Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):
Výrazů splňujících zadání, jejichž výsledkem je číslo 0, 2, 3, 4 nebo 5, existuje nepřeberné množství. Některé z nich jsou shrnuty v následující tabulce:

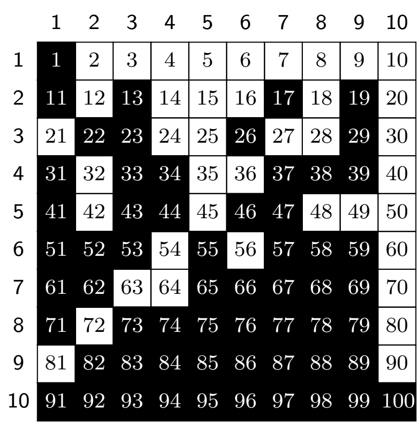
0	2	3	4	5
$(5+4)/3-2-1$	$2\cdot 5-4-3-1$	$4-5+3+2-1$	$2\cdot 5-4-3+1$	$1+2+3+4-5$
$1\cdot 4-2+3-5$	$5+3-4-2\cdot 1$	$(5+3)/4+2-1$	$5+4-3-2\cdot 1$	$1\cdot 2\cdot 3+4-5$
$4+3-5\cdot 1-2$	$(4\cdot 3)/2-5+1$	$(5\cdot 4)/(3+2)-1$	$4\cdot 1-5+3+2$	$(5\cdot 4)/(3+2)+1$
$(4\cdot 3)/2-5-1$	$(5+1)/2+3-4$	$(5+4-3)/(2\cdot 1)$	$4+3-5\cdot 1+2$	$3\cdot 4-5-1\cdot 2$
$4\cdot 2-5-3\cdot 1$	$(5\cdot 3+1)/4-2$	$(4\cdot 3-2)/5+1$	$4\cdot 3-2-1-5$	$2\cdot 4+3-1-5$

Tabulka pochopitelně není vyčerpávající, není těžké vymyslet mnoho dalších správných řešení.

Úloha 2A (6 bodů):
Rozbor celé hry je nejlepší začít odzadu, tedy ze stavu, kdy v osudí zbývá posledních pár tyček. Jestliže zbývá jediná tyčka, vyhrává hráč, který je na tahu. Stejně tak, pokud zbývají dvě nebo tři. Jestliže však zbývají čtyři a druhý hráč neudělá chybu, pak prohraje – ať už odebere jednu, dvě či tři tyčky, druhý hráč může hru vždy vítězně ukončit. Michalovým cílem je tedy dostat hru do stavu, kdy zbývají čtyři tyčky a táhne první hráč. To se mu nemusí podařit, jestliže po jeho tahu zbyde v osudí pět, šest nebo sedm tyček, avšak pokud jich bude osm, tak ano – první hráč odebere jednu, dvě nebo tři a Michal tolik, aby celkový součet z těchto dvou tahů byl čtyři. Toto platí obecně, pokud neudělá chybu, může Michal vždy docílit toho, že po tahu protihráče a jeho samého zmizí z osudí čtyři tyčky. Bude-li navíc hrát tak, aby vždy po jeho tahu byl počet zbývajících tyček dělitelný čtyřmi, vyhraje. Výherní strategie tedy vypadá takto:
Jestliže zbývá 11 tyček, odeber 3.
Jestliže zbývá 10 tyček, odeber 2.
Jestliže zbývá 9 tyček, odeber 1.
Jestliže zbývá 7 tyček, odeber 3.
Jestliže zbývá 6 tyček, odeber 2.
Jestliže zbývá 5 tyček, odeber 1.
Jestliže zbývají 3, 2 nebo 1 tyčka, odeber všechny.

