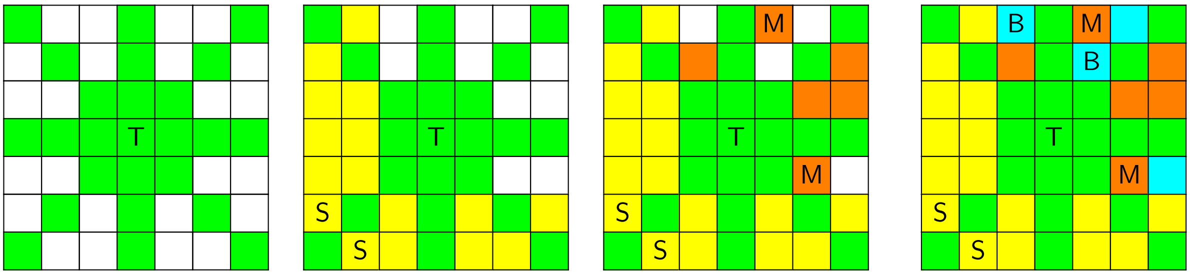
Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):
Přesný čas je jen jeden. Nemůže se stát, že by dva dobře seřízené budíky ukazovaly různý čas. Ze zadání navíc víme, že správně seřízený budík se od ostatních liší buď v jedné, ve dvou, ve třech nebo ve čtyřech cifrách a každá možnost je alespoň jednou zastoupena. Vypišme si tedy do tabulky v kolika cifrách se jednotlivé časy od sebe liší:

	02:42	06:42	13:07	13:57	19:07	19:27	23:52
02:42	0	1	4	4	4	4	3
06:42	1	0	4	4	4	4	3
13:07	4	4	0	1	1	2	3
13:57	4	4	1	0	2	2	2
19:07	4	4	1	2	0	1	4
19:27	4	4	2	2	1	0	4
23:52	3	3	3	2	4	4	0

Vidíme, že jediný vyhovující je 13:07. Od 13:57 a 19:07 se liší jen v jedné cifře, od 19:27 ve dvou, od 23:52 ve třech a od 02:42 a 06:42 ve všech čtyřech cifrách. Správný čas je 13:07 a Richard by si měl pořídit silnější brýle.

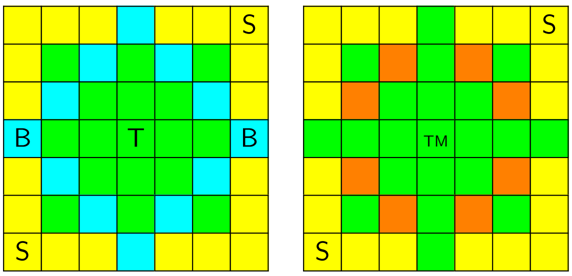
Úloha 2A (6 bodů):
Existuje mnoho způsobů, jak ovládat celé údolí dostupnými jednotkami (koneckonců v rozporu se zadáním se nejedná o zanedbatelné síly, v reálném světě by mohly způsobit pěknou paseku). Nejmocnější ze všech dostupných zbraní je tank, a proto je přirozené ho umístit doprostřed údolí (obrázek 1 a)). Samohybná děla mohou střílet jen vodorovně a svisle, proto je logické je umístit někam, kde tuto vlastnost nejlépe využijí. Konkrétně někam do rohu (obrázek 1 b)). Po jejich zapojení zbývá jen 10 nechráněných políček, která pokryjeme vhodným rozmístěním minometů a bojových vozidel pěchoty (obrázek 1 d)).



a) b) c) d)

Obrázek 1 Rozmístění jednotek v údolí

V zadání se ovšem nikde nepíše, že musíme použít všechny jednotky nebo že na každém políčku musí stát nejvýše jedna:



a) b)

Obrázek 2 Alternativní rozmístění jednotek v údolí

Na obrázku 2 a) jsme vůbec nepotřebovali minomety a v případě 2 b) jsme celé údolí zvládli pokrýt pouhými čtyřmi jednotkami.

