Kategorie mladší

Úloha 1A (5 bodů):
Hokejové utkání se hraje na tři třetiny. Tučňáci v první třetině vstřelili jediný gól - hned v první odpovědi se jím Tomáš chlubí a o žádném dalším gólu Tučňáků v první třetině se rozhovor nezmiňuje. Rovněž Medvědi byli v první třetině úspěšní, ale zatím nevíme kolikrát, komentátor jen říká neurčité „několikrát“. Pojďme tedy na druhou třetinu. Na jejím začátku Tučňáci opět skórovali. Co však znamená, že se „dál tlačili dopředu“, nemůže to být slangové vyjádření pro další góly? Víme, že druhá třetina skončila nerozhodně (sama o sobě, nikoli stav po jejím konci) a z „voni daj z jedinýho brejku góla“ odvodíme, že Medvědi vsítili ve druhé třetině jediný gól. To však znamená, že i Tučňáci žádný další nevstřelili a druhá třetina tak musela skončit 1:1. Navíc, jestliže stačil Tučňákům jediný gól k vyrovnání stavu z první třetiny, musela první část zápasu dopadnout výsledkem 2:1 pro Medvědy. Ve třetí třetině padl jediný gól, ale z rozhovoru není na první pohled patrné, který tým jej vstřelil. Přání „za rok ať vám to vyjde“ znamená, že Tučňáci finále prohráli. Z tohoto gólu se tedy radovali Medvědi. V opačném případě by utkání skončilo v základní hrací době nerozhodně, následovalo by prodloužení a případné nájezdy, ve kterých by musel nějaký gól padnout, avšak ani Tomáš, ani Štefan se o tom nezmiňují.
Finálové utkání skončilo výsledkem 4:2 pro Medvědy a jednotlivé třetiny dopadly 2:1, 1:1 a 1:0 (Medvědi:Tučňáci).

Úloha 2A (7 bodů):
Připomeňme si, jaké tóny jednotliví cvrčci umí. Amadeus 5 a 1 (ve zbytku úlohy budeme zkracovat na A5, A1), Ludwig 2 a 3 (L2, L3), Johann 2 a 0 (J2, J0), Bedřich 8 a 6 (B8, B6) a konečně Antonín -1 a -4 (N-1, N-4). Kouzelná nožka má 6 tónů o výškách 8, 18, 0, 16, 7 a 2. Nejvyšší z nich je 18. Je dokonce tak vysoký, že existuje jen jeden způsob, jak ho zahrát: Amadeus, Ludwig, Johann a Bedřich budou hrát na své vyšší nohy a Antonín bude odpočívat.

8	**18**	**0**	**16**	**7**	**2**
	A5				
	L3				
	J2				
	B8				

První tón má výšku 8 a na první pohled se zdá, že jej mohli vyloudit společným úsilím všichni cvrčci. Amadeus, Ludwig, Johann a Bedřich by podle pravidel museli hrát na své nižší nohy a Antonín by zahrál -1. Jenže pak by také musel hrát druhý tón, což, jak již víme, není možné. Kdyby hráli jen Amadeus, Ludwig, Johann a Bedřich, také kýžených 8 dohromady nedají, takže první tón zazní jako výsledek snahy tří cvrčků. Existují jen 4 možnosti a jediná, která vychází, je L2, J0 a B6. Výška třetího tónu je 0, avšak víme už, že Amadeus musí zahrát na svou nižší nohu. Antonín se tedy musí přidat. Kdyby zahrál -1, musel by následující tón hrát -4. Ostatní cvrčci by dohromady museli zahrát 20=16+4, což není možné. Během třetího tónu musí hrát Antonín -4:

8	**18**	**0**	**16**	**7**	**2**
	A5	A1			
L2	L3				
J0	J2				
B6	B8				
		N-4	N-1		

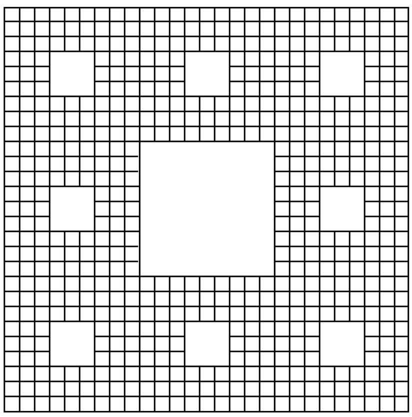
Jediná možnost, jak dosáhnout 0 ve třetím tónu, je nechat hrát Ludwiga 3. Následující tón má výšku 16 a protože už víme, co zahrají Ludwig s Antonínem, existuje jen jedna možnost, jak dohromady dosáhnout 16. Amadeus bude hrát 5, Johann 2 a Bedřich 8:

8	**18**	**0**	**16**	**7**	**2**
	A5	A1	A5	A1	
L2	L3	L3	L2		
J0	J2		J2		
B6	B8		B8	B6	
		N-4	N-1		

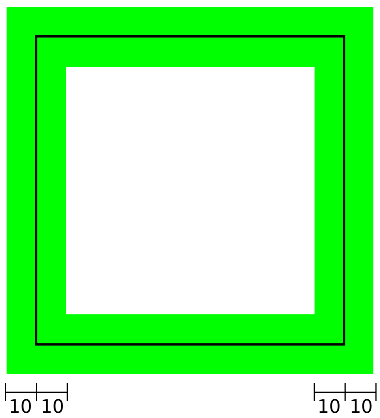
Předposlední tón má výšku 7 a přesně tolik je součet tónů, které už hrají Amadeus s Bedřichem. Mohlo by se zdát, že nejjednodušší bude nechat Johanna zahrát 0, jenže pak by nám nezbyla žádná možnost, jak zahrát podle pravidel poslední tón. Celé řešení je shrnuto v následující tabulce:

8	**18**	**0**	**16**	**7**	**2**
	A5	A1	A5	A1	
L2	L3	L3	L2	L2	L3
J0	J2	J0	J2	J2	J0
B6	B8		B8	B6	
		N-4	N-1	N-4	N-1

Úloha 3A (8 bodů):
Existuje mnoho způsobů, jak spočítat obsah vyrostlé mengerovky, některé pracnější, jiné rychlejší. My si vybereme postup vhodný i pro ty největší lenochody. Namísto přímého výpočtu obsahu mengerovky spočítáme obsah plochy, která zarostlá *není* a odečteme jej od celkového obsahu kostry. V drátěné kostře se nachází oka o rozměrech 9×9 m, 3×3 m a 1×1 m. Největší díra jen jednou (uprostřed kostry) a středně velká $8\times$, protože tolik je středně velkých čtverců, které Miloš dále rozdělil. V každém z těchto středních čtverců se dále nachází $8 \cdot 9$ malých ok, v celé kostře jich je tedy $8 \cdot 8 \cdot 9 = 576$.



Drátěná kostra



Plocha zarostlá kolem jednoho drátěného oka

Okraje všech ok (bez ohledu na jejich rozměry) jsou porostlé pásem mengerovky širokým 10 cm, takže délka strany nezarostlého čtverce se zmenší o $2 \cdot 10$ cm. Obsah nezarostlé plochy v největším oku je $8,8 \cdot 8,8$ m^2, ve středně velkém oku $2,8 \cdot 2,8$ m^2 a v nejmenším $0,8 \cdot 0,8$ m^2. Celkem zůstane volných

$$S_n = 8,8^2 + 8 \cdot 2,8^2 + 576 \cdot 0,8^2 = 508,8 \text{ m}^2. \tag{1}$$

K celkovému obsahu kostry musíme přičíst pás mengerovky široký 10 cm, který roste vně (její rozměry se nafouknou o $2 \cdot 10$ cm). Dostaneme, že

$$S_c = 27,2^2 = 739,84 \text{ m}^2. \tag{2}$$

Obsah plochy porostlé mengerovkou obecnou získéme odečtením volných ploch od celkového obsahu:

$$S = S_c - S_n = (739,84 - 508,8) \text{ m}^2 = 231,04 \text{ m}^2. \tag{3}$$

Obsah mengerovky, která vyroste kolem Milošovy drátěné kostry, bude $231,04$ m^2.