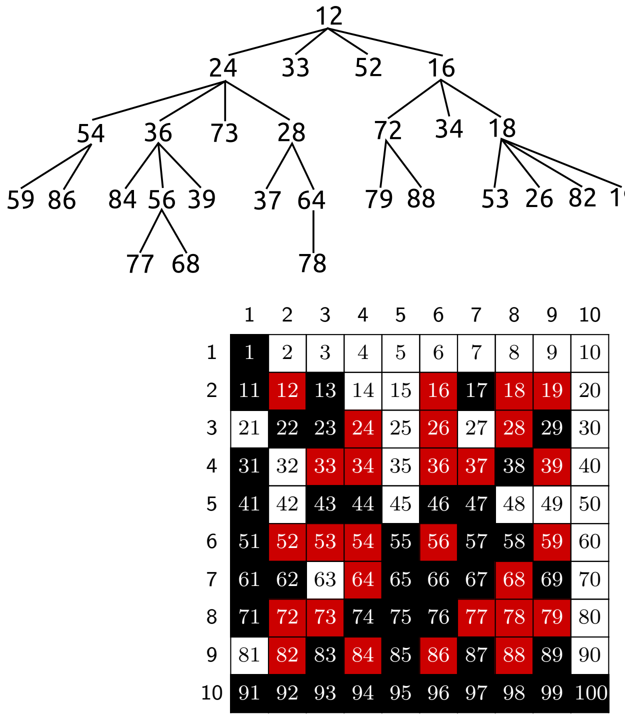
S touto strategií se hra nikdy nemůže dostat do stavu, kdy zbývá 12, 8, nebo 4 tyčky a táhne Michal, a proto pravidla pro tyto počty chybí.

Úloha 3A (7 bodů):
Připomeňme, že lekníny jsou vzájemně propojeny podle následujícího pravidla: jesliže Iveta skočí na políčko s číslem x, potopí se kromě x všechny rostliny, jejichž řádek $\cdot$ sloupec $= x$. To znamená, že pokud číslo leknínu nelze zapsat jako součin dvou čísel menších nebo rovných 10, nepotopí tento leknín žádnou další rostlinu. Tento požadavek splňují prvočísla větší než 10 a jejich násobky. K nim musíme přidat čísla, která sice nemají mezi svými děliteli žádné prvočíslo větší než 10, ale přesto je nelze zapsat jako součin dvou čísel menších nebo rovných 10. Jedná se o 75, 84, 96, 98 a 100. Poslední hledané číslo je 1. Leknín číslo 1 potopí jen rostlinu na políčku $[1, 1]$, tedy sebe sama. Lekníny, které nestáhnou ke dnu žádnou další rostlinu, jsou černě vyznačeny na následujícím obrázku:

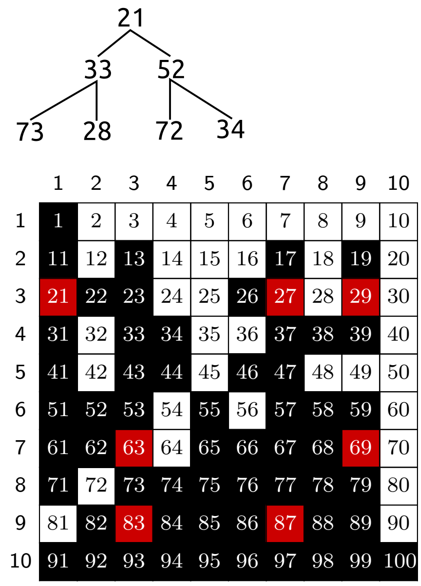


Obrázek 1 **Lekníny potápějící jen samy sebe**

Cesta z políčka 1 na políčko 100, na které Iveta potopí co nejméně leknínů, by měla vést hlavně přes rostlinky, které potápí jen samy sebe. Bohužel cesta, jež by vedla jen po černých políčkách, neexistuje. Iveta se bude muset dvakrát rozhodnout, na která bílá políčka skočí. Poprvé mezi 12 a 21 a podruhé mezi 45, 54, 63, 72 a 81. Rostliny, které se potopí poté, co Iveta skočí na políčko 12 resp. 21, jsou tyto:

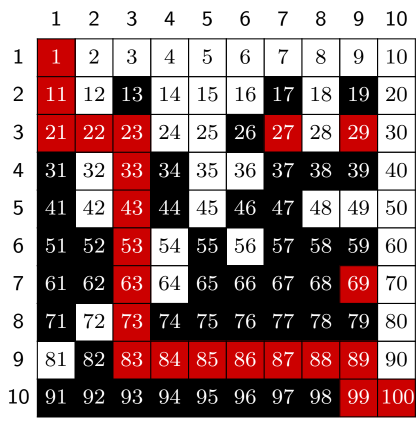


Rostlinky potopené leknínem 12



Rostlinky potopené leknínem 21

Na první pohled je zřejmé, že leknín 12 potopí mnohem více rostlinek než leknín 21 (konkrétně 27 oproti šesti). Iveta by se měla rozhodnout pro 21 i z jiného důvodu: mezi jím potopenými rostlinkami se totiž nachází i leknín 63, díky čemuž se nebude muset rozhodovat, na jaké další bílé políčko skočí. Kromě 12 a 63 by cesta měla co nejvíce vést přes už potopená políčka a zároveň být co nejkratší. Ivetě se nevyplatí skákat přes políčka 27, 29 a 69, protože by při cestě k nim potopila příliš mnoho leknínů. Políčka 83 a 87 jí nicméně dvě potopené rostlinky ušetří, a proto musí vést cesta přes ně. Tyto požadavky splňuje např. 1, 11, 21, 22, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 99 a 100.



Obrázek 2 Nejlepší cesta (jedna z možností)

Ivetě stačí na překonání celého jezírka 18 skoků a potopí při tom 22 leknínů.

Úloha 4A (9 bodů):

Není těžké si všimnout, že motýli D a E jsou blízce příbuzní: E se vyvinul z D po změně jediného písmenka genetického kódu. Trpělivým zkoumáním karlova seznamu zjistíme, že o jedno písmenko se liší pouze dva motýli: slonovinovec zlatořemen a dědouška polní maršál.

slonovinovec zlatořemen ACAGTGCTCAAGCAACGAGC

dědouška polní maršál ACAGTGCTCAAGCAATGAGC

Protože se žádná další dvojice lišící se o jediné písmeno v seznamu nenachází, jeden z nich určitě představuje D a druhý E, ale zatím nevíme, který je který.
Motýli D a E jsou blízce příbuzní s C a B. D se vyvinul z jejich společného předka po jedné změně v genetickém kódu, E po dvou, B také po dvou a C po třech. Spolu s poznámkou ze zadání, že co změna to jedno písmeno, to znamená, že B se liší od D ve třech písmenech a C ve čtyřech. Nezbývá než spočítat rozdílná písmenka v genomech slonovinovce zlatořemena, dědoušky polního maršála a ostatních motýlů a pokusit se určit, kteří motýli představují druhy B, C, D a E:

	dědouška polní maršál	slonovinovec zlatořemen
panovník přelétavý	5	6
přemyslík anýzový	3	4
svítáník maliníkovitý	6	7
temnoň modronosý	4	5
tkadlevník rysí	8	9
vlčaj životrup	7	8

Jediná dvojice v tabulce, která se liší ve třech písmenech, je přemyslík anýzový a dědouška polní maršál, takže bez dalšího zkoumání můžeme říci, že dědouška polní maršál = D, slonovinovec zlatořemen = E a přemyslík anýzový = B. Dále víme, že C se od dědoušky polního maršála liší ve čtyřech písmenech genetického kódu a jediný motýl, který tomuto kritériu vyhovuje, je temnoň modronosý.
Pro další postup potřebujeme znát genetický kód společného předka B, C, D a E (označíme jej písmenem I). Již víme, že od B se bude lišit ve dvou písmenech a od D v jednom, takže existují tři různí kandidáti:

B: GCTGTGCTTAAGCAATGAGC

D: ACAGTGCTCAAGCAATGAGC

I1: GCAGTGCTCAAGCAATGAGC

I2: ACTGTGCTCAAGCAATGAGC

I3: ACAGTGCTTAAGCAATGAGC

Toho pravého najdeme porovnáním s genetickým kódem temnoně modronosého (C): zatímco I1 a I2 se od C liší v pěti písmenech, I3 jen ve třech, což je přesně rozdíl, který očekáváme. Společný předek motýlů B, C, D a E má tedy genetický kód I = ACAGTGCTTAAGCAATGAGC. Dalším krokem je identifikace motýla A, jehož genom se od I liší ve čtyřech písmenech:

	ACAGTGCTTAAGCAATGAGC
panovník přelétavý	4
svítáník maliníkovitý	5
tkadlevník rysí	7
vlčaj životrup	6