Úloha 3A (7 bodů):
Má-li být objem zakopané části roven objemu střechy, překvapivě potřebujeme zjistit objem střechy projektované knihovny. Můžeme si ji představit jako trojboký hranol o rozměrech $8 \times 4 \times 20$ metrů (šířka $\times$ výška $\times$ délka, výšku jsme spočítali jako polovinu šířky domu), ze kterého byl odebrán jiný, menší trojboký hranol o rozměrech $4 \times 2 \times 20$ metrů (šířka $\times$ výška $\times$ délka). Objem střechy bude

$$V_S = V_1 - V_2 = \left(\frac{8 \cdot 4 \cdot 20}{2} - \frac{4 \cdot 2 \cdot 20}{2}\right)\ \mathrm{m}^3 = 240\ \mathrm{m}^3. \tag{1}$$

Spodní část knihovny má být kvádr s podstavou o rozměrech 8×20 metrů (šířka $\times$ délka), takže objem zakopané části můžeme vyjádřit jako

$$V = 8 \cdot 20 \cdot h, \tag{2}$$

kde h je hloubka, ve které bude knihovna zakopána. Protože se objem střechy a základů rovnají, musí platit

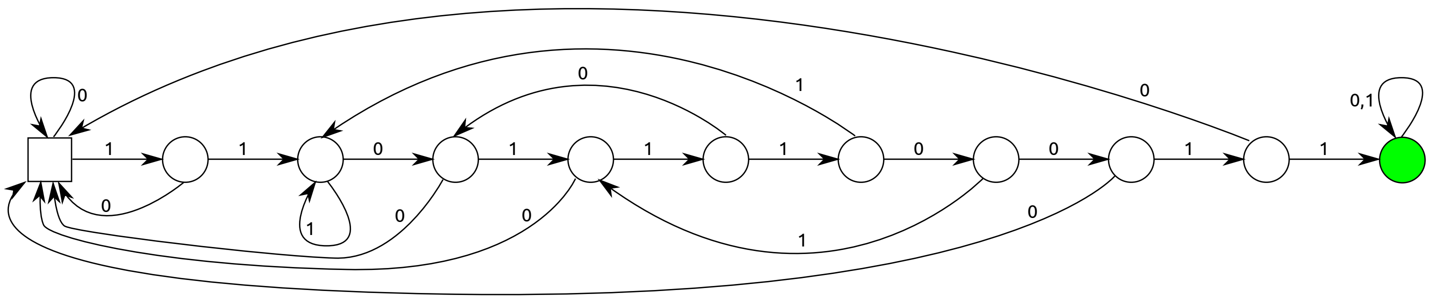
$$\begin{aligned} V_S &= V \\ 240 &= 8 \cdot 20 \cdot h \\ h &= \frac{240}{160}\ \mathrm{m} = 1,5\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

Před stavbou nové knihovny by dělníci měli vykopat jámu hlubokou $1,5$ m.

Úloha 4A (9 bodů):
Před návrhem jakéhokoli stavového automatu je nejprve třeba rozhodnout, kolik různých stavů by měl mít. V našem případě navrhujeme zámek, který se odemkne tehdy, je-li posledních 10 cifer zadáno správně. Je tedy přirozené, aby měl stavy reprezentující situace „1 cifra zadaná správně“, „2 cifry zadané správně“, „3 cifry zadané správně“, atd. až po „10 cifer zadaných správně“ (což je zároveň koncový stav, ve kterém se zámek odemkne). K těmto deseti by navíc měl zámek mít počáteční stav, ve kterém se nachází před zadáním jakékoli cifry. Dohromady tedy 11 stavů. Jestliže Jiří při vyťukávání kódu nikde neudělá chybu, s každou další správně zadanou číslicí by měl zámek přejít do dalšího stavu a nakonec se odemknout. Jak by se ale měl chovat v případě, že se Jiří splete? Na první pohled se zdá, že by po každé chybě měl přejít do počátečního stavu, aby mohl Jiří vyťukat celý kód znovu. Jenže to by znamenalo, že v určitých případech by zámek nefungoval správně. Představme si, že se Jiří nejdříve rozhodne zámek otevřít (tedy naťukat 1101110011), ale po prvních třech cifrách si vzpomene, že si zapomněl něco na půdě. Na chvíli odběhne a než se vrátí, už si nepamatuje, kde skončil a začne tedy zadávat kód zase od začátku. Po prvních dvou znacích (11) zámek poslušně přejde o dva stavy blíže odemčení, avšak ne z prvního do třetího stavu, jak si myslí Jiří, ale ze čtvrtého do šestého. Jakmile tedy Jiří zadá třetí znak kódu (0), nastane chyba a zámek přejde do počátečního stavu a i kdyby Jiří naťukal zbývajících 7 cifer bez chyby, neodemkne se. Problém je, že i když člověk udělá chybu, může se posledních pár cifer shodovat s odpovídajícím počtem cifer na začátku kódu. Vypišme si tedy všechny možnosti, které mohou při zadávání kódu nastat:

Předchozí cifry	Zadáno	Shoda
-	0	žádná
1	0	žádná
11	1	11
110	0	žádná
1101	0	žádná
11011	0	110
110111	1	11
1101110	1	1101
11011100	0	žádná
110111001	0	žádná

Z tabulky např. plyne, že zadá-li Jiří 11011101, nesmí se vnitřní stav zámku změnit na počáteční, ale na pátý. Po zahrnutí všech podobných pozorování bude stavový diagram zámku vypadat takto (čtvereček označuje počáteční stav a zelené kolečko cílový):



Obrázek 3 Stavový diagram kódového zámku

Úloha 5A (5 bodů):
Vzestupně seřazená sekvence čísel musí splňovat jednu velmi jednoduchou vlastnost: ať už si vybereme jakékoli číslo, všechna čísla nalevo od něj musí být menší a napravo větší. Ve skutečnosti dokonce stačí, aby nejbližší soused nalevo byl menší a nejbližší soused napravo větší (pokud totiž toto platí pro všechna čísla v sekvenci, musí být setříděná). Můžeme dodat, že každé číslo musí sousedit s čísly, která se od něj liší o co nejméně, a právě tato podmínka je pro Zdeňka důležitá. V původní sekvenci 4, 1, 3, 5, 2 spolu nesousedí žádná dvě čísla, která by sousedit měla a Zdeněk by se měl snažit, aby se po každém rozstřihnutí a opětovném slepení proužku zvětšil počet dvojic čísel, které spolu mají sousedit. Na začátku si tedy může vybrat, zda proužek rozstřihne mezi čísly 1 a 3 nebo 3 a 5 a zda otočí první nebo druhou část (případně je prohodí). Předpokládejme, že rozstřihne proužek mezi 3 a 5 a druhou část otočí:

$$41352 \longrightarrow 25413$$

Díky tomuto kroku se čísla 4 a 5 dostala k sobě. I nyní má Zdeněk několik možností jak pokračovat, např. rozstřihnout proužek mezi 4 a 1 a druhou část otočit:

$$25413 \longrightarrow 25431$$

Dále může odstřihnout jedničku z konce papírku a nalepit ji na začátek:

$$25431 \longrightarrow 12543$$

Poslední krok je už jednoduchý. Pokud Zdeněk rozstřihne papírek mezi čísly 2 a 5 a druhou část otočí, dostane seřazenou sekvenci 1, 2, 3, 4, 5:

$$12543 \longrightarrow 12345$$

V každém kroku si Zdeněk mohl vybrat, jak dál postupovat, což mu dává nepřeberné množství možností, jak čísla seřadit. Např. následující tři by ho také dovedly k výsledku po čtyřech krocích:

41352 ⟶ 14352	41352 ⟶ 41253	41352 ⟶ 31452
14352 ⟶ 12534	41253 ⟶ 41235	31452 ⟶ 31254
12534 ⟶ 12543	41235 ⟶ 12354	31254 ⟶ 12543
12543 ⟶ 12345	12354 ⟶ 12345	12543 ⟶ 12345

Řešení vyžadující více než čtyři kroky jsou také správná, ale zbytečně dlouhá.