Úloha 4A (10 bodů):

Redakční šotek způsobil, že ze sady pravidel vypadlo (jak se později ukázalo) to nejdůležitější:

$$x \spadesuit y = y \spadesuit x \tag{4}$$

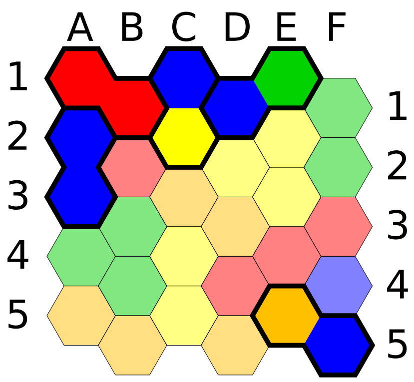
Přesto nám přišlo docela dost řešení se správným výsledkem. Většina odhalila, že operátor $\spadesuit$ je vlastně převlečené plus, $\heartsuit$ má vlastnosti znaménka minus a citoslovce zastupují přirozená čísla: Žbluňk=0, Krí=1, Kvák=2, Chroup=3, Hýk=4, Žmurk=5 a Frnk=6. Někteří však poctivě postupovali jen podle odvozovacích pravidel a i když se třeba nedostali k výsledku Žmurk, mají náš nehynoucí obdiv. Kdyby v zadání bylo pravidlo (4), vypadalo by správné řešení takto:

Kvák $\spadesuit$ Chroup =	$/x \spadesuit y = y \spadesuit x$
Chroup $\spadesuit$ Kvák =	/Kvák = (Krí $\spadesuit$ Krí)
Chroup $\spadesuit$ (Krí $\spadesuit$ Krí) =	$/x \spadesuit (y \spadesuit z) = (x \spadesuit y) \spadesuit z$
(Chroup $\spadesuit$ Krí) $\spadesuit$ Krí =	/(Chroup $\spadesuit$ Krí) = Hýk
Hýk $\spadesuit$ Krí =	/Hýk = (Frnk $\heartsuit$ Kvák)
(Frnk $\heartsuit$ Kvák) $\spadesuit$ Krí =	$/(x \heartsuit y) \spadesuit z = x \spadesuit (z \heartsuit y)$
Frnk $\spadesuit$ (Krí $\heartsuit$ Kvák) =	/Kvák = (Krí $\spadesuit$ Krí)
Frnk $\spadesuit$ (Krí $\heartsuit$ (Krí $\spadesuit$ Krí)) =	$/x \heartsuit (y \spadesuit z) = (x \heartsuit y) \heartsuit z$
Frnk $\spadesuit$ ((Krí $\heartsuit$ Krí) $\heartsuit$ Krí) =	/(Krí $\heartsuit$ Krí) = Žbluňk
Frnk $\spadesuit$ (Žbluňk $\heartsuit$ Krí) =	$/x \spadesuit (z \heartsuit y) = (x \heartsuit y) \spadesuit z$
(Frnk $\heartsuit$ Krí) $\spadesuit$ Žbluňk =	/(Frnk $\heartsuit$ Krí) = Žmurk
Žmurk $\spadesuit$ Žbluňk = Žmurk	/(x $\spadesuit$ Žbluňk) = x

Odpověď zní, že Kvák $\spadesuit$ Chroup = Žmurk.

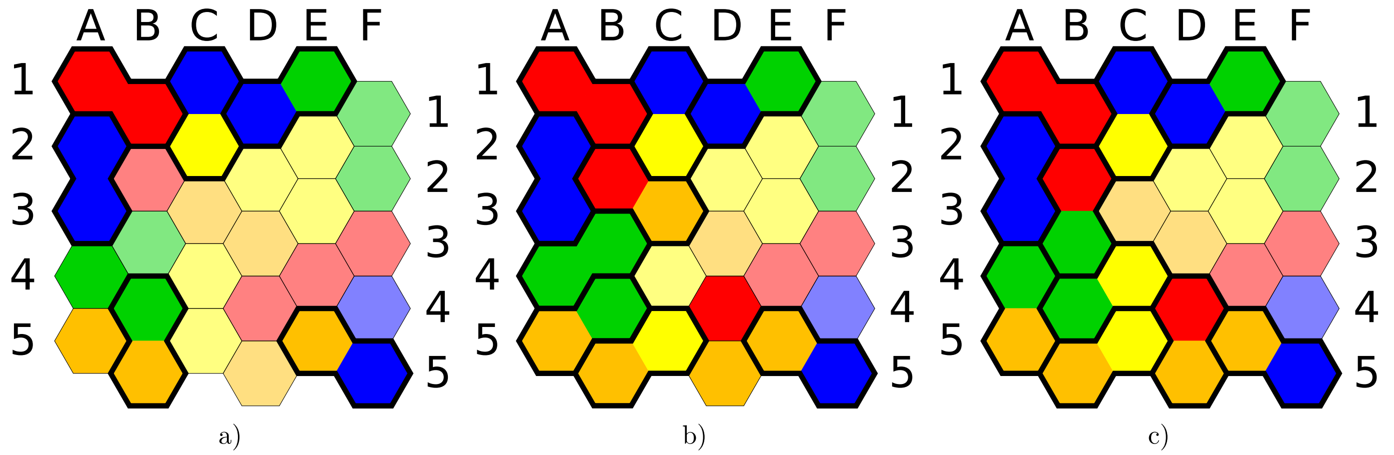
Úloha 5A (6 bodů):