Z tabulky jasně vidíme, že A = panovník přelétavý. Společný předek A a I (označíme písmenem J) se musí lišit od A ve třech písmenech a od I v písmenku jednom, takže máme celkem čtyři možnosti:

A: AGAGTGCCTAAGTAATGACC

I: ACAGTGCTTAAGCAATGAGC

J1: AGAGTGCTTAAGCAATGAGC

J2: ACAGTGCCTAAGCAATGAGC

J3: ACAGTGCTTAAGTAATGAGC

J4: ACAGTGCTTAAGCAATGACC

Zatíme nelze říci, který je správný, ale porovnáním genetického kódu motýla C a všech kandidátů zjistíme, že J3 nemůže být společným předkem A a I, protože se s C liší ve třech písmenech, i když by měl ve čtyřech. Vrhněme se tedy na motýly F, G a H. F se od G liší ve čtyřech písmenech, od H ve třech a genomy motýlů G a H by se měly lišit v pěti písmenech:

	svítáník maliníkovitý	tkadlevník rysí	vlčaj životrup
svítáník maliníkovitý	0	5	3
tkadlevník rysí	5	0	4
vlčaj životrup	3	4	0

Je zřejmé, že svítáník maliníkovitý = H, tkadlevník rysí = G a vlčaj životrup = F. V tuto chvíli jsme identifikovali všechny motýly a můžeme se postupně propracovat k jejich společnému předkovi. Začneme nejbližším předkem F a G (označíme jej písmenem K) – jeho genom se od F musí lišit v jednom písmenu a od G ve třech, což dává celkem čtyři možnosti:

F: CCAGTACCTAAGGAATGCTC
G: CCAATATCTAAGGAATGTGC
K1: CCAATACCTAAGGAATGCTC
K2: CCAGTATCTAAGGAATGCTC
K3: CCAGTACCTAAGGAATGTTC
K4: CCAGTACCTAAGGAATGCGC

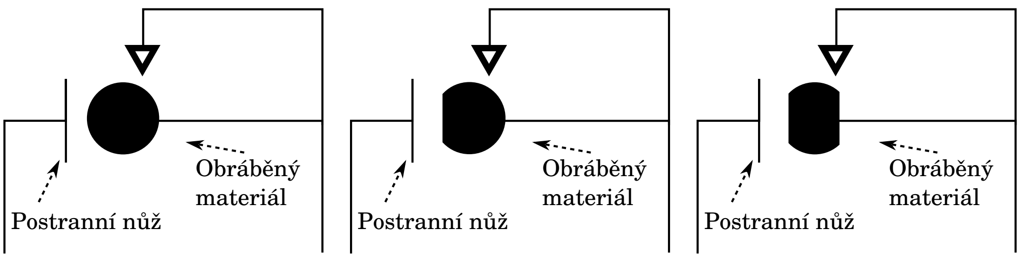
Toho správného najdeme pomocí H – K se totiž od něj musí lišit ve dvou písmenech genetického kódu:
H: CCAGTGCCTAAGGACTGCGC
K1: CCAATACCTAAGGAATGCTC
K2: CCAGTATCTAAGGAATGCTC
K3: CCAGTACCTAAGGAATGTTC
K4: CCAGTACCTAAGGAATGCGC

Vidíme, že motýl K musel mít genom stejný jako K4. Existují dva možní předci motýlů H a K (toho správného označíme písmenem L):
H: CCAGTGCCTAAGGACTGCGC
K: CCAGTACCTAAGGAATGCGC
L1: CCAGTGCCTAAGGAATGCGC
L2: CCAGTACCTAAGGACTGCGC

Zatím máme dva různé kandidáty pro L a tři pro J. Víme však, že se jejich genomy musí lišit ve třech písmenech a vyzkoušením všech možností zjistíme, že vyhovuje pouze kombinace J2, L1. Jejich společný předek (označíme M) je zároveň prapředkem všech motýlů:
J: ACAGTGCCTAAGCAATGAGC
L: CCAGTGCCTAAGGAATGCGC
M1: CCAGTGCCTAAGCAATGAGC
M2: ACAGTGCCTAAGGAATGAGC
M3: ACAGTGCCTAAGCAATGCGC