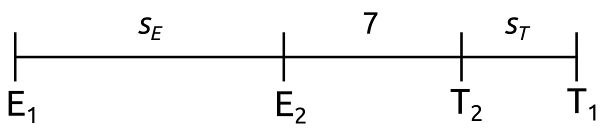
Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Připomeňme si informace, které myšky o kódovém zámku získaly:

1. Kdyby se bral kód jako číslo, byl by dělitelný 3.
2. Žádná číslice se v kódu nevyskytuje více než jednou.
3. Součet třetí a čtvrté cifry je roven 7.
4. Součet poslední a druhé číslice je roven první číslici.
5. Nejmenší ze všech je čtvrtá cifra.
6. Třetí cifra je trojnásobek poslední číslice.
7. Součet všech číslic je 20x menší než součin těchto cifer.

Protože se žádná číslice v kódu nevyskytuje více než jednou (2) a čtvrtá cifra je nejmenší (5), musí být pátá cifra větší nebo rovna 1. Zároveň víme, že třetí cifra je trojnásobek poslední (6) a součet třetí a čtvrté cifry je roven 7 (3), z čehož vyplývá, že poslední cifra je buď 1, nebo 2, třetí cifra 3 nebo 6 a čtvrtá cifra 4 nebo 1 (aby byl splněn součet třetí + čtvrtá = 7). Jenže čtvrtá cifra nemůže být rovna 4, protože pak by nebyla nejmenší ze všech, takže můžeme prohlásit, že třetí cifra je 6, čtvrtá 1 a pátá 2. Kód jako celek je dělitelný třemi (1), což znamená, že jeho ciferný součet musí být dělitelný třemi. Součet zatím známých cifer je $6 + 1 + 2 = 9$, takže i součet prvních dvou číslic musí být dělitelný třemi. Z poznatku (4) navíc vyplývá, že první cifra je rovna druhá + 2. V úvahu tak připadají dvě dvojice: $4, 2$ a $7, 5$. První možnost však porušuje pravidlo o jednoznačnosti (2), takže první cifra je 7 a druhá 5. Pro jistotu ještě ověříme, že součet všech číslic je $20\times$ menší než součin těchto cifer (7): $20 \cdot (7 + 5 + 6 + 1 + 2) = 420 = 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2$. Zámek k tajné skrýši kočky Máši se odemkne po zadání kódu 75612.

Úloha 2B (6 bodů):
Zvířecí verze hry Kámen, nůžky, papír preferuje fyzicky zdatná zvířátka, ale zároveň dává šanci těm pomalejším. Když totiž pomalejší hráč prohraje stříhání, musí utíkat kratší vzdálenost než jeho protivník. Zda se mu podaří utéct za startovní čáru závisí na vzdálenosti, kterou uběhl v první fázi hry (běh proti sobě). Stav hry po jejím skončení je znázorněn na následujícím obrázku:



Obrázek 4 Stav hry v okamžiku stříhání

Evžen i Tarquinius vyběhli ze startovního bodu (Evžen z E_1, Tarquinius z T_1), nějakou chvíli běželi proti sobě a zastavili se 7 metrů od sebe (Evžen v bodě E_1, Tarquinius v T_2). Zatím nemůžeme přímo spočítat, jakou vzdálenost uběhli ale víme, že oba běželi stejně dlouho. Podle známého vztahu mezi rychlostí, dráhou a časem $t = \frac{s}{v}$ můžeme psát