Abychom se mohli na jednotlivé dlaždice snáze odkazovat, označíme sloupce podlahy písmeny od A do F a řádky čísly od 1 do 5. Předpokládejme, že je opravdu možné podlahu sestavit jen z dlaždic z jedné sady. Pro začátek bude nejrozumnější najít dlaždici, kterou lze umístit na podlahu co nejméně způsoby. Po krátkém hledání je zřejmé, že se jedná o modro-oranžovou, která pasuje buď na pozici F4-E5, nebo F5-E5. První možnost by však zcela odřízla políčko F5 od zbytku podlahy, takže modro-oranžovou dlaždici musíme umístit na pozici F5-E5. Políčko F4 nyní sousedí pouze s červenými nezakrytými dlaždicemi. To znamená, že modro-červenou dlaždici nelze položit někam do levého horního rohu. Díky tomu můžeme políčko A1 pokrýt jen jedním způsobem - červeno-červenou dlaždicí na souřadnicích A1-B1. Navíc, protože v levém horním rohu nemůže být modro-červená dlaždice, musí být políčka A2 a A3 obsazena modro-modrou dlaždicí. Políčko C1 sousedí s B1, které je už zakryté, dále s D1, které je ale také modré a modro-modrou dlaždici jsme již vypotřebovali, a do třetice se žlutým C2. Z toho vyplývá, že modro-žlutá dlaždice bude pokrývat políčka C1 a C2. Políčko D1 sousedí se dvěma žlutými a jedním zeleným. Protože modro-žlutou dlaždici jsme použili v předchozím kroku, zakryjeme políčka D1 a E1 modro-zelenou dlaždicí.



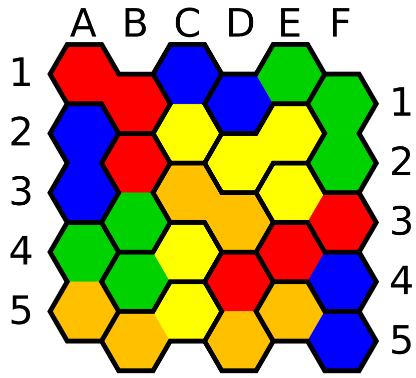
Obrázek 1 Částečně zakrytá podlaha

V tomto okamžiku nemůžeme s jistotou umístit žádnou dlaždici, a proto si nějakou vybereme, postupně ji budeme myšleně pokládat na různá místa podlahy a pokusíme se najít takové umístění, které nevede k neřešitelné situaci. Slibně vypadá např. zeleno-oranžová dlaždice, kterou lze položit jen na čtyři různá místa. Pozici B3-C3 můžeme okamžitě vyloučit, protože bychom zcela izolovali políčko B2. Podobně vidíme, že položit ji na políčka B4-B5 není dobrý nápad, protože A5 bychom mohli zakrýt jedině další zeleno-oranžovou dlaždicí, která však není v balíku (obrázek **2** a)). Další možnost je B4-A5. Políčka A4-B3 bychom pak museli zakrýt zeleno-zelenou dlaždicí, B2-C3 červeno-oranžovou a B5-C5 oranžovo-žlutou (ve všech třech případech nemáme na výběr). K zakrytí políček D4-D5 potřebujeme další červeno-oranžovou (obrázek **2** b)), takže ani tudy cesta nevede. Poslední možnost je umístit zeleno-oranžovou dlaždici na políčka A4-A5. B5 nyní sousedí se zeleným a žlutým nezakrytým políčkem. Protože zeleno-oranžovou dlaždici jsme již použili, umístíme na B5-C5 oranžovo žlutou. Jediná možnost, jak zakrýt D5, je umístit na D4-D5 červeno oranžovou dlaždici. Tím se nám zúžil výběr pro B2 na jedinou možnost - zeleno-červená dlaždice B3-B2. Políčko B4 nyní sousedí s jediným nezakrytým políčkem, musí být tedy spolu s C4 zakryto zeleno-žlutou dlaždicí.