Správného kandidáta vybereme porovnáním jejich genomů s genomy ostatních motýlů. M1 se totiž liší od B ve třech písmenech, přestože bychom očekávali čtyři a M2 se liší od A také ve třech písmenech, přestože bychom rovněž očekávali čtyři a nakonec bychom zjistili, že vyhovuje jedině M3. Genetický kód společného předka všech motýlů je ACAGTGCCTAAGCAATGCGC a jednotlivé druhy přiřadíme ke kolečkům ve fylogenetickém stromu takto: A = panovník přelétavý, B = přemyslík anýzový, C = temnoň modronosý, D = dědouška polní maršál, E = slonovinovec zlatořemen, F = vlčaj životrup, G = tkadlevník rysí a H = svítáník maliníkovitý.

Úloha 5A (5 bodů):
Přestože je soustruh opravdu vhodnější na vyrábění „kulatých“ předmětů, krychli na něm lze vytvořit (alespoň teoreticky) docela jednoduše. Ivan musí vzít dostatečně velký kus materiálu, upevnit jej do soustruhu (a) a na jedné straně ho seříznout postranním nožem tak, aby se do vzniklé plošky vešel čtverec o rozměrech 1 cm × 1 cm (b). Pak ho musí otočit o 180° a seříznout na druhé straně tak, aby vzniklé plošky byly od sebe vzdáleny 1 cm (c).



a) b) c)

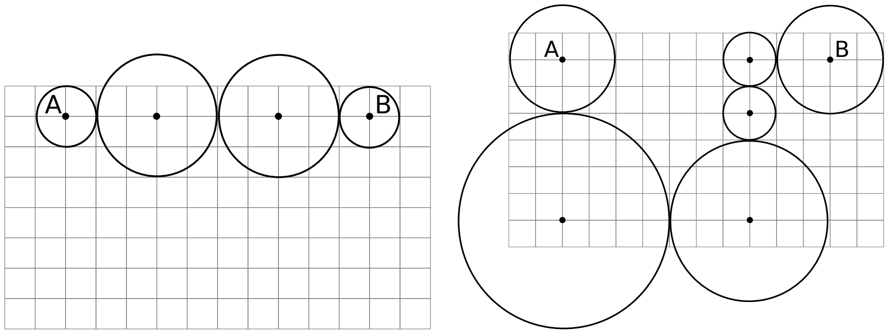
Stejnou proceduru zopakuje i na zbylých čtyřech stěnách obráběného materiálu a když bude pečlivý, získá krásnou hranatou krychličku o délce hrany 1 cm.

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Jestliže jedno (ozubené) kolečko otáčí druhým, točí se druhé opačným směrem než to první. Třetí (navázané na to druhé) by se točilo stejným směrem jako první, případné čtvrté opět opačně... Zkrátka chceme-li dosáhnout toho, že se kolečko v bodě B otáčí opačným směrem než kolečko v bodě A, musíme použít sudý počet koleček.
Rychlosti koleček závisí na jejich poloměrech. Pokud kolečko o poloměru r_1 otáčí kolečkem o poloměru r_2, bude se druhé kolečko točit $\frac{r_1}{r_2}$ krát rychleji než to první. Zapojením více koleček za sebe zjistíme zajímavou věc (r_A je zde poloměr kolečka v bodě A a r_B poloměr kolečka v bodě B):

$$\frac{r_A}{r_1}\frac{r_1}{r_2}\frac{r_2}{r_3}\cdots\frac{r_n}{r_B}=\frac{r_A}{r_B} \tag{1}$$

Poměr rychlostí prvního a posledního kolečka nezávisí na poloměrech koleček mezi nimi, takže mají-li se obě točit stejnou rychlostí, musí mít stejný poloměr. Do bodů A a B můžeme umístit buď dvě kolečka o poloměru 10 cm, nebo 20 cm, jiná možnost neexistuje. Zbylá kolečka je třeba umístit tak, aby naléhala těsně na sebe a byl jich sudý počet. Možná řešení jsou nakreslena na následujícím obrázku:



Obrázek 3 Správné rozmístění koleček

Úloha 2B (6 bodů):
Označíme Terčinu vzdálenost k menšímu víru jako r a k většímu jako $8-r$. V místě, kde se silové působení obou vírů vyrovná, musí platit

$$F_1 = F_2$$
$$\frac{m\cdot m_v}{r^2}=\frac{m\cdot 9m_v}{(8-r)^2}$$

Terka si sice nepamatuje svoji hmotnost a množství vody v menším víru, ale naštěstí můžeme m a m_v celou rovnici zkrátit a tím se těchto proměnných zbavit. Zároveň celou rovnici vynásobíme výrazem $r^2(8-r)^2$:

$$(8-r)^2 = 9r^2$$

Terka by chtěla proplout mezi víry, což znamená, že $0 < r < 8$, a tedy $8-r$ musí být kladné. Jestliže celou rovnici odmocníme, nepřipravíme se o žádné řešení:

$$8-r = 3r$$
$$8 = 4r$$
$$r = 2$$

Terka musí proplout $r = 2$ metry do menšího víru a $8 - r = 6$ metrů od většího.

Úloha 3B (7 bodů):

Před zahájením prohedávání je vhodné si ke každému políčku vypsat jeho cenu CENA(p), odhad ceny cesty z počátečního políčka CESTA(X,p) a odhad ceny cesty do cíle ODHAD(p,Y):

3	2	3	2	1
4	1	1	2	1
1	3	2	3	2
3	4	4	3	4
0	2	1	3	2

CENA(p)

4	3	2	1	0
5	4	3	2	1
6	5	4	3	2
7	6	5	4	3
8	7	6	5	4

ODHAD(p,Y)

1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
0	1000	1000	1000	1000

CESTA(X,p)

Na začátku známe jistě pouze cenu cesty z počátečního políčka do počátečního políčka (překvapivě CESTA(X,X) $= 0$) a o ostatních zatím nemáme další informace (proto CESTA(X,p) $=$ 1000).
Součet CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y) je s přehledem nejmenší pro počáteční políčko. Přesuneme se tedy na něj (krok 1), označíme jej šedou barvou jako navštívené a prohlédneme si jeho sousedy. Do obou se samozřejmě dostaneme laciněji než za 1000 – do políčka vpravo za CESTA(X,X) + CENA(q) $= 2$ a do políčka nahoře za CESTA(X,X) + CENA(q) $= 3$ (krok 2). Protože existují nenavštívená políčka, pro něž je CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y) $<$ CESTA(X,Y), vyhledávání není u konce a pokračujeme krokem 1.

1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
3	1000	1000	1000	1000
0	2	1000	1000	1000

Nenavštívené políčko s nejmenším součtem CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y) se nachází ve druhém sloupci posledního řádku (vyznačeno žlutě). Opět se na něj přesuneme a přepočítáme ceny cest do okolních políček a dále budeme postupně skákat na políčka, pro než je aktuálně součet CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y) nejmenší mezi všemi nenavštívenými políčky (vyznačena žlutě, v popisku každé tabulky je hodnota sledovaného součtu pro žluté políčko):

1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
3	6	1000	1000	1000
0	2	3	1000	1000

9

1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
3	6	7	1000	1000
0	2	3	6	1000

10

1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
4	1000	1000	1000	1000
3	6	7	1000	1000
0	2	3	6	1000

10

1000	1000	1000	1000	1000
8	1000	1000	1000	1000
4	7	1000	1000	1000
3	6	7	1000	1000
0	2	3	6	1000

11

Nyní existují celkem čtyři nenavštívená políčka, pro něž je součet CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y) nejmenší možný (v tomto případě 12): druhý sloupec třetího řádku, druhý a třetí sloupec čtvrtého řádku a poslední sloupec pátého řádku. Další políčko, na které skočíme, si z těchto čtyř můžeme vybrat libovolně.

1000	1000	1000	1000	1000
8	1000	1000	1000	1000
4	7	1000	1000	1000
3	6	7	9	1000
0	2	3	6	8

12

1000	1000	1000	1000	1000
8	1000	1000	1000	1000
4	7	1000	1000	1000
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

12

1000	1000	1000	1000	1000
8	8	1000	1000	1000
4	7	9	1000	1000
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

12

1000	10	1000	1000	1000
8	8	9	1000	1000
4	7	9	1000	1000
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

12

1000	10	12	1000	1000
8	8	9	11	1000
4	7	9	1000	1000
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

12

1000	10	12	1000	1000
8	8	9	11	1000
4	7	9	1000	1000
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

12

1000	10	12	1000	1000
8	8	9	11	1000
4	7	9	1000	1000
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

13

1000	10	12	13	1000
8	8	9	11	12
4	7	9	14	1000
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

13

Po posledním skoku jsme se dostali na políčko v pátém sloupci druhého řádku, které se nachází bezprostředně u cílového políčka. První odhad ceny cesty do cíle CESTA(X,Y) je roven 13:

1000	10	12	13	13
8	8	9	11	12
4	7	9	14	14
3	6	7	9	12
0	2	3	6	8

Nyní má poprvé smysl opravdu otestovat, zda existuje dosud nenavštívené políčko, pro nějž je součet CESTA(X,p) + ODHAD(p,Y) menší než CESTA(X,Y). Celkem čtyři políčka ho mají rovný 13 (první sloupec druhého řádku, druhý sloupec prvního řádku, třetí sloupec třetího řádku a čtvrtý sloupec čtvrtého řádku), ale žádné menší. Jsme hotovi, cena nejlepší cesty z Piotrova obydlí k řece je 13 a vede po těchto políčkách:

B	R	B	R	Y
H	T	T	R	T
T	B	R	B	R
B	H	H	B	H
X	R	T	B	R

Obrázek 4 Nejlepší cesta k řece

Algoritmus, který Piotr používal, jsme nevylovili jen tak z bahna. Jmenuje se A* (čti: A star) a za určitých podmínek (ODHAD(p,Y) nikdy nepřesáhne skutečnou cenu nejlepší cesty z políčka p do cíle) je to dokonce nejlepší možný algoritmus, který najde optimální cestu mezi dvěma políčky. Nezkouší totiž všechny možnosti, ale v prohledávaném prostoru se pohybuje inteligentně: všimněte si, že některých políček jsme se vůbec „nedotkli“ a jiná nás stála jen velmi malé úsilí.

Úloha 4B (9 bodů):

Vypočítat čas, který bude Mariana potřebovat na výlet k Sergejovi a zpět, je velmi jednoduché. Sergej žije 4 km proti proudu, cestou tam popluje Mariana rychlostí $v_{tam} = 5 - 3 = 2$ km/h, zatímco zpátky $v_{zpet} = 5 + 3 = 8$ km/h, takže celkový čas bude

$$t_S = t_{S_{tam}} + t_{S_{zpet}} = \frac{s}{v_{tam}} + \frac{s}{v_{zpet}} = \left(\frac{4}{2} + \frac{4}{8}\right) \text{ hod} = 2,5 \text{ hod} \qquad (2)$$

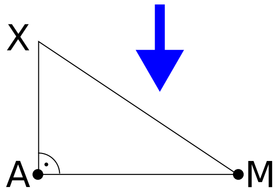
Výlet k Alexandrovi je mnohem zajímavější. Mariana k němu nemůže plout přímo, protože by ji proud odnesl pryč, ale musí směřovat šikmo proti proudu. Manévr si můžeme představit pomocí pravoúhlého trojúhelníka na obrázku 5. Bod M je výchozí pozice Mariany, A Alexandrův domeček a X je bod, ke kterému při vyplutí Mariana směřovala. Cesta jí zabere stejnou dobu, jakou by potřebovala k překonání vzdálenosti $|MX|$. Bohužel $|MX|$ neznáme, ale můžeme ji vyjádřit jako

$$|MX| = vt,$$

kde v je rychlost Mariany na klidné vodě a t čas potřebný k překonání vzdálenosti $|MX|$.
Délka úsečky AX odpovídá vzálenosti, kterou by Mariana urazila, kdyby se nechala jen unášet proudem po stejnou dobu, jako jí zabere výlet k Alexandrovi. Tedy

$$|AX| = v_{proud}t.$$

Jako v každém pravoúhlém trojúhelníku i v AMX platí Pythagorova věta:



Obrázek 5 Cesta k Alexandrovi

$$|MX|^2 = |AX|^2 + |AM|^2$$
$$v^2t^2 = v_{proud}^2 t^2 + |AM|^2 \tag{3}$$

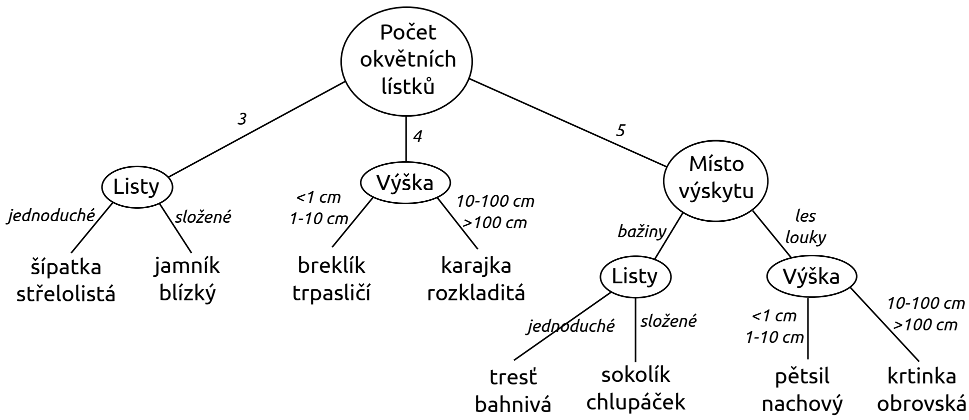
Délku úsečky $|AM|$ známe, jedná se o šířku řeky, takže nám nic nebrání postupně rovnici (3) upravovat a pokusit se z ní vyjádřit čas t:

$$v^2t^2 - v_{proud}^2 t^2 = |AM|^2$$
$$t^2 = \frac{|AM|^2}{v^2 - v_{proud}^2}$$
$$t = \sqrt{\frac{4^2}{5^2 - 3^2}}\ \text{hod} = \sqrt{\frac{16}{25 - 9}}\ \text{hod} = 1\ \text{hod} \tag{4}$$

Zpáteční cesta zabere Marianě také jednu hodinu (výpočet by byl úplně stejný) a celý výlet potrvá 2 hodiny. To je poměrně překvapivý výsledek – přestože vzdálenosti k Alexandrovi a k Sergejovi jsou stejné, výlet k Alexandrovi (kolmo na proud) a zpět potrvá kratší dobu než výlet k Sergejovi a zpět (rovnoběžně s proudem). Na úplně klidné vodě by oba výlety trvaly $t_{klid} = \frac{8}{5} = 1,6$ hod. A protože proud vzduchu má podobné účinky jako proud vody, můžeme si z těchto úvah vzít ponaučení, že nejlepší vítr pro okružní výlet na kole je žádný vítr.

Úloha 5B (5 bodů):

Kromě správnosti má Václav na identifikační klíč jediný požadavek: aby na určení libovolné rostliny stačilo zodpovědět nejvýše tři otázky. Každá otázka rozdělí rostliny do dvou nebo více skupin. Kdybychom je volili nevhodně, např. takové, které rozdělí rostliny do jedné malé a jedné velké skupiny, mohlo by se stát, že tři otázky by nestačily na určení libovolného druhu. Budme tedy volit takové otázky, ze kterých vzejde co největší množství podobně velkých skupin. Na nejvyšší úroveň můžeme umístit otázku na počet okvětních lístků. Rostliny se třemi okvětními lístky jednoznačně určíme podle typu listů (šípatka střelolistá má jednoduché a jamník blízký složené). Podobně k určení rostlin se čtyřmi okvětními lístky stačí znát jejich výšku: breklík trpasličí je vždy menší než 10 cm, zatímco karajka rozkladitá vždy vyšší. Rostlinky s pěti okvětními lístky musíme nejprve dále rozdělit podle místa výskytu a ty, které rostou v bažině, určíme podle listů, a zbylé podle výšky. Celý identifikační klíč může vypadat např. takto:



Obrázek 6 Identifikační klíč

Není to samozřejmě jediné správné řešení, otázky jsme mohli poskládat i jinak a nebo využít informace o průřezu stonku a barvě květů.