$$\frac{s_E}{v_E} = \frac{s_T}{v_T}, \tag{3}$$

kde s_E je vzdálenost, kterou uběhl Evžen, s_T vzdálenost, kterou uběhl Tarquinius a v_E a v_T jsou jejich rychlosti. Protože $s_T + s_E + 7 = 22$, po úpravách a dosazení ve správných jednotkách (rychlosti v metrech za sekundu) dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{s_E}{v_E} &= \frac{22 - 7 - s_E}{v_T} \\
s_E v_T &= 15 v_E - s_E v_E \\
s_E v_T + s_E v_E &= 15 v_E \\
s_E &= \frac{15 v_E}{v_T + v_E} = \frac{15 \cdot 0,35}{0,15 + 0,35}\ \mathrm{m} = 10,5\ \mathrm{m}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Není těžké dopočítat, že Tarquinius v první fázi uběhne $s_T = 22 - 7 - s_E = 4,5$ m. Protože Evžen vyhrál stříhání, pokusí se ve druhé fázi hry chytit Tarquinia dříve, než se dostane na svou startovní čáru. Sice bychom mohli zjistit, kde Evžen Tarquinia polapí, ale snadnější bude spočítat, kdo první doběhne na Tarquiniovu startovní čáru – pokud Evžen, vyhrává celou hru, a pokud Tarquinius, skončí hra nerozhodně. Evžen poběží

$$t_E = \frac{22 - s_E}{v_E} = 32,9\ \mathrm{s}, \tag{5}$$

zatímco Tarquinius

$$t_T = \frac{s_T}{v_T} + 4 = 34 \text{ s.} \tag{6}$$

(Tarquinius musí po střihnutí 4 vteřiny přemýšlet, zda je on tím pronásledovaným, nebo jestli má naopak nahánět svého soupeře, proto +4). Z toho vyplývá, že Evžen Tarquinia chytí včas a díky tomu vyhraje.

Úloha 3B (7 bodů):

V jakékoli fyzikální úloze bývá klíčem k úspěchu zavést si vhodné značení. I my tak učiníme – objem celé kry označíme jako V_k, objem vynořené části jako V_{k_1}, ponořené V_{k_2}, hustotu kry symbolem ρ_k a hmotnost celé kry, vynořené části a ponořené části po řadě m_k, m_{k_1} a m_{k_2}. A konečně objem vytlačené vody označíme jako V_v, její hmotnost m_v a hustotu ρ_v.

Kdybychom znali rozměry celé kry, dopočítat její objem by už bylo snadné. Zatím však vůbec není jasné, jak její rozměry zjistit. Rozhodně musíme odolat pokušení vynásobit rozměry vynořené části nějakou magickou konstantou, která vyplývá ze selského rozumu. Nikdy si totiž nemůžeme být jisti, zda je naše intuice správná. Úlohu raději vyřešíme „opačným směrem“: nejdříve zjistíme objem celé kry a z něho dopočítáme rozměry. Objem celé kry je roven $V_k = V_{k_1} + V_{k_2}$. Hodnotu V_{k_1} určíme snadno, protože ze zadání známe rozměry vynořené části:

$$V_{k_1} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 60}{3} \text{ m}^3 = 200000 \text{ m}^3 \tag{7}$$

Objem ponořené části bude zajímavější. Z Archimédova zákona víme, že je roven objemu vytlačené vody:

$$V_{k_2} = V_v. \tag{8}$$

Objem vytlačené vody můžeme vyjádřit ze známého vztahu mezi hustotou, hmotností a objemem:

$$V_{k_2} = \frac{m_v}{\rho_v}. \tag{9}$$

Archimédův zákon nám rovněž říká, že hmotnost vytlačené vody je rovna hmotnosti celé kry. Ve vzorci 9 tedy můžeme zaměnit m_v za m_k. Hmotnost kry dále vyjádříme pomocí jejího objemu a hustoty:

$$V_{k_2} = \frac{m_k}{\rho_v} = \frac{V_k \rho_k}{\rho_v} = \frac{(V_{k_1} + V_{k_2})\rho_k}{\rho_v}. \tag{10}$$

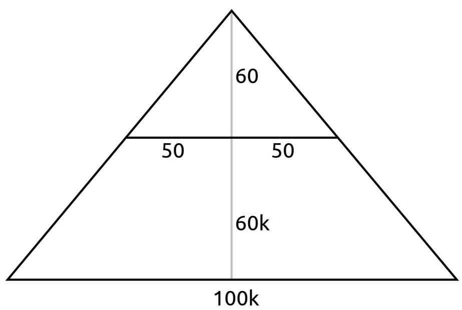
V rovnici 10 se nachází jediná neznámá V_{k_2}, takže nezbývá než ji vyjádřit a spočítat:

$$\begin{aligned} V_{k_2} &= V_{k_1}\frac{\rho_k}{\rho_v} + V_{k_2}\frac{\rho_k}{\rho_v} \\ V_{k_2}\left(\rho_v - \rho_k\right) &= V_{k_1}\rho_k \\ V_{k_2} &= V_{k_1}\frac{\rho_k}{\rho_v - \rho_k} = 200000\frac{917}{1025 - 917} \text{ m}^3 = 1698148 \text{ m}^3 \end{aligned} \tag{11}$$