Obrázek 2 Možné pozice zeleno-oranžové dlaždice

V balíku nám zbývají tři jednobarevné dlaždice. Zelenou-zelenou a oranžovo-oranžovou umístíme jednoznačně na políčka F1-F2, respektive C3-D3. Pokud nechceme izolovat žádné políčko, musíme žlutou-žlutou položit na D2-E2. Zbývají červeno-žlutá a modro-červená dlaždice, pro které máme dokonce dvě možnosti, jak je použít. Když např. položíme první na políčka F3-E3 a druhou zakryjeme F4-E4, bude pokrytí podlahy vypadat jako na následujícím obrázku:



Obrázek 3 Řešení příkladu

Kategorie starší

Úloha 1B (5 bodů):
Čísla, která budeme doplňovat do magického čtverce, označíme $x-4$, $x-3$, $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ a $x+4$. Zatím nemůžeme předpokládat velikost konstanty čtverce, může to být cokoli od $k = 3x - 9$ až po $k = 3x + 9$ (konstanta čtverce je samozřejmě pevně daná, otázka však zní, jak ji vyjádřit pomocí dostupných čísel). Číslo uprostřed je velmi důležité, protože přijde do kontaktu se všemi ostatními políčky. Představme si pro začátek, že to bude $x+1$. Někam na okraj čtverce umístíme $x+4$ a číslo proti němu vybereme tak, aby všechna tři dala v součtu konstantu čtverce. Je-li $k < 3x+1$, dostaneme se do problémů, protože pak bychom neměli proti $x + 4$ co doplnit. Stejně tak někam umístíme $x - 4$ a hledáme číslo proti němu. Je-li $k < 3x + 1$, opět se dostaneme do problémů. Závěr z tohoto pozorování zní, že je-li v prostředním políčku číslo $x+1$, musí být konstanta čtverce $k = 3x+1$. Podobně bychom mohli zkoušet další kandidáty pro prostřední čtverec a první pozorování zobecnit: Umístíme-li do prostředního políčka číslo $x + a$, musí být konstanta čtverce $k = 3x + a$.
Umístíme-li do prostředního políčka $x + 1$ (např.), proti $x + 4$ musí být $x - 4$, proti $x + 3$ $x - 3$ atd. a proti číslu x musí být opět číslo x, což není možné. Jediná možnost, jak se vyhnout tomuto problému, je umístit do prostředního políčka číslo x. Nakonec doplníme do čtverce ostatní čísla. Možností je méně, než se na první pohled zdá: máme-li totiž nějaké řešení, můžeme jej otočit o 90° a výsledek bude opět splňovat všechny požadavky ze zadání. Nám stačí jediné řešení. Můžeme $x+4$ umístit do rohu či nikoli?

		$x+4$
	x	
$x-4$		?

Ať už doplníme na místo otazníku cokoli, součet v pravém sloupci nebo spodním řádku nemůže být roven konstantě čtverce. Číslo $x + 4$ tedy doplníme do ne-rohového políčka. Do rohového políčka nyní nelze doplnit ani $x + 2$, protože pak by čísla $x + 2$ nebo $x - 2$ musela být ve všech rozích čtverce, což porušuje požadavek na unikátnost. Nemáme tedy jinou možnost, než do rohů umístit $x \pm 1$ a $x \pm 3$, například takto:

$x-1$	$x+2$	$x-3$
$x-4$	x	$x+4$
$x+3$	$x-2$	$x+1$

Víme, že konstanta čtverce je $k = 3x$. Neznámá x se tedy musí rovnat $x = \frac{2013}{3} = 671$. Vyzbrojeni touto znalostí snadno vyplníme magický čtverec konkrétními čísly:

672	673	668
667	671	675
674	669	670

Jakékoli řešení, které vznikne z tohoto otočením nebo překlopením podle prostředního řádku či sloupce, je samozřejmě také správně.

