctě ke schopnostem zubra Michala, něco takového se jim asi stěží podaří.



Obrázek 6

Úloha 4B Želví regulátor

Regulátor funguje na principu rovnováhy sil na páce, obě vědra tedy musí být stejně těžká, v našem případě musí mít hladinu vody stejně vysoko. Vědro s dírou má snahu tuto rovnováhu porušit, protože jak z něj voda vytéká, stává se vědro lehčím. Druhé vědro (to bez díry) tedy musí kohout otevírat, aby do děravého vědra pustilo více vody. Vědro s dírou naopak musí kohout zavírat. Díky této regulaci se ve vědru s dírou bude udržovat stejná hladina vody jako ve vědru bez díry.

Žižina chce dosáhnout průtoku 1 litr za sekundu, což znamená (pokud si litry vyjádříme v základních jednotkách) objemový průtok $Q_v = 0,001\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$. Dále víme, že voda má protékat dírou velikosti $S = 5\ \mathrm{cm}^2 = 0,0005\ \mathrm{m}^2$. Z těchto hodnot můžeme určit požadovanou výtokovou rychlost v pro daný průtok Q_v, tedy $v = \frac{Q_v}{S} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Pokud neznáme vzoreček, můžeme si představit, že počítáme výšku válce s podstavou S tak, aby měl objem Q_v.

Teď už stačí jen ze vzorečku pro výtokovou rychlost vyjádřit výšku h a dosadit $h = \frac{v^2}{2g} = 0,2$ m. V obou vědrech tedy musí být výška hladiny $h = 20$ cm. Pro vylepšení může Žižina do vědra bez díry naskládat adekvátní množství kamenů, pak nebude regulátor ovlivňován vypařováním vody.

Pro zvědavé: Princip rovnováhy sil na páce se dá najít prakticky u všech mechanických regulátorů od regulátorů tlaku nebo průtoku až po regulátory otáček parního stroje nebo sekačky na trávu.

Úloha 5B Motýlí sraz

Arnošt se samozřejmě musí odpíchnout od znalosti konkrétního počtu baboček. Na nich přímo závisí informace o lišajích – je jich o 200 % více. Jediné, čím se nesmí nechat zmást, je fakt, že je-li číslo větší o 200 %, znamená to, že je to vlastně 100 % $+$ 200 % z původního čísla, celkem je jich tedy oproti babočkám trojnásobek, nikoli dvojnásobek, jak by se na první pohled mohlo zdát. Nyní již může získat jednotlivé poměry, které potřebuje k řešení, tedy:

babočky : lišajové = 3 : 1
lišajové : modrásci = 10 : 9
modrásci : otakárci = 2 : 5

Počet lišajů získá snadno ze známého poměru a znalosti počtu baboček, celkem jich je tedy $\frac{60}{3} = 20$. Nyní může dosadit tuto hodnotu i do dalšího poměru. Nicméně Arnošt ví, že lepší řešení je takové, které neužívá žádné mezivýpočty, ale pouze hodnoty známé ze zadání, bude tedy postupovat přes poměry. Vezme tedy první dva poměry:

babočky : lišajové = 3 : 1
lišajové : modrásci = 10 : 9

A převede je na jeden poměr. Společný násobek 1 a 10 je 10, první poměr tedy přenásobí 10, čímž získá jednotný poměr:

babočky : lišajové : modrásci = 30 : 10 : 9

Pro poměr baboček a modrásků získává tedy:

babočky : modrásci = 30 : 9
60 : modrásci = 30 : 9

A protože 60 je dvarkát více než 30, musí i modrásků být $2 \cdot 9$, aby byl zachován poměr. Modrásků se tedy na srazu pohybuje 18 kousků.

Stejně tak Arnošt získá i počet otakárků. Vezme si již známý poměr baboček a modrásků a poslední poměr ze zadání:

babočky : modrásci = 30 : 9
modrásci : otakárci = 2 : 5

a analogicky k předchozímu druhu motýlů přenásobí první poměr 2 a druhý 9, čímž získá:

babočky : modrásci : otakárci = 60: 18 : 45
babočky : otakárci = 60 : 45

A může opět už jen dosadit za počet baboček 60, tedy vidí, že otakárků bude přesně 45 a tím zná konečně přesný počet účastníků.