(hustoty jsme dosadili v jednotkách kg/m^3, tedy $\rho_v = 1025$kg/m^3 a $\rho_k = 917$kg/m^3). Objem celé kry je

$$V_k = V_{k_1} + V_{k_2} = (200000 + 1698148) \text{ m}^3 = 1898148 \text{ m}^3. \tag{12}$$

Rozměry celé kry zjistíme s využitím věty o podobnosti trojúhelníků nastíněné v nápovědě na konci zadání. Představme si řez celou krou podél její tělesové výšky, který prochází středy dvou protihlehlých stran základny. Pro vynořenou část má tvar rovnoramenného trojúhelníka o výšce 60 m a délce základny 100 m. Rozměry řezu celé kry zatím neznáme, ale podle zmiňované věty je jeho výška k-krát větší než výška vynořené části a délka jeho základny k-krát větší než délka základny vynořené části (viz obrázek 5).



Obrázek 5 Řez krou

Poměr objemů vynořené části a celé kry je tedy roven

$$\frac{V_{k_1}}{V_k} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 60}{100k \cdot 100k \cdot 60k} = \frac{1}{k^3}$$

Konstantu k vypočítáme jako třetí odmocninu poměru objemu celé kry a její vynořené části:

$$k = \sqrt[3]{\frac{V_k}{V_{k_1}}} = \sqrt[3]{\frac{1898148}{200000}} = 2,12 \tag{13}$$

Objem celé kry je 1898148 m^3, na výšku měří $60k = 127$ m a strana čtverce tvořícího její základnu má $100k = 212$ m. Přestože Leoš narazil na úctyhodnou kru, Cheopsova pyramida v Gíze je ještě o $10,5$ m vyšší (případně o $11,8$ m, informace o výšce pyramidy se různí).

Úloha 4B (9 bodů):

Alagebřané museli být velmi zákeřný národ. Nejenže zkracují sčítání a násobení pomocí roztodivných klikyháků, ale dokonce jsou schopni v jejich popisu vyrobit chybu. V zadání totiž v definici produktu

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

chybí x_i na pravé straně rovnice, což může působit matoucím dojmem. Inu, taková je archeologie, člověk se musí při studiu starodávných skript obrnit trpělivostí. Pusťme se raději do rozplétání významu jednotlivých termů výrazu

$$y = \frac{\prod\limits_{i=2}^{6}\left(\left(\sum\limits_{j=i}^{64} j\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{64} k\right)\right)}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(\left(\sum\limits_{j=1}^{i} j\right)^{i-1}\right)}. \tag{14}$$

Začněme čitatelem, ve kterém se nachází rozdíl dvou sum: $\sum\limits_{j=i}^{64} j$ a $\sum\limits_{k=1}^{64} k$. Druhá nám říká toto: Projdi všechna přirozená k od 1 do 64 a sečti je. Jinými slovy sečti všechna přirozená čísla od 1 do 64. První nás vyzývá k sečtení čísel od i do 64, kde i je definováno v produktu před závorkou se sumami a probíhá od dvou do šesti. Postupně všechna i projdeme a pro každé rozdíl sum vypočítáme. Jestliže $i = 2$, lze první sumu přepsat jako součet všech přirozených čísel od 2 do 64. Rozdíl obou sum tedy můžeme rozepsat jako