Úloha 2B (7 bodů):
Označme celkový počet hlav písmenem x. Arnold uťal

$$a = \frac{1}{9}x$$

hlav. Barnabáš usekl o tři hlavy méně než Arnold, jeho příspěvek je

$$b = \frac{1}{9}x - 3.$$

Příšeře nyní zbývá $x - (a + b) = x - \frac{2}{9}x + 3$ hlav. Celestýn odsekl jednu osminu tohoto počtu, tedy

$$c = \frac{1}{8}\left(x - \frac{2}{9}x + 3\right).$$

Dalimil připravil draka o tolik hlav, co Barnabáš a Celestýn dohromady:

$$\begin{aligned} d = b + c &= \frac{1}{9}x - 3 + \frac{1}{8}(x - \frac{2}{9}x + 3) = \\ &= \frac{1}{9}x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{9}x - 3 + 3 \cdot \frac{1}{8} = \\ &= \frac{8 + 9 - 2}{72}x + \frac{3 - 24}{8} = \\ &= \frac{15}{72}x - \frac{21}{8} \end{aligned}$$

Emanuel zanechal saň jen s jednou třetinou původního počtu hlav, to znamená, že spolu se čtyřmi již dříve padlými hrdiny jí usekli dvě třetiny hlav:

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= \frac{2}{3}x \\ e = \frac{2}{3}x - a - b - c - d &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x - \left(\frac{1}{9}x - 3\right) - \left(\frac{1}{8}\left(x - \frac{2}{9}x + 3\right)\right) - \left(\frac{15}{72}x - \frac{21}{8}\right) = \\ &= \frac{48}{72}x - \frac{8}{72}x - \frac{8}{72}x + \frac{24}{8} - \frac{9}{72}x + \frac{2}{72}x - \frac{3}{8} - \frac{15}{72}x + \frac{21}{8} = \\ &= \frac{48 - 8 - 8 - 9 + 2 - 15}{72}x + \frac{24 - 3 + 21}{8} = \\ &= \frac{5}{36}x + \frac{21}{4} \end{aligned}$$

Fridolín uťal příšeře jen o jednu hlavu méně než Emanuel, tedy

$$f = \frac{5}{36}x + \frac{21}{4} - 1 = \frac{5}{36}x + \frac{17}{4}$$

Gabriel usekal dvě třetiny zbývajících hlav. Naštěstí jeho příspěvek k bezpečnosti království nemusíme složitě vyjadřovat. Po něm totiž přišel Hloupý Honza a slavně sani uťal posledních 5 hlav. Jestliže Gabriel usekal dvě třetiny hlav, které sani zbyly po Fridolínovi, musel se Honza vypořádat se zbylou jednou třetinou. Gabriel tedy uťal 10 hlav. Když sečteme hlavy, které jednotliví princové usekli, dostaneme celkový počet hlav:

$$x = a + b + c + d + e + f + g + h.$$

Příspěvek prvních pěti princů nemusíme složitě dosazovat, protože víme, že dohromady usekli dvě třetiny všech hlav:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}x + \frac{5}{36}x + \frac{17}{4} + 10 + 5 \\ x - \frac{2}{3}x - \frac{5}{36}x &= \frac{17}{4} + 10 + 5 \\ \frac{36 - 24 - 5}{36}x &= \frac{17 + 40 + 20}{4} \\ \frac{7}{36}x &= \frac{77}{4} \\ x &= 99 \end{aligned} \tag{5}$$

Na začátku měla saň 99 hlav.

Úloha 3B (8 bodů):

Označme vzdálenost mezi Oldřichem a gepardem v okamžiku prvního měření jako s_1 a v okamžiku druhého měření s_2:

Obecný vzoreček pro výpočet rychlosti je

$$v = \frac{s}{t}, \tag{6}$$

kde v je rychlost, s je vzdálenost a t čas. Gepard za jednu sekundu uběhne vzdálenost $s_1 - s_2$. Ani jednu z těchto vzdáleností však neznáme, takže nezbývá, než je spočítat.

Při rychlosti $c = 300\ 000$ km/s trvalo laserovému paprsku $t_1 = 3$ μs, než urazil vzdálenost $2s_1$ (tam a zpět, proto násobeno 2). Jak vidno, oba údaje mají velmi rozdílné jednotky, takže před výpočtem s_1 je musíme převést na nějaké rozumnější:

$$c = 300\ 000 \text{ km/s} = 300\ 000\ 000 \text{ m/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$
$$t_1 = 3\ \mu\text{s} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Po dosazení do vzorce (6) dostaneme, že v okamžiku prvního měření byl gepard od Oldřicha vzdálen

$$2s_1 = ct_1 = 3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 900 \text{ m}$$
$$s_1 = \frac{900}{2} = 450 \text{ m}.$$

Stejným způsobem zjistíme vzdálenost geparda při druhém měření (za čas nyní dosadíme $t_2 = 2{,}9 \cdot 10^{-6}$ s):

$$2s_2 = ct_2 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-6} = 870 \text{ m}$$
$$s_2 = \frac{900}{2} = 435 \text{ m}.$$

Mezi dvěma měřeními, které jak již víme dělila 1 sekunda, uběhl gepard $s = s_1 - s_2 = 450 - 435 = 15$ m. Jeho rychlost vyjádřená v metrech za sekundu je tedy rovna

$$v = \frac{s}{t} = \frac{450 - 435}{1} = 15 \text{ m/s}. \tag{7}$$

V zadání se však po nás chce rychlost v kilometrech za hodinu. Hodina má 3600 sekund, kilometr 1000 metrů, rychlost geparda ve správných jednotkách je

$$v = 15 \text{ m/s} = 15 \cdot 3600 \text{ m/h} = \frac{15 \cdot 3600}{1000} \text{ km/h} = 54 \text{ km/h}. \tag{8}$$

Tento gepard se zřejmě kochá krajinou, kdyby chtěl, může na krátkou vzdálenost vyvinout rychlost až 120 km/h.

Úloha 4B (10 bodů):

Soustřeďme se nejprve na vysílací protokol. Průzkumný netopýrek může zažít celkem pět událostí, které Pandemonu zajímají: pohyb vpřed, zatáčka vlevo, zatáčka vpravo, medvěd a konec jeskyně. Zároveň nemůžeme předpokládat, že úkony trvají vždy přesně stejnou dobu, Pandemona tedy musí být schopná zrekonstruovat půdorys jeskyně ze souvislého toku signálů (bez odmlk, které by oddělovaly jednotlivé události). Jednoduchý způsob, jak toho dosáhnout, je zakódovat každou událost stejným počtem signálů např. takto:

Vpřed: `nnn` Vlevo: `vnn` Vpravo: `nnv` Medvěd: `vvv` Konec: `nvn`

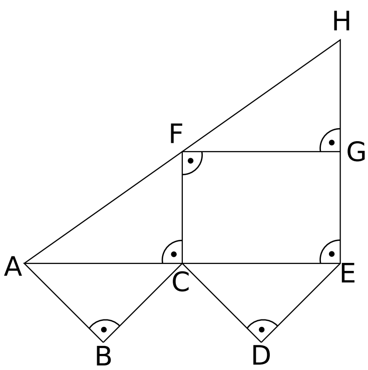
Řídicí program bude průzkumného netopýra navigovat takto: Jestliže se před ním nachází volné pole, popoletí dopředu. V opačném případě se otočí doleva, podívá se, zda tímto směrem pokračuje chodba. Pokud ano, poletí opět dopředu, pokud ne, otočí se dvakrát doprava a rovněž se sonarem přesvědčí, zda je před ním volno. Pokud ne, znamená to, že je na konci jeskyně. Během pohybu musí rovněž Panděmoně vysílat signály o svém stavu. Informace o tvaru jeskyně je nejlepší posílat v momentu, kdy je zřejmé, že daným směrem opravdu chodba pokračuje. Tedy např. zatáčku doprava odvysílat v okamžiku, kdy se netopýrek otočil daným směrem a přesvědčil se, že je před ním volno. Přítomnost medvěda je nejrozumnější testovat v okamžiku, kdy netopýrek dokonal pohyb vpřed o jedno políčko. Na každé políčko totiž dorazí jen jednou (a tedy jen jednou odvysílá informaci o případném mědvědovi), ale může na něm strávit více programových cyklů. Pandemona by sice z několikanásobného varování před medvědem mohla usoudit, že se její průzkumník točí na jednom políčku, ale kdyby medvědů bylo více, mohl by se jí některý ztratit. Navíc, čím lepší návrh, tím méně případných chyb. Když přepíšeme textový popis programu do zdrojového kódu, může řešení vypadat např. takto (text za // je komentář, který řídicí počítač ignoruje):

```
Jestliže Vzdálenost>0 //Máš-li před sebou volno, leť dopředu
{
  Vpřed.
  Signál(n). Signál(n). Signál(n). //Pošli zprávu o pohybu vpřed
  Jestliže Medvěd {Signál(v). Signál(v). Signál(v).} //Nalezen medvěd
}
Jinak //Před netopýrkem je zeď, podívej se doleva
{
  Otoč(Vlevo).
  Jestliže Vzdálenost>0 {Signál(v). Signál(n). Signál(n).} //Chodba pokračuje doleva
  Jinak //Doleva chodba nepokračuje, zkus to doprava
  {
    Otoč(Vpravo).
    Otoč(Vpravo).
    Jestliže Vzdálenost>0 {Signál(n). Signál(n). Signál(v).} //Chodba pokračuje doprava
    Jinak
    {
      Přistaň.
      Signál(n). Signál(v). Signál(n). //Konec jeskyně
    }
  }
}
```

Kdybychom chtěli, mohli bychom snadno vymyslet lepší vysílací protokoly, konec jeskyně např. můžeme zakódovat jako dvě otočky doleva a na zbylé události nám stačí dva signály. Jakýkoli systém zpráv, který Panděmoně umožní zrekonstruovat mapu jeskyně, jsme však považovali za správný.

Úloha 5B (6 bodů):

Inspiraci, jak sestrojit úsečku délky $\sqrt{3}$ m, nám poskytne Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$. Zdánlivě nejsnažší je sestrojit pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách délky 1 m, $\sqrt{3}$ m a přeponě 4 m. Takový však nedokážeme sestrojit. Nemůžeme narýsovat na sebe kolmé odvěsny, protože nedokážeme odměřit $\sqrt{3}$ m a i kdybychom zjistili, jaký úhel svírá přepona s odvěsnou délky 1 m, nemáme úhloměr. Lepší bude nejprve setrojit rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách délky 1 m a přeponě $\sqrt{2}$ m a ten pak využít ke konstrukci pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami dlouhými 1 m a $\sqrt{2}$ m a přeponě $\sqrt{3}$ m. Tady však narazíme na další limit našeho náčiní - s pravítkem dlouhým 1 m nedokážeme spojit úsečkou dva body, které leží dále než 1 m. Pomůžeme si tedy trikem: sestrojíme úsečku délky $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m a pomocí chytré konstrukce jí zdvojnásobíme.



Úsečku délky $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m sestrojíme jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m a $\frac{1}{2}$ m. Nejprve narýsujeme úsečku AB o délce $\frac{1}{2}$ m, v bodě B vztyčíme kolmici a narýsujeme úsečku BC, které je kolmá na AB a měří rovněž $\frac{1}{2}$ m. Spojením bodů A a C získáme úsečku délky $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m. V bodě C vztyčíme kolmici na úsečku AC a narýsujeme úsečku CF dlouhou $\frac{1}{2}$ m. Spojením bodů A a F získáme úsečku délky $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m.

Nyní se dostáváme k onomu triku, který nám umožní zdvojnásobit délku úsečky AF jen s pomocí pravítka a trojúhelníku s ryskou. V bodě C vztyčíme kolmici dlouhou $\frac{1}{2}$ m na úsečku BC a narýsujeme tak úsečku CD. V bodě D rovněž vztyčíme kolmici dlouhou $\frac{1}{2}$ m a narýsujeme úsečku DE orientovanou tak, aby body A, C a E ležely na stejné přímce. Že je ACE úsečka dokážeme snadno: trojúhelníky ABC a CDE jsou pravoúhlé rovnoramenné, a tedy úhly BCA i DCE mají velikost 45°. Úhel BCD je díky konstrukci pravý, takže úhel ACE měří 180° a ACE je skutečně úsečka.

V bodě E vztyčíme kolmici na CE dlouhou 1 m a narýsujeme tak úsečku HE. Nakonec spojíme body H a F. Tato úsečka má délku $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m - když myšleně na úsečce HE vyznačíme bod G vzdálený $0,5$ m od bodu H, vznikne trojúhelník FGH, který je shodný s trojúhelníkem ACF, tedy AF=FH. Pokud má úhel AFH 180°, měří úsečka AH kýžených $\sqrt{3}$ m. To však ukážeme snadno. Úhly CFA a GFA jsou doplňkové a když jejich velikosti sečteme s úhlem CFG, který je pravý, dostaneme 180°. Úsečka AFH je skutečně úsečka a měří $\sqrt{3}$ m.