$$\begin{aligned} & 2 + 3 + 4 + \ldots + 64 - 1 - 2 - 3 - \ldots - 64 = \\ = & -1 + 2 - 2 + 3 - 3 + 4 - 4 + \ldots + 64 - 64 = \\ = & -1. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro každého sčítance z první sumy najdeme v druhé sumě číslo opačné a jediný sčítanec, který zbyde z druhé sumy, je -1. Pokud $i = 3$, zbyde z druhé sumy $-1 - 2$ pro $i = 4$ zbyde $-1 - 2 - 3$ a takto bychom mohli pokračovat až do $i = 6$. Hodnota čitatele tedy bude

$$\begin{aligned} & (-1) \cdot (-1 - 2) \cdot (-1 - 2 - 3) \cdot (-1 - 2 - 3 - 4) \cdot (-1 - 2 - 3 - 4 - 5) = \\ = & (-1) \cdot (-3) \cdot (-6) \cdot (-10) \cdot (-15) = \\ = & -2700. \end{aligned} \tag{15}$$

Jmenovatele můžeme pro názornost přepsat takto:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{4}\left(\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)^{i-1}\right) &= \left(\left(\sum_{j=1}^{1} j\right)^{1-1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{2} j\right)^{2-1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{3} j\right)^{3-1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{4} j\right)^{4-1}\right) \\ &= \left(\left(\sum_{j=1}^{1} j\right)^{0}\right) \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{2} j\right)^{1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{3} j\right)^{2}\right) \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{4} j\right)^{3}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Každý činitel v součinu (**16**) odpovídá jedné hodnotě proměnné i. V prvním z nich máme sumu všech čísel od jedné do jedné, což na první pohled může působit zmatečně, ale ve skutečnosti se zkrátka jedná o číslo 1. Navíc hodnota této sumy není příliš důležitá, protože jak známo, cokoli na nultou je jedna (až na 0^0, hodnota tohoto výrazu není definována). Zbylé sumy dekódujeme snadno, takže jmenovatel bude roven

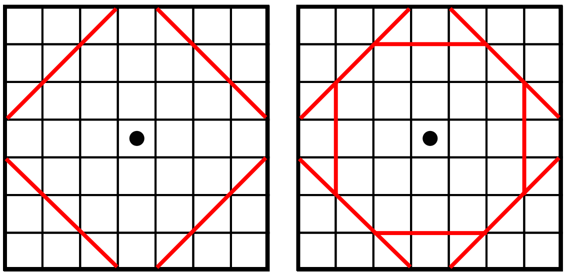
$$1^0 \cdot (1+2)^1 \cdot (1+2+3)^2 \cdot (1+2+3+4)^3 = 1 \cdot 3 \cdot 36 \cdot 1000 = 108000. \tag{17}$$

Hodnota celého zlomku a řešení příkladu tak bude

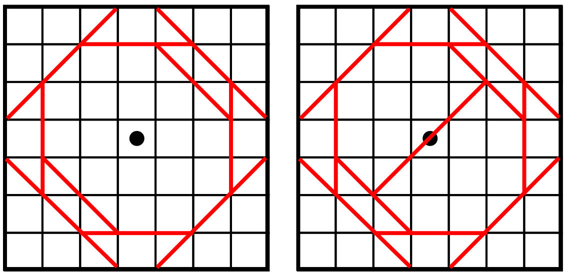
$$y = \frac{-2700}{108000} = -\frac{1}{40}. \tag{18}$$

Úloha 5B (5 bodů):

Dokud si v bažině nevybudoval žádné pevné body, může Kryštof pouze položit kmeny našikmo do jejích rohů – buď přes jedno políčko, dvě, nebo tři. První dvě možnosti však nejsou nijak užitečné, protože kmeny v rozích nelze spojit kládami rovnoběžnými s břehy, kterými by se přiblížil ke svému cíli. Kryštof tedy začne budovat chodníčky takto:



K bodu uprostřed bažiny se Kryštof dostane nejrychleji spojením sousedních vodorovných a svislých kmenů kládami délky 2 (měřeno v úhlopříčkách jednotlivých políček), na které položí kmen délky 3 vedoucí přes bod uprostřed bažiny:



Úloha je vyřešena, Kryštof se může soustředit na stavbu domečku. Nejedná se samozřejmě o jediné řešení, stejně dobře mohl rozmístit klády třeba takto: